

ÜBUNGSAUFGABEN ZUM Vorkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Übungsblatt 2 – Lösungen

Aufgabe 1

Gegeben: $f(x) = 2 \cos(x) + 1$.

a) Beachte zunächst: Es gilt $\cos(x) \leq 1$ sowie $\cos(x) \geq -1$, und zwar für alle $x \in \mathbb{R}$.

– Damit gilt $f(x) \leq 2 \cdot 1 + 1 = 3$, d. h. 3 ist das Maximum. Für die zugehörigen x -Werte gilt

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

– Analog gilt $f(x) \geq 2 \cdot (-1) + 1 = -1$, d. h. -1 ist das Minimum. Für die zugehörigen x -Werte gilt

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow \cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

b) Wir zeichnen die Funktion f ausgehend von der Cosinus-Funktion $y = \cos(x)$:

1. $y = 2 \cos(x)$: Streckung in y -Richtung mit dem Faktor 2, vgl. Abbildung 1.
2. $y = 2 \cos(x) + 1$: Verschiebung um 1 in y -Richtung, vgl. Abbildung 1.

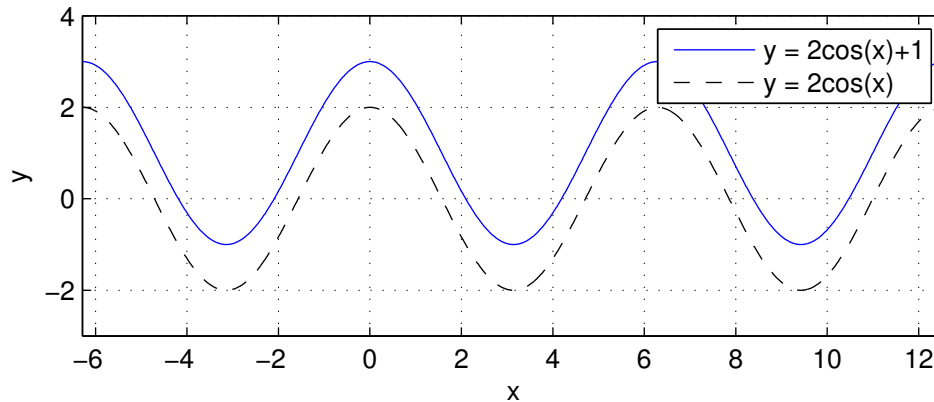


Abbildung 1: Zu Aufgabe 2 b), 2.

Aufgabe 2

Gegeben: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

(i) Diese Eigenschaft ergibt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f(x) = -f(-x) &\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = -(a(-x)^3 + b(-x)^2 + c(-x) + d) \\&\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - bx^2 + cx - d \\&\Leftrightarrow bx^2 + d = -bx^2 - d \\&\Leftrightarrow bx^2 = -d.\end{aligned}$$

Da diese Eigenschaft für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt speziell für $x = 0$:

$$b \cdot 0^2 = -d \quad \Leftrightarrow \quad d = 0.$$

Setzen wir nun in die Bedingung $bx^2 = 0$ z. B. den Wert $x = 1$ ein, so folgt:

$$b \cdot 1^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0.$$

Also erhalten wir

$$f(x) = ax^3 + cx.$$

(ii) Für obiges f gilt nun mit dieser Eigenschaft

$$f(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 1^2 + c \cdot 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -c,$$

d. h. die gesuchte Funktion lautet für $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = ax^3 - ax = ax(x^2 - 1).$$

Als Beispiel können wir $a = 2$ setzen:

$$f(x) = 2x(x^2 - 1).$$

Aufgabe 3

Die kritische Stelle ist $x = 1$. Für dieses x gilt nach Definition der Funktion

$$f(1) = a \cdot 1 - 1 = a - 1.$$

Damit die Funktion stetig ist, muss gelten

$$a - 1 = 3 \cdot 1^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 5.$$

(Für dieses a stimmen links- und rechtsseitiger Grenzwert mit dem Wert $f(1) = 4$ überein.)

Zur Differenzierbarkeit bei $x_0 = 1$ für $a = 5$: Für den rechtsseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten gilt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{3(1+h)^2 + 1 - (3 \cdot 1^2 + 1)}{h} = \lim_{h \searrow 0} (6 + 3h) = 6.$$

Für den linksseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten erhalten wir

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{5(1+h) - 1 - (5 \cdot 1 - 1)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} 5 = 5.$$

D. h. rechts- und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten stimmen nicht überein und damit existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

nicht. Also ist f bei $x_0 = 1$ für $a = 5$ nicht differenzierbar (anschaulich hat die Funktion bei $x_0 = 1$ einen Knick!).

Aufgabe 4

a) $f(x) = (3x^5 - 2x^2)(1 - 2x^4)$:

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (15x^4 - 4x)(1 - 2x^4) + (3x^5 - 2x^2)(-8x^3) \\ &= 15x^4 - 30x^8 - 4x + 8x^5 - 24x^8 + 16x^5 \\ &= -54x^8 + 24x^5 + 15x^4 - 4x. \end{aligned}$$

b) $f(x) = \frac{3x^2 - 2\exp(x)}{x^2 + 1}$:

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x - 2\exp(x))(x^2 + 1) - (3x^2 - 2\exp(x)) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{6x^3 + 6x - 2\exp(x)(x^2 + 1) - 6x^3 + 4x\exp(x)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{6x - 2\exp(x)(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{6x - 2\exp(x)(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

c) $f(x) = \ln(\sqrt{3x^2 + 5})$:

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + 5}} \cdot 6x \\ &= \frac{3x}{3x^2 + 5}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) $f(x) = 1 + x + x^4$:

$$F(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^5 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) $f(x) = \exp(x) + x^{3/2}$:

$$F(x) = \exp(x) + \frac{2}{5}x^{5/2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

c) $f(x) = \sin(6x)$: Analog zu d) setze $z = 6x$ und erhalte

$$F(x) = \int \sin(6x) dx = \frac{1}{6} \int \sin(z) dz = \frac{1}{6}(-\cos(z)) + C = -\frac{1}{6}\cos(6x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 6

Mittels „linearer Substitution“ erhalten wir zunächst mit $z = 2x - 1$

$$\int \sqrt{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{z} dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} z^{3/2} + C = \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C.$$

Damit gilt

$$\int_{\frac{1}{2}}^5 \sqrt{2x-1} dx = \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} \Big|_{\frac{1}{2}}^5 = 9.$$

Als geometrische Interpretation ergibt sich die Fläche zwischen der Kurve von $y = \sqrt{2x-1}$ und der x -Achse, begrenzt durch $\frac{1}{2}$ und 5, vgl. Abbildung 2.

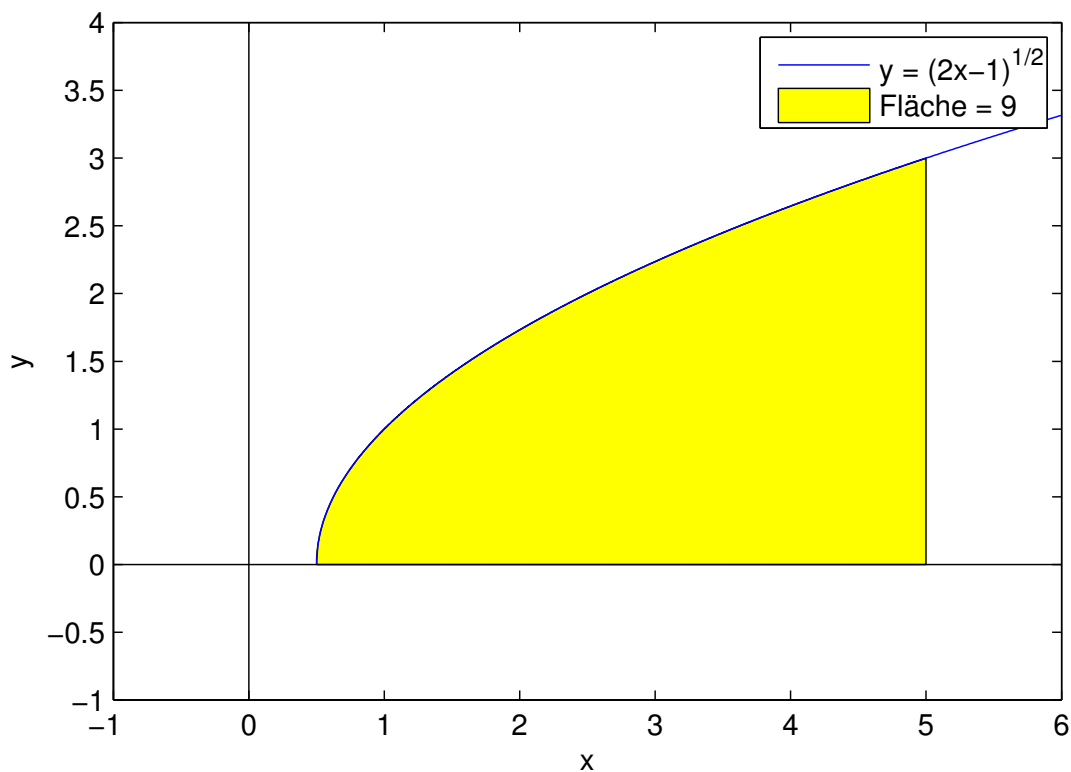


Abbildung 2: Geometrische Interpretation zu Aufgabe 6.

Aufgabe 7

Gegebene Bedingungen:

$$(i) \quad f'(x) = 3f(x),$$

$$(ii) \quad f(0) = 2.$$

Zu (i): Eine Funktion, die sich beim Ableiten nicht ändert, ist die Exponentialfunktion. Da in der Bedingung (i) diese Eigenschaft bis auf den Faktor 3 vorliegt, muss es sich hier um eine gestauchte bzw. gestreckte Exponentialfunktion handeln.

Wir machen also folgenden Ansatz:

$$f(x) = a \cdot \exp(c \cdot x) \quad \text{mit zwei Konstanten } a, c \in \mathbb{R}.$$

Ableiten ergibt

$$f'(x) = a \exp(cx) \cdot c = cf(x) \quad \stackrel{(i)}{\Rightarrow} \quad c = 3,$$

also erhalten wir für beliebiges $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a \exp(3x).$$

Zu (i) und (ii): Falls beide Bedingungen erfüllt sein sollen, muss zusätzlich

$$2 = f(0) = a \exp(3 \cdot 0) = a$$

gelten. Dies liefert die gesuchte Funktion

$$f(x) = 2 \exp(3x).$$

Bemerkung:

Bei der Bedingung (i) handelt es sich um eine sogenannte Differentialgleichung. Die Bedingungen (i) und (ii) zusammen werden ein Anfangswertproblem genannt.