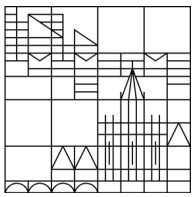
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statsitik
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Sommersemester 2025

Universität Konstanz



Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numode.html

3. Übungsblatt

Ausgabe: 13.05.2025, Abgabe: 20.05.2025, bis 10.00 Uhr

Aufgabe 3.1 (6 Punkte)

a) Seien $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ invertierbar und $\|\cdot\|$ die durch eine Norm auf dem $\mathbb{R}^N$ induzierte Matrixnorm. Zeigen Sie, dass dann jedes $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit der Eigenschaft $\|A-B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ ebenfalls invertierbar ist und folgende Abschätzung erfüllt:

$$\left\|B^{-1}\right\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A-B\|\,\|A^{-1}\|}.$$

Hinweis: Zeigen Sie für $P := A^{-1}(A-B)$ zunächst die Invertierbarkeit von $I-P$ und die Abschätzung $\left\|(I-P)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|P\|}$.

b) Seien $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und $ZSN := \max_{i=1,\dots,N}\left\{\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}|\right\}$ die Zeilensummennorm von A. Zeigen Sie für die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf dem $\mathbb{R}^N$, dass $ZSN = \|A\|_\infty$ gilt, wobei $\|A\|_\infty$ die durch die Maximumsnorm auf dem $\mathbb{R}^N$ induzierte Matrixnorm von A ist.

Aufgabe 3.2 (lokaler Konvergenzsatz des Newtonverfahrens) (6 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $T : U \to \mathbb{R}^N$ zweimal stetig differenzierbar und sei $\bar{u} \in U$ eine Lösung des Systems $T(u) = 0$ mit $T'(\bar{u})$ invertierbar.

a) Vorausgesetzt seien für ein $r_1 > 0$ mit $K_{r_1}(\bar{u}) \subset U$ folgende Abschätzungen:

$$\exists K_1 > 0\ \forall u,v \in K_{r_1}(\bar{u}):\ \left\|T'(u)-T'(v)\right\|_\infty \leq K_1\|u-v\|_\infty,$$
$$\exists K_2 > 0\ \forall u,v \in K_{r_1}(\bar{u}):\ \left\|T(u)-T(v)-T'(v)(u-v)\right\|_\infty \leq K_2\|u-v\|_\infty^2.$$

Zeigen Sie: Es gibt ein $r_2 > 0$, so dass für $u \in K_{r_2}(\bar{u})$ die Abschätzung

$$\left\|T'(u)-T'(\bar{u})\right\|_\infty \leq \frac{1}{2\gamma}, \quad \gamma := \left\|T'(\bar{u})^{-1}\right\|_\infty$$

gilt und folgern Sie daraus mittels Aufgabe 1 für $u \in K_{r_2}(\bar{u})$ die Existenz des Newtonoperators $N(u) := u - T'(u)^{-1}T(u)$. Zeigen Sie anschließend:

$$\forall u \in K_{r_2}(\bar{u}):\ \left\|N(u)-N(\bar{u})\right\|_\infty \leq \sigma\left\|u-\bar{u}\right\|_\infty^2, \quad \sigma := 2\gamma K_2. \tag{1}$$

b) Setzen Sie unter den Voraussetzungen aus a) $r := \min\left\{r_2, \frac{1}{2\sigma}\right\}$ und zeigen Sie mit (1), dass die Newtonfolge $u^{n+1} = N(u^n)$ für $u^0 \in K_r(\bar{u})$ in $K_r(\bar{u})$ liegt und **lokal quadratisch** gegen $\bar{u}$ konvergiert.

Aufgabe 3.3 (9 Punkte)

Gegeben sei die Bewegungsgleichung des Fallschirmspringers

$$\ddot{x}(t) \;=\; g - \frac{k(t)\cdot \dot{x}^2(t)}{m}, \quad x(0) \;=\; 0, \quad \dot{x}(0) \;=\; 0 \tag{2}$$

mit $g = 9.81$, $m = 1$ und

$$k(t) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t < 7, \\ 9(t-7)+1 & \text{für } 7 \le t < 8, \\ 10 & \text{für } t \ge 8. \end{cases}$$

a) Betrachten Sie ein allgemeines (implizites) Runge-Kutta-Verfahren der Stufe 2 mit Tableau $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$ in Stufenform zur Anfangswertaufgabe (2) und formulieren Sie für das System (2-3) aus dem Vorlesungsskript sowohl die Fixpunktiteration

$$U^{(n+1)} = T(U^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

zu $T(U) = U$ als auch die Newtoniteration

$$\tilde{T}'(U^{(n)})d^{(n)} = -\tilde{T}(U^{(n)}),\; U^{(n+1)} = U^{(n)} + d^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

zu $\tilde{T}(U) = 0,\; \tilde{T}(U) := U - T(U)$.

b) Lösen Sie in Matlab mit dem **Radau-IIA-Verfahren der Stufe 2** die Aufgabe (2) für das Zeitintervall $[0, 30]$ mit der Schrittweite $h = \frac{1}{10}$. Verwenden Sie dabei für das auftretende nichtlineare Gleichungssystem auf jedem Zeitlevel die Fixpunktiteration bzw. die Newtoniteration aus Teil a) mit jeweils dem gleichen Abbruchkriterium $\varepsilon = 10^{-8}$ (nehmen Sie als Startwert für die Iteration jeweils die Lösung zum Zeitpunkt zuvor).

Vergleichen Sie die Anzahl der beiden Iterationen insgesamt und geben Sie diese auf der Konsole aus.

Zeichnen Sie die berechnete Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ in ein (t, v)-Diagramm und visualisieren Sie die Fallbewegung des Fallschirmspringers, indem Sie die Größe

$$H(t) = 45 - x(t)$$

für jeden Zeitpunkt $t \in [0, 30]$ in ein weiteres Schaubild zeichnen mit dem Boden als x-Achse und der Höhe H als y-Achse.

Lösen Sie zum Schluss das Problem (2) ebenfalls mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren für das gleiche Zeitintervall und zeichnen Sie erneut das (t, v)-Diagramm. Was beobachten Sie, wenn Sie $h = \frac{1}{5}$ wählen?