Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statsitik
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Sommersemester 2025

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numode.html

4. Übungsblatt

Ausgabe: 27.05.2025, Abgabe: 03.06.2025, bis 10.00 Uhr

Aufgabe 4.1 (6 Punkte)

Gegeben sei eine global Lipschitz-stetige Funktion $f : [t_0, t_{end}] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, d. h. es existiere ein $L > 0$ mit

$$\|f(t,v) - f(t,w)\|_\infty \quad \leq \quad L\,\|v-w\|_\infty \qquad \Big(t_0 \leq t \leq t_{end}, \quad v,w \in \mathbb{R}^N\Big).$$

Weiter sei $V = V(h,t,u)$ die Verfahrensfunktion eines allgemeinen Runge-Kutta-Verfahrens s-ter Stufe mit Tableau $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$ zur Anfangswertaufgabe

$$\dot{u}(t) \quad = \quad f(t,u(t)), \quad t \in [t_0, t_{end}], \quad u(t_0) = \alpha.$$

Beweisen Sie für $\bar{h} > 0$ hinreichend klein eine Lipschitz-Bedingung der Form

$$\|V(h,t,v) - V(h,t,w)\|_\infty \quad \leq \quad L_1\,\|v-w\|_\infty$$

mit $0 < h \leq \bar{h}$, $t_0 \leq t \leq t_{end}$, $v,w \in \mathbb{R}^N$. Wie hängt L_1 von L und den Koeffizienten des Runge-Kutta-Verfahrens ab?

Aufgabe 4.2 (6 Punkte)

Gegeben sei für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = Au(t), \quad u(0) = \alpha \in \mathbb{R}^N. \tag{1}$$

a) Betrachten Sie für das Problem (1) sowohl das explizite als auch das implizite Euler-Cauchy-Verfahren zur Schrittweite $h > 0$ mit den dazugehörigen Lösungen u_{ee}^h bzw. u_{ie}^h. Zeigen Sie für $t_j = jh,\ j = 0,1,2,\ldots$

$$u_{ee}^h(t_j) = (I + hA)^j\alpha \quad \text{und} \quad u_{ie}^h(t_j) = (I - hA)^{-j}\alpha.$$

b) Sei nun A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar und für alle Eigenwerte λ von A gelte $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Zeigen Sie für die exakte Lösung $\bar{u}$ von (1): $\lim_{t\to\infty} \bar{u}(t) = 0$.

c) Wie ist unter den Voraussetzungen aus Teil b) für das explizite bzw. implizite Euler-Cauchy-Verfahren die Schrittweite $h > 0$ in Abhängigkeit der Eigenwerte von A zu wählen, damit

$$\lim_{j\to\infty} u_{ee}^h(t_j) = \lim_{j\to\infty} \bar{u}(t_j) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{j\to\infty} u_{ie}^h(t_j) = \lim_{j\to\infty} \bar{u}(t_j)$$

gilt?
Hinweis: Stellen Sie die Lösungen u_{ee}^h und u_{ie}^h in Abhängigkeit der Eigenwerte von A dar.

d) Berechnen Sie im Intervall $[0,10]$ für das Beispiel $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ und $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowohl die exakte Lösung $\bar{u}$ von (1) als auch in Matlab die numerischen Lösungen u_{ee}^h und u_{ie}^h, und veranschaulichen Sie jede Komponente der drei Lösungen in einem Zeitbild. Testen Sie verschiedene Schrittweiten $h > 0$.

Aufgabe 4.3 (9 Punkte)

Es soll die Bewegung eines Satelliten im Kraftfeld zweier großer Körper beschrieben werden. Es wird angenommen, dass die Bewegung aller Körper in einer Ebene abläuft. In einem mitrotierenden Koordinatensystem, in welchem die beiden großen Körper als ruhend erscheinen, wird die Bahn $(x_1(t), x_2(t))$ des Satelliten in der Ebene durch die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= x_1 + 2\dot{x}_2 - (1-\mu)\frac{x_1+\mu}{r_1^3} - \mu\frac{x_1-1+\mu}{r_2^3}, \\ \ddot{x}_2 &= x_2 - 2\dot{x}_1 - (1-\mu)\frac{x_2}{r_1^3} - \mu\frac{x_2}{r_2^3} \end{aligned} \tag{2}$$

mit $r_1 := \sqrt{(x_1+\mu)^2 + x_2^2}$, $r_2 := \sqrt{(x_1-1+\mu)^2 + x_2^2}$ beschrieben. Das System besitzt die Energie

$$H(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \quad := \quad \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right).$$

Wir wählen nun den Wert $\mu = 1/82.45$, welcher für das System Erde-Mond charakteristisch ist sowie den Anfangswert

$$(x_1(0), x_2(0), \dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0)) \quad = \quad (1.2, 0, 0, -1.04935751). \tag{3}$$

Lösen Sie in Matlab das Problem (2) mit den Anfangsbedingungen (3) für $t \in [0,10]$ mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung und verwenden Sie dabei den in der Vorlesung besprochenen Algorithmus zur Schrittweitensteuerung mit den Parametern $\kappa = 2$, $\gamma_0 = 10^{-8}$, $\gamma_1 = 10\gamma_0$ sowie $h_{max} = 1$, $h_0 = 0.01$.

Lösen Sie anschließend das gleiche Problem erneut mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren, dieses Mal aber mit fester Schrittweite $h = \frac{1}{1000}$ und zeichnen Sie für beide Lösungen (mit und ohne Schrittweitensteuerung) das Phasenbild. Was sehen Sie, wenn Sie im Fall ohne Schrittweitensteuerung z. B. $h = \frac{1}{500}$ wählen?

Vergleichen Sie zudem die Anzahl der Zeitschritte sowie die Energie in einem (t, H)-Schaubild der beiden berechneten Lösungen. Testen Sie im Fall der Schrittweitensteuerung auch verschiedene $\gamma_0 = 10^{-j}$, $j = 8, 6, 4$.