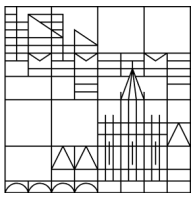
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statsitik
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Sommersemester 2025

Universität Konstanz



Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numode.html

2. Übungsblatt

Ausgabe: 29.04.2025, Abgabe: 06.05.2025, bis 10.00 Uhr

Aufgabe 2.1 (6 Punkte)

a) Formulieren Sie das Euler-Cauchy-Verfahren mit Schrittweite $h > 0$ für das Anfangswertproblem

$$y'' = f(t, y, y'), \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b. \tag{1}$$

Leiten Sie damit eine Iteration für die approximative Lösung von (1) der Form

$$y_{m+1} = G\left(t_{m-1}, y_{m-1}, y_m\right), \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

mit einer geeigneten Funktion G her.

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u'(t) = 2t^{-1}u(t), \quad u(1) = 1 \tag{2}$$

mit der exakten Lösung $\bar{u}$. Weiter sei u^h die Lösung des Euler-Cauchy-Verfahrens zu (2) zur Schrittweite $h > 0$ auf dem Gitter $t_j = 1 + jh,\ j = 0, 1, 2, \ldots$ Zeigen Sie:

(i) Für $j = 0, 1, 2, \ldots$ gilt $u^h(t_j) = \frac{(1+(j+1)h)(1+jh)}{1+h}$.

(ii) Für $j = 0, 1, 2, \ldots$ gilt $\left|u^h(t_j) - \bar{u}(t_j)\right| = jh^2\frac{1+jh}{1+h}$.

c) Bestimmen Sie für die beiden Einschrittverfahren

(i) $u_{m+\frac{1}{2}} = u_m + \frac{h}{2}f(t_m, u_m),\ u_{m+1} = u_{m+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}f\left(t_m + \frac{h}{2}, u_{m+\frac{1}{2}}\right), \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$

(ii) $u_{m+1} = u_m + hf\left(t_m + \frac{h}{2}, u_m + \frac{h}{2}f\left(t_m, u_m\right)\right), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$

sowohl das Runge-Kutta-Tableau als auch deren Konsistenzordnung.

Aufgabe 2.2 (6 Punkte)

Vorgelegt seien die Anfangswertaufgaben

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = \alpha \tag{3}$$

und

$$\begin{pmatrix} v'(t) \\ s'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(s(t), v(t)) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v(t_0) \\ s(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ t_0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit $f \in C^1\left([t_0, t_{end}] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N\right)$.

(a) Verifizieren Sie $\bar{u}(t) = \bar{v}(t)$ sowie $\bar{s}(t) = t$, $t_0 \le t \le t_{end}$ für die exakten Lösungen von (3) und (4).

(b) Mit einem expliziten s-stufigen Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung $p \ge 1$ mit Tableau $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$ werden numerische Approximationen $u^h(t_m)$ von (3) und $\left(s^h(t_m), v^h(t_m)\right)$ von (4), $t_m = t_0 + mh$, $m = 0, \ldots, \sigma(h)$ berechnet. Zeigen Sie:

Gilt $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij},\ i = 2, \ldots, s$ und $\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$, so folgt

$$u^h(t_m) = v^h(t_m), \quad s^h(t_m) = t_m, \quad m = 0, \ldots, \sigma(h).$$

Aufgabe 2.3 (9 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{5}$$

mit eindeutiger exakter Lösung $\bar{x}$.

a) Für eine approximative Lösung $\tilde{x}$ von (5) gelte für eine gegebene Schrittweite $h > 0$ die Beziehung $\varepsilon(h) = C(h)h^p$, wobei $\varepsilon(h) := \max\{|\bar{x}(t_k) - \tilde{x}(t_k)| : t_k = kh, k = 0, 1, 2 \ldots\}$, C stetig in 0 mit $C(0) > 0$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{ord}(h) := \frac{\ln(\varepsilon(h)) - \ln(\varepsilon(h/2))}{\ln(2)} \to p \quad \text{für} \quad h \to 0.$$

b) Implementieren Sie in Matlab für die Differentialgleichung (5) sowohl das **klassische Runge-Kutta-Verfahren** als auch das **Verfahren von Lawson**.

Testen Sie Ihr Programm mit $f(t, x(t)) = Rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$, d. h. (5) ist die **Verhulstgleichung**, welche das Wachstum von Populationen modelliert. Dabei bezeichnet R die Replikationsrate und K steht für die Umweltbedingungen. Wählen Sie dafür das Zeitintervall $[0, 10]$ mit der Schrittweite $h = \frac{1}{10}$ und setzen Sie für die Parameter $R = 1$ und $K = 5$ und für den Anfangswert $x_0 = 1$ ($x_0 = 10$). Geben Sie anschließend die berechneten Lösungen jeweils in einem eigenen Schaubild aus.

Schätzen Sie überdies die Konvergenzordnung der beiden Verfahren mittels der Größe $\mathrm{ord}(h)$ aus Teil a) für die Schrittweiten $h = \frac{1}{10}$, $h = \frac{1}{20}$ und $h = \frac{1}{40}$.

Hinweis: Die Tableaus des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens ($s = 4$) und des Lawsons-Verfahrens ($s = 6$) lauten:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cccccc} 0 & & & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{6}{16} & \frac{9}{16} & & \\ 1 & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{8}{7} & \\ \hline & \frac{7}{90} & 0 & \frac{32}{90} & \frac{12}{90} & \frac{32}{90} & \frac{7}{90} \end{array}$$