Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statsitik
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Sommersemester 2025

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numode.html

5. Übungsblatt

Ausgabe: 10.06.2025, Abgabe: 17.06.2025, bis 10.00 Uhr

Aufgabe 5.1 (6 Punkte)

Gegeben sei das autonome Anfangswertproblem

$$u' = f(u), \quad u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^N, \quad f \in C^1. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass jedes Runge-Kutta-Verfahren angewandt auf (1) lineare Invarianten der Form $\tilde{Q}(u) = d^T u,\ d \in \mathbb{R}^N$, erhält.

b) Zeigen Sie für das explizite bzw. implizite Euler-Cauchy-Verfahren, dass quadratische Invarianten der Form $\tilde{Q}(u) = u^T C u$, mit $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch und positiv definit, folgendes Monotonieverhalten aufweisen:

$$\tilde{Q}(u_{m+1}) \geq \tilde{Q}(u_m) \quad \text{und} \quad \tilde{Q}(v_{m+1}) \leq \tilde{Q}(v_m).$$

Dabei ist $u_m,\ m = 0, 1, 2\ldots$ die Lösung des expliziten und $v_m,\ m = 0, 1, 2\ldots$ die Lösung des impliziten Euler-Cauchy-Verfahrens.

Aufgabe 5.2 (6 Punkte)

Zeigen Sie ohne Verwendung von Satz 5.6 aus der Vorlesung, dass das Gauß-Verfahren erster Stufe symplektisch ist, d. h. die zugehörige diskrete Zeit-h-Abbildung G ist symplektisch.

Hinweis: Implizites Differenzieren der Abbildung G.

Aufgabe 5.3 (9 Punkte)

a) Wiederholen Sie Aufgabe 3 von Blatt 1 für die Hamiltonfunktion

$$\tilde{H}(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 - mg\left(1 - \frac{q^2}{2}\right);$$

wir betrachten hier nur kleine Auslenkungen des Winkels q und somit die Näherung $\cos(q) \approx 1 - \frac{q^2}{2}$.

Verwenden Sie zum Lösen der Aufgabe erneut das explizite und das implizite Euler-Cauchy-Verfahren sowie das Gauß-Verfahren erster Stufe.

Plotten Sie zum Schluss für jedes Verfahren die Hamiltonfunktion in ein gemeinsames $(t, \tilde{H})$-Diagramm. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Aufgabe 1 b).

Hinweis: Die resultierende Differentialgleichung ist hier linear, so dass die angegebenen Verfahren in jedem Zeitschritt als ein lineares Gleichungssystem geschrieben werden können.

b) Betrachten Sie jetzt die originale Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 - mg\cos(q)$$

des mathematischen Pendels und lösen Sie die zugehörige Differentialgleichung mithilfe des Gauß-Verfahrens zweiter Stufe zur Schrittweite $h = \frac{1}{100}$. Das auf jedem Zeitlevel auftretende nichtlineare Gleichungssystem soll mit dem Newtonverfahren gelöst werden (Abbruchkriterium $\varepsilon = 10^{-8}$). Die übrigen Daten und Parameter sollen wie in Teil a) gewählt werden.

Plotten Sie die Hamiltonfunktion in ein (t, H)-Diagramm und vergleichen Sie das Ergebnis mit Aufgabenteil a). Was fällt Ihnen auf?

c) Lösen Sie erneut Aufgabe 3 von Blatt 4, dieses Mal aber mit dem Gauß-Verfahren zweiter Stufe zur festen Schrittweite $h = \frac{1}{500}$ (d. h. ohne Schrittweitensteuerung). Das auf jedem Zeitlevel auftretende nichtlineare Gleichungssystem soll erneut mit dem Newtonverfahren gelöst werden (Abbruchkriterium $\varepsilon = 10^{-8}$).

Animieren Sie dieses Mal zudem die Bewegung des Satelliten in der Ebene und zeichnen Sie Erde (Koordinaten $(-\mu, 0)$) und Mond (Koordinaten $(1-\mu, 0)$) in das Schaubild mit ein.

Plotten Sie zum Schluss noch die Energie H in ein (t, H)-Diagramm (auf den Vergleich mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren kann hier verzichtet werden).