Lösungen zu Blatt 2

Aufg. 1

Löse dazu das Gl.system $AX = J_3$ mit dem Gauß-Jordan-Verfahren:

$$(A \mid J_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \lambda = -2 \\ \lambda = -1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \lambda = 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot (-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) = (J_3 \mid \underline{\underline{A^{-1}}})$$

Aufg. 2

a) Zu lösen: $A x = 0$.

Gauß-Elimination:

$$(A \mid 0) = (A^{(0)} \mid b^{(0)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \lambda = -1 \end{array}$$

$$\left(A^{(1)} \mid b^{(1)}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{ZSF!}$$

Bestimmung der Lsg.:

Setze $x_3 = s$ ($s \in \mathbb{R}$ beliebig!) und erhalte

$$x_2 = -2x_3 = -2s$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -2x_2 - 3x_3 = 4s - 3s = s$$

D.h. $\operatorname{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (s, -2s, s)^T, s \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} s \\ -2s \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}$$

b) Wieder mit Gauß-Elimination:

$$(B \mid 0) = \left(B^{(0)} \mid b^{(0)}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{6} & -6 & 12 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \lambda = -\tfrac{1}{2}$$

$$\left(B^{(1)} \mid b^{(1)}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \lambda = a$$

$$\left(B^{(2)} \mid b^{(2)}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{ZSF!}$$

<u>Fall $a = -1$:</u>

$$\left(B^{(2)} \mid b^{(2)}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Setze $x_3 = s$ ($s \in \mathbb{R}$) und erhalte

$$x_2 = -x_3 = -s$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \tfrac{1}{6}(6x_2 - 12x_3) = \tfrac{1}{6}(-18s) = -3s$$

D.h. $\operatorname{Ker}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} -3s \\ -s \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$

Fall $a \neq -1$:

$$(B^{(2)} \mid b^{(2)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-1 & 0 \end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow$ ZSF ohne Nullzeile! $\quad (-a-1 \neq 0)$

$\Rightarrow \quad (-a-1)\, x_3 = 0$, d.h. $x_3 = 0$

$\Rightarrow \quad x_2 = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0$

Kurzschreibweise!

D.h. $\quad \operatorname{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{0\}$

Beachte: (Fall $a \neq -1$)

Hier gilt $\operatorname{rg}(B^{(2)}) = \operatorname{rg}(B) = 3$ (voller Rang), und damit ist B invertierbar. Es gilt allgemein:

$$B \in \mathbb{R}^{N,N} \text{ invertierbar} \iff \operatorname{Ker}(B) = \{0\}$$

(vgl. Satz 1, §4 in Kapitel 5)

Aufg. 3

a) $\quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ und $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

b) $\quad C^2 = C \cdot C = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Zeige: $D D^T = I_3$.

$$D D^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also: $D D^T = I_3 \iff D^T = D^{-1}$. ✓

Aufg. 4

a) Mit Aufg. 2b) folgt

$$\det(B) = \det(B^{(2)}) = 6 \cdot (-1) \cdot (-a-1) = 6(a+1).$$

Beachte dabei, dass in Aufg. 2b) keine Zeilen- oder Spaltenvertauschungen vorgenommen wurden!

b) 1. Möglichkeit: "Entwickeln nach Zeile 1"

$$\det(M) = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (2-3) + 4 \cdot (0-1) = -7$$

2. Möglichkeit: "Entwickeln nach Spalte 1"

$$\det(M) = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (2-3) + 1 \cdot (0-4) = -7$$

Merke:

Suche die Nullen in den Zeilen bzw. Spalten für die Anwendung des Laplaceschen Entw.satz!