

# ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE

OLIVER C. SCHNÜRER

ZUSAMMENFASSUNG. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung Algebraische Topologie an der

- Freien Universität Berlin im Sommersemester 2007 und an der
- Universität Konstanz im Sommersemester 2011.

Wir folgen insbesondere [2]. Vielen Dank an Arno Fehm, Felix Jachan und Ananda Lahiri für zahlreiche Korrekturen.

## INHALTSVERZEICHNIS

0. Ziele der Algebraischen Topologie	1
1. Motivation Homologie	2
2. Simpliciale Homologie	3
3. Singuläre Homologie	8
4. Homotopieinvarianz	11
5. Exakte Sequenzen und Ausschneidungen	15
6. Die Äquivalenz von simplicialer und singulärer Homologie	36
7. Abbildungsgrad	41
8. Zelluläre Homologie	48
9. Eulercharakteristik	52
10. Mayer-Vietoris Sequenzen	54
11. Klassische Anwendungen	55
12. Homotopietheorie	58
Anhang A. Topologische Grundlagen	73
Literatur	76

## 0. ZIELE DER ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE

- Wie kann man topologischen Räumen oder einer Klasse von topologischen Räumen algebraische Objekte, beispielsweise Gruppen, zuordnen, die es erlauben, Räume zu unterscheiden. Wunsch: Finde eine Zuordnung

$$\boxed{\text{topologische Räume}} \longrightarrow \boxed{\text{Gruppen}},$$

die es erlaubt, topologisch unterschiedliche Räume zu unterscheiden, aber auf hömoomorphen Räumen dasselbe Ergebnis liefert. Diese Zuordnung sollte effizient berechenbar sein und für nicht zu komplizierte topologische Räume ebensolche Gruppen liefern.

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 55-01.

Vielen Dank an Tobias Retzlaff, Colin Stastny und Mark Urupin für Korrekturen.

- Wir haben mit Hilfe der Fundamentalgruppe Räume und Wege unterscheiden können, beispielsweise Wege in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$  oder kombinatorische Graphen.
- Zweidimensionale kompakte Flächen konnten wir mit Hilfe der Fundamentalgruppe sogar klassifizieren, d. h. wir konnten Modellflächen angeben und mit Hilfe ihrer Fundamentalgruppen untersuchen, so dass jede solche Fläche zu einer dieser Modellflächen homöomorph ist.
- Die Dimension eines Raumes (bei der der Zielraum keine Gruppe ist) erlaubt es, Räume zu unterscheiden. Aus der Analysis ist bekannt, dass offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  und des  $\mathbb{R}^m$  nur für  $m = n$  diffeomorph sind. Wir werden sehen, dass dies auch für Homöomorphismen richtig ist.
- Wir werden Existenzsätze beweisen, beispielsweise, dass jede stetige Selbstabbildung von  $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$  einen Fixpunkt besitzt.
- In der Variationsrechnung ist es häufig nützlich, Minima in einer Homotopieklasse zu suchen, wenn globale Minima trivial sind, beispielsweise bei geschlossenen Kurven in einer Mannigfaltigkeit, wenn wir das Längenfunktional minimieren.
- Klassifiziere alle geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten (Thurston).
- Eine geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  mit  $\pi_1(M) \cong \{0\}$  ist homöomorph zu  $\mathbb{S}^3$  (Poincaré, Hamilton, Perelman).
- ...

## 1. MOTIVATION HOMOLOGIE

Wir haben gesehen (Topologie Vorlesung), dass die Fundamentalgruppe es erlaubt, topologische Räume „niederer Dimension“ zu unterscheiden. Allerdings hängt die Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes nur von seinem 2-Skelett ab. Als höherdimensionale Verallgemeinerung der Fundamentalgruppe  $\pi_1(X)$ , bei der Abbildungen  $\mathbb{S}^1 \rightarrow X$  betrachtet werden, kann man höhere Homotopiegruppen  $\pi_k(X)$ , bei denen man Homotopieklassen von Abbildungen  $\mathbb{S}^k \rightarrow X$  betrachtet, berechnen. Diese ermöglichen es beispielsweise, Sphären unterschiedlicher Dimension zu unterscheiden, sind aber im allgemeinen kompliziert zu berechnen.

Homologiegruppen erlauben es ebenfalls, beispielsweise Sphären unterschiedlicher Dimension zu unterscheiden, sind aber im allgemeinen einfacher als Homotopiegruppen zu berechnen.

**1.1. Beispiele.** Sei  $X_1$  ein Graph, der aus zwei Ecken  $x$  und  $y$  und vier gerichteten Kanten  $a, b, c$  und  $d$  besteht, die jeweils von  $x$  nach  $y$  laufen. Dann ist  $\pi_1(X_1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ . Wir machen nun  $\pi_1(X_1)$  künstlich abelsch. Damit werden  $ab^{-1}$  und  $b^{-1}a$  gleich. Während  $ab^{-1}$  ein Weg von  $x$  nach  $x$  ist, ist  $b^{-1}a$  ein Weg von  $y$  nach  $y$ . Wege bei denen Anfangs- und Endpunkt festgelegt sind, werden also zu geschlossenen Wegen mit beliebigen Anfangs- und Endpunkten, zu **Zykeln**.

Wir schreiben die erhaltene Gruppe nun additiv, also beispielsweise  $a - b + c - d$ . Wir nennen dies **Ketten** von Kanten. Manchmal gibt es mehrere Zerlegungen in geschlossene Wege, z. B. gilt  $(a - c) + (b - d) = (a - d) + (b - c)$ . Diese unterscheiden wir nicht. Wir nennen nun allgemeiner einen Zykel eine Summe von Kanten, für die es mindestens eine solche Zerlegung in geschlossene Wege gibt.

Eine Kette  $ka + lb + mc + nd$  mit  $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$  ist genau dann ein Zykel, falls jede Ecke genau so oft betreten wie verlassen wird (Kleine Übung). In unserem Fall

ist die Anzahl, wie oft  $y$  betreten (positiv gezählt) und verlassen (negativ gezählt) wird, gerade  $k + l + m + n$ . Für  $x$  erhalten wir entsprechend  $-k - l - m - n$ . Somit ist  $ka + lb + mc + nd$  genau dann ein Zykel, falls  $k + l + m + n = 0$  gilt.

Sei nun etwas allgemeiner  $C_1$  die freie abelsche Gruppe, die von den Kanten  $a, b, c, d$  erzeugt wird und  $C_0$  die freie abelsche Gruppe, die von den Ecken  $x$  und  $y$  erzeugt wird. Elemente von  $C_1$  sind dann Ketten von Kanten oder 1-dimensionale Ketten und Elemente von  $C_0$  sind Ketten von Punkten oder 0-dimensionale Ketten. Wir definieren nun einen Homomorphismus  $\partial : C_1 \rightarrow C_0$ , indem wir jede der vier Kanten  $a, b, c, d$  in unserem Beispiel auf  $y - x$  abbilden, also auf den Endpunkt des Weges minus den Anfangspunkt des Weges. Daher gilt

$$\partial(ka + lb + mc + nd) = (k + l + m + n)y - (k + l + m + n)x$$

und somit sind die Zykel gerade die Elemente in  $\ker \partial$ . Man überlegt sich, dass  $a - b, b - c$  und  $c - d$  eine Basis für den Kern von  $\partial$  bilden. Somit ist jeder Zykel in  $X_1$  eine Linearkombination von diesen drei Zykeln. Diese Zykel entsprechen gerade den drei „Löchern“ in  $X_1$ .

Kleben wir nun entlang  $a - b$  eine 2-Zelle  $A$  ein, so erhalten wir einen neuen Komplex:  $X_2$ . Ist  $A$  geeignet orientiert, so ist  $a - b$  gerade der Rand der 2-Zelle  $A$ . Damit wird  $a - b$  zusammenziehbar, also homotop trivial. Dies legt es nahe, aus der Gruppe der Zykel für  $X_1$  die von  $a - b$  erzeugte Untergruppe herauszudividieren. Damit werden in dieser neuen Gruppe insbesondere  $a - c$  und  $b - c$  gleich, was der Tatsache entspricht, dass sie in  $X_2$  homotop zueinander sind.

Sei nun  $C_2$  die unendliche zyklische von  $A$  erzeugte Gruppe. Wir definieren  $\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$  durch  $\partial_2(A) = a - b$ . Den Gruppenhomomorphismus, der hier  $\partial$  im Beispiel  $X_1$  entspricht, wollen wir mit  $\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$  bezeichnen. Wir erhalten ein Paar von Homomorphismen

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0.$$

Wir interessieren uns nun für  $\ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$ , also für die 1-dimensionalen Zykel modulo der Zykel, die Ränder von 2-Zellen sind. Dies ist die **Homologiegruppe**  $H_1(X_2)$ .

Wir können nun weiter höherdimensionale Zellen in  $X_2$  hineinkleben und  $\partial_i$  entsprechende Randoperatoren definieren. Dies funktioniert wie folgt.

Zu einem Zellkomplex  $X$  definieren wir Kettengruppen  $C_n(X)$  als freie abelsche Gruppen, die von den  $n$ -Zellen von  $X$  als Basis erzeugt werden. Wir definieren geeignete Randabbildungen  $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  und erhalten Homologiegruppen  $H_n(X) = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}$ . Insbesondere sind also die Randabbildungen  $\partial_n$  noch geeignet zu definieren.

Wir werden im Folgenden Homologie zunächst für Komplexe und danach für allgemeine topologische Räume definieren. Simpliciale und Singuläre Homologie wurden von Eilenberg und Zilber um 1944/1950 herum eingeführt.

## 2. SIMPLIZIALE HOMOLOGIE

**2.1.  $\Delta$ -Komplexe.** Hierfür und für sehr ähnliche Konstruktionen gibt es in der Literatur unterschiedliche Bezeichnungen, z. B. (semi-)simpliciale Komplexe.

Wir haben gesehen (Topologie Vorlesung), dass wir geschlossene orientierbare Flächen (bis auf Homöomorphismen) erhalten, indem wir Kanten an Dreiecken identifizieren. Dies wird hier nun verallgemeinert.

**Definition 2.1** (Simplex). Seien  $v_0, \dots, v_n$  Punkte in  $\mathbb{R}^m$ , die nicht in einer affinen Ebene mit Dimension  $< n$  liegen, d. h. die Vektoren  $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$  sollen linear unabhängig sein. Dann ist die konvexe Hülle dieser Punkte,  $[v_0, \dots, v_n]$ , ein  $n$ -Simplex und  $v_i$  sind die Ecken des Simplexes (oder Simplexes?). Das **Standard  $n$ -Simplex** ist gegeben durch

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ und } t_i \geq 0 \text{ für alle } i \right\}.$$

Wir unterscheiden Simplexes je nach Reihenfolge der Ecken.

Wir erhalten einen kanonischen linearen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \Delta^n &\rightarrow [v_0, \dots, v_n], \\ (t_0, \dots, t_n) &\mapsto \sum_{i=0}^n t_i v_i. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $t_i$  heißen **baryzentrische Koordinaten** des Punktes

$$\sum_{i=0}^n t_i v_i \in [v_0, \dots, v_n].$$

Lassen wir eine der  $(n+1)$  Ecken eines  $n$ -Simplexes  $[v_0, \dots, v_n]$  weg, so erzeugen die restlichen  $n$  Ecken ein  $(n-1)$ -Simplex, eine **Seite** von  $[v_0, \dots, v_n]$ . Wir wollen dabei die Ecken in der Seite eines Simplexes immer so anordnen, wie sie im Simplex angeordnet waren. Wir schreiben für die Seite, die wir erhalten, wenn wir die Ecke  $v_i$  weglassen,  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  oder  $[v_0, \dots, v_{n-1}, v_{n+1}, \dots, v_n]$ .

Die Vereinigung aller Seiten eines Simplexes  $\Delta^n$  heißt **Rand** von  $\Delta^n$ , wir schreiben  $\partial\Delta^n$ . Das offene Simplex  $\dot{\Delta}^n$  ist das „Innere“ von  $\Delta^n$ ,  $\Delta^n \setminus \partial\Delta^n$ .

**Definition 2.2.** Eine  **$\Delta$ -Komplex Struktur** auf einem topologischen Raum  $X$  ist eine Familie von stetigen Abbildungen  $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$ , wobei  $n$  von  $\alpha$  abhängt, so dass

- (i) Die Einschränkung  $\sigma_\alpha|_{\dot{\Delta}^n}$  ist injektiv und jeder Punkt in  $X$  liegt im Bild von genau einer solchen Einschränkung  $\sigma_\alpha|_{\dot{\Delta}^n}$ .
- (ii) Jede Einschränkung von  $\sigma_\alpha$  auf eine Seite von  $\Delta^n$  ist eine der Abbildungen  $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \rightarrow X$ . Hierbei identifizieren wir eine Seite von  $\Delta^n$  mit  $\Delta^{n-1}$  vermöge des kanonischen linearen Isomorphismusses zwischen ihnen, der die Reihenfolge der Eckpunkte erhält.
- (iii) Eine Menge  $A \subset X$  ist genau dann offen, wenn  $\sigma_\alpha^{-1}(A)$  für alle  $\sigma_\alpha$  in  $\Delta^n$  offen ist.

$X$  heißt  **$\Delta$ -Komplex**. Die Abbildungen  $\sigma_\alpha$  werden auch als **charakteristische Abbildungen** bezeichnet.

**Bemerkung 2.3.** Die üblichen Zerlegungen von Torus oder Kleinscher Flasche mit geeigneter Nummerierung der Ecken liefern gerade eine  $\Delta$ -Komplex Struktur.

Die letzte Bedingung schließt Trivialitäten aus wie beispielsweise, dass wir  $X$  als Vereinigung seiner Punkte darstellen.

Die letzte Bedingung sichert weiterhin, dass  $X$  (bis auf einen Homöomorphismus) ein Quotientenraum von einer Familie von disjunkten Simplexes  $\Delta_\alpha^n$  ist. Wir nehmen ein Simplex  $\Delta_\alpha^n$  für jede Abbildung  $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$  und betrachten den Quotientenraum, indem wir jede Seite von  $\Delta_\alpha^n$  mit dem Simplex  $\Delta_\beta^{n-1}$  identifizieren,

der in der zweiten Bedingung auftaucht,  $\sigma_\beta$  ist also gerade die Einschränkung von  $\sigma_\alpha$  auf die entsprechende Seite.

Wir können einen  $\Delta$ -Komplex induktiv aufbauen, indem wir an Punkte 1-Simplizes, 2-Simplizes, ... ankleben. Auf diese Weise sehen wir, dass wir einen  $\Delta$ -Komplex rein kombinatorisch als Familie von  $n$ -Simplizes  $\Delta_\alpha^n$  für alle  $n$  mit Abbildungen von einer Seite eines  $n$ -Simplizes  $\Delta_\alpha^n$  auf ein  $(n-1)$ -Simplex  $\Delta_\beta^{n-1}$  beschreiben können.

Nach Definition eines  $\Delta$ -Komplexes sind diese Abbildungen affin linear.

*Aufgaben.*

**Aufgabe 2.1.** Sei  $X$  ein CW-Komplex. Sei  $X_k$  das  $k$ -Skelett von  $X$ . Dann induziert die Abbildung  $i : X_k \hookrightarrow X$  einen Gruppenhomomorphismus  $i_* : \pi_1(X_k) \rightarrow \pi_1(X)$ . Zeige, dass  $i_*$  für  $k = 1$  surjektiv und für  $k \geq 2$  ein Isomorphismus ist.

**Aufgabe 2.2.** Zeige, dass die folgenden Räume CW-Komplexe sind, bzw. eine  $\Delta$ -Komplex Struktur besitzen:  $\mathbb{T}^2$ ,  $\mathbb{S}^2$ , die Kleinsche Flasche,  $\mathbb{R}P^2$ .

**Aufgabe 2.3.** Zeige, dass es eine stetige surjektive Abbildung  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^3$  gibt und gib ein Beispiel für solch eine Abbildung an, die kein Homöomorphismus ist (oder beweise, dass keine solche Abbildung ein Homöomorphismus ist).

**Aufgabe 2.4.** Untersuche, welche der folgenden Räume zueinander homöomorph bzw. homöomorph zu einem Teilraum sind:

$\subset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{T}^2$	$\mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}$						
$\mathbb{S}^1$						
$\mathbb{S}^2$						
$\mathbb{R}^2$						
$\mathbb{T}^2$						
$\mathbb{R}^3$						

Einige Fälle kann man mit dem aktuellen Kenntnisstand noch nicht behandeln.

## 2.2. Simpliciale Homologie.

**Definition 2.4.** Sei  $X$  ein  $\Delta$ -Komplex. Sei  $\Delta_n(X)$  die freie abelsche Gruppe, die von den offenen  $n$ -Simplizes  $e_\alpha^n \equiv \dot{\Delta}_\alpha^n$  erzeugt wird. Die Elemente von  $\Delta_n(X)$  heißen  **$n$ -Ketten** und lassen sich als **endliche** formale Summen  $\sum_\alpha n_\alpha e_\alpha^n$  mit Koeffizienten  $n_\alpha \in \mathbb{Z}$  schreiben. Alternativ schreibt man auch  $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$ , wobei  $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$  wie in Definition 2.2 eine charakteristische Abbildung ist.

**Bemerkung 2.5.** Solch eine Summe  $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$  kann man sich als endliche Familie (oder Kette) von  $n$ -Simplizes in  $X$  mit ganzzahligen Vielfachheiten  $n_\alpha$  vorstellen.

Wollen wir auf Simplizes einen Randoperator einführen, so wollen wir dies so machen, dass sich die Orientierung des Simplizes auf seine Seiten vererbt. In niederen Dimensionen erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial[v_0, v_1] &= [v_1] - [v_0], \\ \partial[v_0, v_1, v_2] &= [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1], \\ \partial[v_0, v_1, v_2, v_3] &= [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2]. \end{aligned}$$

Dies legt die folgende Definition nahe.

**Definition 2.6.** Sei  $X$  ein  $\Delta$ -Komplex. Wir definieren einen **Randoperator**  $\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$  durch Festlegung auf Basiselementen  $\sigma_\alpha : \Delta^n \equiv [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$  (und linearer Fortsetzung):

$$\partial_n(\sigma_\alpha) = \sum_i (-1)^i \sigma_\alpha|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n].$$

(Genauer sollte man keine Einschränkung betrachten, sondern mit der affin linearen Abbildung vom Standard- $(n-1)$ -Simplex nach  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  komponieren, die die Ecken der Reihenfolge nach aufeinander abbildet.) Beachte dabei, dass die rechte Seite in  $\Delta_{n-1}(X)$  liegt, da jede Einschränkung  $\sigma_\alpha|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  eine charakteristische Abbildung eines  $(n-1)$ -Simplizes von  $X$  ist.

**Lemma 2.7.** Für  $\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}(X)$  gilt  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ .

*Beweis.* Es gilt

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

und daher

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \partial_n(\sigma) &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j \sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n]. \end{aligned}$$

Diese beiden Summen stimmen aber bis auf das Vorzeichen überein. Daher gilt  $\partial_{n-1} \partial_n(\sigma) = 0$  für alle  $\sigma$  in einer Basis von  $\Delta_n(X)$  und damit folgt die Behauptung aufgrund der Linearität.  $\square$

**Definition 2.8.** Seien  $C_i := \Delta_i(X)$  Gruppen wie oben. Wir definieren  $\partial_0 : C_0 \rightarrow 0$  als die Nullabbildung; gegebenenfalls auch für alle negativen Indices. Dann erhalten wir eine Folge von Homomorphismen abelscher Gruppen

$$\dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Es gilt  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$  für alle  $n$ . Ist eine solche Folge abelscher Gruppen und eine Folge von Homomorphismen mit  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$  gegeben, so heißt eine solche Folge von Homomorphismen abelscher Gruppen **Kettenkomplex**.

Aus  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$  folgt im  $\partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$ . Da die beteiligten Gruppen abelsch sind, können wir den Quotienten bilden. Wir definieren die  $n$ -te **Homologiegruppe** des Kettenkomplexes als die Quotientengruppe  $H_n := \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}$ . Elemente in  $\ker \partial_n$  heißen **Zykel** und Elemente in  $\text{im } \partial_{n+1}$  heißen **Ränder**. Die Nebenklassen von  $\text{im } \partial_{n+1}$  sind die Elemente von  $H_n$  und heißen **Homologieklassen**. Zwei Zykel, die dieselbe Homologiekategorie repräsentieren, heißen **homolog**. Die Differenz zweier homologer Zykel ist daher ein **Rand**, d. h. das Bild einer Kette unter dem Randoperator  $\partial$ .

**Definition 2.9** (Simpliziale Homologie). Ist  $C_n = \Delta_n(X)$ , dann heißt der Quotient  $\ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}$  die  $n$ -te **simpliziale Homologiegruppe** von  $X$  und wird mit  $H_n^\Delta(X)$  bezeichnet.

**Beispiel 2.10.** Sei  $X = \mathbb{S}^1$  mit einer Ecke  $v$  und einer Kante  $e$ . Dann sind  $\Delta_0(\mathbb{S}^1)$  und  $\Delta_1(\mathbb{S}^1)$  beide isomorph zu  $\mathbb{Z}$  und es gilt  $\partial_1(e) = v - v = 0$ . Für  $n \geq 2$  ist  $\Delta_n(\mathbb{S}^1) \cong 0$ , da in diesen Dimensionen keine Simplizes auftreten. Der Kettenkomplex hat damit die Gestalt

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0.$$

Es gilt daher

$$H_n^\Delta(\mathbb{S}^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } n = 0, 1, \\ 0 & \text{für } n \geq 2. \end{cases}$$

Es gilt allgemein, dass die Homologiegruppen eines Kettenkomplexes isomorph zu den Kettengruppen selbst sind, wenn alle Randabbildungen  $\partial$  verschwinden.

**Beispiel 2.11.** Sei  $X = \mathbb{T}^2$  der zweidimensionale Torus mit einer  $\Delta$ -Komplex Struktur bestehend aus zwei Dreiecken  $U$  und  $L$ , die an einer gemeinsamen Kante  $c$  zu einem Quadrat zusammengeklebt sind, zwei weiteren Kanten  $a$  und  $b$ , die jeweils geeignet identifiziert werden und einer Ecke. Es folgt wie im letzten Beispiel, dass  $\partial_1 = 0$  gilt. Somit ist  $\text{im } \partial_1 = 0$  und es folgt  $H_0^\Delta(\mathbb{T}^2) \cong \ker \partial_0 \cong \mathbb{Z}$ . Es gilt  $\partial_2 U = a + b - c = \partial_2 L$ . Nun ist  $\{a, b, a + b - c\}$  eine Basis für  $\Delta_1(\mathbb{T}^2)$ . Daher gilt  $H_1^\Delta(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  und die Homologieklassen  $[a]$  und  $[b]$  bilden eine Basis davon. Da keine 3-Simplizes auftreten, gilt  $H_2^\Delta(\mathbb{T}^2) \cong \ker \partial_2$ . Dieser ist isomorph zu  $\mathbb{Z}$  und besitzt als Basis Elemente der Form  $U - L$ , denn es gilt  $\partial_2(pU + qL) = (p + q)(a + b - c) = 0$  genau dann, wenn  $p = -q$  ist. Wir erhalten also

$$H_n^\Delta(\mathbb{T}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{für } n = 1, \\ \mathbb{Z} & \text{für } n = 0, 2, \\ 0 & \text{für } n \geq 3. \end{cases}$$

**Bemerkung 2.12.** Bisher haben wir uns noch nicht überlegt, ob die Gruppen  $H_n^\Delta(X)$  von der  $\Delta$ -Komplex Struktur auf  $X$  abhängen. Oder allgemeiner: Haben homotopieäquivalente Räume isomorphe simpliziale Homologiegruppen? Diese Fragen wollen wir mit Hilfe der singulären Homologietheorie später beantworten. Wir werden dazu insbesondere zeigen, dass die simplizialen und die singulären Homologiegruppen für  $\Delta$ -Komplexe übereinstimmen.

*Aufgaben.*

**Aufgabe 2.5.**

- Seien  $\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , Homomorphismen abelscher Gruppen. Zeige, dass  $\partial_n \partial_{n+1} = 0 \iff \text{im } \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$  ist.
- Zeige, dass  $H_n := \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}$  wohldefiniert ist.
- Bestimme die Homologiegruppen zu

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

- Bestimme die Homologiegruppen zu

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

wobei in der Mitte die Abbildung  $x \mapsto 2x$  steht.

e) Bestimme die Homologiegruppen zu

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{1}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{p_2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} i_1 : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & p_2 : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}, \\ x &\mapsto (x, 0), & (x, y) &\mapsto y. \end{aligned}$$

f) Bestimme die Homologiegruppen zu

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

g) Untersuche, wann  $H_n \cong 0$  für alle  $n$  gilt.

**Aufgabe 2.6.** Berechne die simpliziale Homologie der Kleinschen Flasche.

**Aufgabe 2.7.** Berechne die simpliziale Homologie der Sphäre  $\mathbb{S}^2$ . Gib für  $\mathbb{S}^k$ ,  $k \geq 2$ , eine  $\Delta$ -Struktur an und berechne die simpliziale Homologie von  $\mathbb{S}^k$ , (zunächst)  $H_n(\mathbb{S}^k)$  mit  $k \leq 3$  und  $H_k(\mathbb{S}^k)$ . Die anderen Homologiegruppen sind nicht so einfach zugänglich.

**Aufgabe 2.8.** Lies und verstehe in deiner Lieblingsquelle die Definition einer freien Gruppe und wie man daraus durch Herausdividieren von Relationen eine freie abelsche Gruppe bekommt. Wieso ist die Beschreibung über Wörter und Relationen zu den Beschreibungen als formal endliche Summe und als direkte Summe von Kopien von  $\mathbb{Z}$  äquivalent. (Dies ist eine Lese- und Verstehaufgabe. Es geht also darum, dass du die Aussagen so gut verstehst, dass du sie in der Übung vortragen kannst, eine schriftliche Abgabe ist nicht nötig, eine mündliche gegenseitige Probeerklärung aber sehr empfohlen.)

**Aufgabe 2.9** (Finaltopologie, Wiederholung). Wiederhole Definition, sowie Eindeutigkeits- und Existenzsatz für die Finaltopologie. Wiederhole ebenso die Definition der Quotiententopologie und die Tatsache, dass  $A \subset X/\sim$  genau dann offen ist, wenn  $\pi^{-1}(A) \subset X$  offen ist, wobei  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  die kanonische Projektion ist. Vergleiche dazu beispielsweise das Skript zur mengentheoretischen Topologie.

### 3. SINGULÄRE HOMOLOGIE

**Definition 3.1.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein **singuläres  $n$ -Simplex** in  $X$  ist per Definition eine stetige Abbildung  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ . („Singulär“ bedeutet hier nur, dass das Bild nicht wie ein Simplex aussehen muss.) Sei  $C_n(X)$  die freie abelsche Gruppe, die als Basis die singulären Simplexe in  $X$  besitzt. Elemente in  $C_n(X)$  heißen (**singuläre**)  **$n$ -Ketten** und sind endliche formale Summen der Form  $\sum_i n_i \sigma_i$ , wobei  $n_i \in \mathbb{Z}$  ist und  $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow X$  stetige Abbildungen sind.

Mit der gleichen Formel wie bei der simplizialen Homologie definieren wir einen Randoperator  $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ :

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}.$$

Auch hier identifizieren wir wieder  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  in kanonischer Weise mit  $\Delta^{n-1}$ , wobei wir die Anordnung der Ecken beibehalten. Vermöge dieser Identifikation können wir  $\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$  als Abbildung  $\Delta^{n-1} \rightarrow X$  betrachten, also als singuläres  $(n-1)$ -Simplex.



Wir schreiben auch  $\partial$  statt  $\partial_n$  für die Abbildung  $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  (genauer: für die Familie  $(\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X))_{n \in \mathbb{N}}$  von Abbildungen), wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind. Lemma 2.7 bleibt samt Beweis wortwörtlich gültig, es gilt also  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$  oder in Kurzschreibweise  $\partial^2 = 0$ .

Daher können wir  $H_n(X) := \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}$  als die  $n$ -te **singuläre Homologiegruppe** definieren.

Beide Definitionen haben Vor- und Nachteile, selbst für  $\Delta$ -Komplexe.

**Bemerkung 3.2.** Unklar ist, ob  $H_n^\Delta$  von Wahl der simplizialen Struktur eines topologischen Raumes abhängt.

Nach Definition stimmen die singulären Homologiegruppen  $H_n$  für homöomorphe Räume überein. Dies war für  $H_n^\Delta$  ebenso nicht klar.

Für die Gruppen  $H_n$  ist nicht offensichtlich, dass sie für einen konkret gegebenen Raum, wie z. B. einen Torus, endlich erzeugt sind. Auch ist in diesem Falle nicht klar, dass nur endlich viele Gruppen  $H_n \neq 0$  sind.

Die singulären Homologiegruppen eines topologischen Raumes  $X$  sind vollständig durch die singulären Homologiegruppen auf den Wegzusammenhangskomponenten von  $X$  bestimmt.

**Proposition 3.3.** *Sei  $X$  ein topologischer Raum, bestehend aus den Wegzusammenhangskomponenten  $X_\alpha$ . Dann sind  $H_n(X)$  und die direkte Summe  $\bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$  isomorph.*

*Beweis.* Das Bild eines Simplexes unter einer stetigen Abbildung ist immer wegzusammenhängend. Daher ist  $C_n(X) \cong \bigoplus_\alpha C_n(X_\alpha)$ . Die Randabbildung erhält diese Zerlegung als direkte Summe,  $C_n(X_\alpha)$  wird nach  $C_{n-1}(X_\alpha)$  abgebildet. Daher lassen sich auch  $\ker \partial_n$  und  $\text{im } \partial_{n+1}$  in direkte Summen zerlegen. Dies überträgt sich schließlich noch auf die Homologiegruppen und somit folgt  $H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$ .  $\square$

**Proposition 3.4.** *Sei  $X \neq \emptyset$  und wegzusammenhängend. Dann gilt  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ . Daher ist für jeden Raum  $X$  die Gruppe  $H_0(X)$  eine direkte Summe von Kopien von  $\mathbb{Z}$  und zwar von einer pro Wegzusammenhangskomponente.*

*Beweis.* Da nach Definition  $\partial_0 = 0$  gilt, folgt  $H_0(X) = C_0(X) / \text{im } \partial_1$ . Wir definieren einen Homomorphismus  $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  durch  $\varepsilon \left( \sum_i n_i \sigma_i \right) = \sum_i n_i$ . Ist  $X \neq \emptyset$ , so ist  $\varepsilon$  surjektiv. Falls wir zeigen können, dass  $\ker \varepsilon = \text{im } \partial_1$  für einen wegzusammenhängenden Raum  $X$  gilt, so folgt die Behauptung, denn dann gilt  $H_0(X) = C_0(X) / \text{im } \partial_1 = C_0(X) / \ker \varepsilon \cong \text{im } \varepsilon = \mathbb{Z}$  ( $\cong$  in dieser Gleichung gilt für beliebige Homomorphismen nach dem Homomorphiesatz).

Wir wollen also  $\ker \varepsilon = \text{im } \partial_1$  beweisen. Sei  $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$  ein singuläres 1-Simplex. Dann gilt  $\varepsilon \partial_1(\sigma) = \varepsilon(\sigma[v_1] - \sigma[v_0]) = 1 - 1 = 0$ . Also gilt  $\text{im } \partial_1 \subset \ker \varepsilon$ . Sei andersherum  $\varepsilon \left( \sum_i n_i \sigma_i \right) = 0$ , also  $\sum_i n_i = 0$ . Die singulären 0-Simplizes  $\sigma_i : \Delta^0 \rightarrow X$  können wir mit ihren Bildpunkten in  $X$  identifizieren. Wähle einen Basispunkt  $x_0 \in X$ . Sei  $\sigma_0$  das singuläre 0-Simplex mit  $\text{im } \sigma_0 = \{x_0\}$ . Wähle für jedes  $i$  einen Weg  $\tau_i : I \rightarrow X$  von  $x_0$  nach  $\sigma_i(v_0)$ . (Solche Wege existieren, da  $X$  nach Voraussetzung wegzusammenhängend ist.) Wir können jedes  $\tau_i$  als ein singuläres

1-Simplex  $\tau_i : [v_0, v_1] \rightarrow X$  auffassen. Es gilt  $\partial\tau_i = \sigma_i - \sigma_0$ , wobei wir hier  $\tau_i$  als Simplex auffassen. Da nach Voraussetzung  $\sum_i n_i = 0$  gilt, erhalten wir

$$\partial \left( \sum_i n_i \tau_i \right) = \sum_i n_i \sigma_i - \sum_i n_i \sigma_0 = \sum_i n_i \sigma_i.$$

Daher ist  $\sum_i n_i \sigma_i$  ein Rand (Bild unter  $\partial_1$ ) und es folgt  $\ker \varepsilon \subset \text{im } \partial_1$ .  $\square$

**Proposition 3.5.** *Sei  $X$  ein Punkt, dann gilt*

$$H_n(X) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } n > 0, \\ \mathbb{Z} & \text{für } n = 0. \end{cases}$$

*Beweis.* In diesem Falle gibt es in jeder Dimension nur ein eindeutig bestimmtes  $n$ -dimensionales Simplex  $\sigma_n$  und es gilt  $\partial(\sigma_n) = \sum_i (-1)^i \sigma_{n-1}$ . Da ein  $n$ -Simplex  $n+1$  Seiten besitzt, treten  $n+1$  Summanden auf. Somit gilt

$$\partial(\sigma_n) = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } n, \\ \sigma_{n-1} & \text{für gerades } n \geq 2, \\ 0 & \text{für } n = 0. \end{cases}$$

Wir erhalten also den folgenden Kettenkomplex

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0.$$

Daher folgt für die Homologiegruppen

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\square$

Mit der folgenden Definition von reduzierten Homologiegruppen ist die Homologie eines Punktes in jeder Dimension trivial.

**Definition 3.6.** Wir definieren die **reduzierten Homologiegruppen**  $\tilde{H}_n(X)$  als die Homologiegruppen des erweiterten Kettenkomplexes

$$\dots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

wobei  $\varepsilon \left( \sum_i n_i \sigma_i \right) = \sum_i n_i$  wie im Beweis von Proposition 3.4 ist. Wir wollen annehmen, dass  $X \neq \emptyset$  ist, damit wir keine nichttriviale Homologiegruppe in Dimension  $-1$  erhalten.

**Bemerkung 3.7.** Es gilt  $\varepsilon\partial_1 = 0$ ,  $\varepsilon$  verschwindet also auf  $\text{im } \partial_1$  und somit induziert  $\varepsilon$  eine Abbildung  $H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Nach Definition von  $\tilde{H}_0(X)$  ist  $\tilde{H}_0(X)$  gerade der Kern der von  $\varepsilon$  induzierten Abbildung. Da  $\varepsilon$  für  $X \neq \emptyset$  surjektiv ist, d. h.  $\text{im } \varepsilon = \mathbb{Z}$  gilt, folgt  $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ . Nach Definition der reduzierten Homologiegruppen ist klar, dass  $H_n(X) \cong \tilde{H}_n(X)$  für  $n > 0$  gilt.

Formal erhält man das  $\mathbb{Z}$  im erweiterten Kettenkomplex als die von der eindeutig bestimmten Abbildung  $[\emptyset] \rightarrow X$  erzeugte Gruppe, wobei  $[\emptyset]$  der leere Simplex ohne Ecken ist. Dann ist  $\varepsilon$  gerade der übliche Randoperator, denn es gilt  $\partial[v_0] = [v_0] = [\emptyset]$ .

*Aufgaben.*

**Aufgabe 3.1.** Lies und verstehe [2, Theorem 2A.1]

**Aufgabe 3.2.** Seien  $X$  und  $Y$  homöomorphe topologische Räume. Dann gilt

$$H_n(X) \cong H_n(Y)$$

für alle  $n$ .

#### 4. HOMOTOPIEINVARIANZ

Wir wollen zeigen, dass homotopieäquivalente Räume isomorphe Homologiegruppen haben. Dazu zeigen wir zunächst, dass eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  einen Homomorphismus  $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  für alle  $n$  erzeugt und dass  $f_*$  ein Isomorphismus ist, wenn  $f$  eine Homotopieäquivalenz ist.

**Definition 4.1.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Dann induziert  $f$  eine Abbildung  $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  vermöge  $f_{\#}(\sigma) = f \circ \sigma : \Delta^n \rightarrow Y$  für singuläre  $n$ -Simplizes  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ . (Genauer müsste man eigentlich von unterschiedlichen Abbildungen sprechen, etwa  $f_{\#}^n : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ . Wie bei den Randabbildungen verzichten wir aber auch hier auf diesen Index.) Wir setzen  $f_{\#}$  linear fort:

$$f_{\#} \left( \sum_i n_i \sigma_i \right) = \sum_i n_i f_{\#}(\sigma_i) = \sum_i n_i (f \circ \sigma_i).$$

**Bemerkung 4.2.** Die Abbildungen  $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  erfüllen  $f_{\#} \circ \partial = \partial \circ f_{\#}$ , denn es gilt

$$\begin{aligned} f_{\#} \partial(\sigma) &= f_{\#} \left( \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \right) \\ &= \sum_i (-1)^i (f \circ \sigma)|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \\ &= \partial f_{\#}(\sigma). \end{aligned}$$

**Definition 4.3.** Wir nennen ein Diagramm von Abbildungen ein **kommutatives Diagramm**, wenn man Elemente eines Objektes mit Hilfe der gegebenen Pfeile (Abbildungen) auf ein anderes Objekt abbildet und dabei das Ergebnis unabhängig von der gewählten (endlichen) Folge von Pfeilen ist.

**Bemerkung 4.4.** Nach Bemerkung 4.2 ist das folgende Diagramm also kommutativ

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \\ \dots & \longrightarrow & C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(Y) & \longrightarrow & \dots \end{array},$$

was in diesem Falle äquivalent zu  $f_{\#} \partial = \partial f_{\#}$  ist.

Die folgende Definition und das nachfolgende Lemma sind rein algebraisch.

**Definition 4.5.** Seien  $((C_n), (\partial_n))$  und  $((K_n), (d_n))$  Kettenkomplexe. Dann ist eine Familie von Gruppenhomomorphismen  $(f_n)$  mit  $f_n : C_n \rightarrow K_n$  eine **Abbildung von Kettenkomplexen** oder **Kettenabbildung**, falls  $f_{n-1} \partial_n = d_n f_n$  für jedes  $n$  gilt.

**Lemma 4.6.** *Sei  $f$  eine Abbildung von Kettenkomplexen. Dann induziert  $f$  einen Homomorphismus zwischen den Homologiegruppen der beiden Kettenkomplexe.*

*Beweis.* Sei  $\alpha$  in  $\ker \partial$ . Dann ist auch  $f\alpha \in \ker \partial$ , denn es gilt  $\partial f\alpha = f\partial\alpha = f(0) = 0$ . Zwei Repräsentanten einer Homologiekategorie unterscheiden sich um einen Rand  $\partial\beta$ . Daher ist nachzuweisen, dass  $f\partial\beta$  wieder ein Rand ist. Dies folgt aber ebenso aus  $f\partial = \partial f$ .  $\square$

**Beispiel 4.7.** Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Dann ist  $f_{\#}$  nach Bemerkung 4.2 eine Abbildung von Kettenkomplexen. Nach Lemma 4.6 induziert  $f_{\#}$  nun eine Abbildung  $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ .

Das folgende Lemma zeigt, dass es sich beim Übergang zu den induzierten Abbildungen zwischen Homologiegruppen um einen Funktor handelt.

**Lemma 4.8.** *Seien  $X, Y$  und  $Z$  topologische Räume,  $g : X \rightarrow Y$  und  $f : Y \rightarrow Z$  stetige Abbildungen,  $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ . Seien  $\mathbf{1} : X \rightarrow X$  und  $\mathbf{1} : H_n(X) \rightarrow H_n(X)$  die jeweiligen Identitäten. Dann gilt*

- (i)  $(fg)_* = f_*g_*$ .
- (ii)  $\mathbf{1}_* = \mathbf{1}$ .

*Beweis.* Die erste Behauptung folgt aus der Assoziativität bei der Komposition

$$\Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z.$$

Der zweite Teil ist offensichtlich.  $\square$

Der Hauptsatz dieses Abschnittes ist

**Theorem 4.9.** *Seien  $f, g : X \rightarrow Y$  zwei homotope Abbildungen, dann gilt  $f_* = g_*$  für die induzierten Homomorphismen  $f_*, g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ .*

Hieraus folgt wegen Lemma 4.8

**Korollar 4.10.** *Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz. Dann sind die Abbildungen  $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  für alle  $n$  Isomorphismen.*

*Ist  $X$  kontrahierbar, so gilt  $\tilde{H}_n(X) \cong 0$ .*

*Beweis von Theorem 4.9.* Wir unterteilen für den Beweis  $\Delta^n \times I$  in  $(n+1)$ -Simplizes. Seien  $\Delta^n \times \{0\} = [v_0, \dots, v_n]$  und  $\Delta^n \times \{1\} = [w_0, \dots, w_n]$ . Hierbei wählen wir die Ecken  $v_i$  und  $w_i$  so, dass  $v_i$  und  $w_i$  unter der Projektionsabbildung  $\Delta^n \times I \rightarrow \Delta^n$  dasselbe Bild haben. Wir betrachten nun eine Folge von Simplizes der Form  $[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$ . Der  $n$ -Simplex  $[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$  ist der Graph der Funktion  $\varphi_i : \Delta^n \rightarrow I$ , wobei  $\varphi_i$  in baryzentrischen Koordinaten durch

$$\varphi_i(t_0, \dots, t_n) = t_{i+1} + \dots + t_n$$

gegeben ist. Die Ecken des Simplizes  $[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$  sind nämlich im Graph enthalten, die Funktion  $\varphi_i$  ist affin linear und unter der Projektionsabbildung  $\Delta^n \times I \rightarrow \Delta^n$  wird  $[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$  homöomorph auf  $\Delta^n$  abgebildet. Da  $\varphi_i \leq \varphi_{i-1}$  ist, liegt graph  $\varphi_i$  unter graph  $\varphi_{i-1}$ . Dazwischen liegt ein  $(n+1)$ -Simplex  $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ , da  $w_i \notin [v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$ . Entsprechend der Ungleichungskette  $0 = \varphi_n \leq \varphi_{n-1} \leq \dots \leq \varphi_0 \leq \varphi_{-1} = 1$  sehen wir, dass  $\Delta^n \times I$  die

Vereinigung der  $(n+1)$ -Simplizes  $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$  ist, wobei aufeinanderfolgende Simplizes jeweils ein  $n$ -Simplex als gemeinsame Seite haben.

Sei nun  $F : X \times I \rightarrow Y$  eine Homotopie von  $f$  zu  $g$ . Wir wollen zeigen, dass  $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  und  $g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  übereinstimmen. Definiere einen **Prismenoperator**  $P : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$  durch

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i F \circ (\sigma \times \mathbf{1}) | [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$$

für  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ . ( $F \circ (\sigma \times \mathbf{1})$  ist hierbei die Komposition  $\Delta^n \times I \rightarrow X \times I \rightarrow Y$ .) Der Prismenoperator erfüllt die Identität

$$(4.1) \quad \partial P = g_{\#} - f_{\#} - P\partial.$$

Dies kann man geometrisch (auf der linken Seite) als Rand des Prismas und (auf der rechten Seite) als Oberseite  $\Delta^n \times \{1\}$ , Unterseite  $\Delta^n \times \{0\}$  und Seiten  $\partial\Delta^n \times I$  des Prismas verstehen. Zum Beweis von (4.1) berechnen wir

$$\begin{aligned} \partial P(\sigma) &= \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \mathbf{1}) | [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] \\ &\quad + \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times \mathbf{1}) | [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n] \\ &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \mathbf{1}) | [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times \mathbf{1}) | [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n] \\ &\quad + F \circ (\sigma \times \mathbf{1}) | [\hat{v}_0, w_0, \dots, w_n] \\ &\quad - F \circ (\sigma \times \mathbf{1}) | [v_0, \dots, v_n, \hat{w}_n] \\ &= - \sum_{i > j} (-1)^{i-1} (-1)^j F \circ (\sigma \times \mathbf{1}) | [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] \\ &\quad - \sum_{i < j} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \mathbf{1}) | [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n] \\ &\quad + F \circ (\sigma \times \mathbf{1}) | [\hat{v}_0, w_0, \dots, w_n] - F \circ (\sigma \times \mathbf{1}) | [v_0, \dots, v_n, \hat{w}_n] \\ &= - P\partial(\sigma) + g \circ \sigma - f \circ \sigma \\ &= - P\partial(\sigma) + g_{\#}(\sigma) - f_{\#}(\sigma). \end{aligned}$$

In dieser letzten Rechnung haben wir folgendes benutzt: Die Terme mit  $i = j$  bilden eine Teleskopsumme, von der nur die äußersten beiden Terme übrigbleiben. Auf der zu den  $w_i$ 's gehörenden Oberseite ist  $F$  gerade  $g$  und auf der zu den  $v_i$ 's gehörenden Unterseite gerade  $f$ . Die Summen über  $j$  ergeben am Ende gerade den Randoperator.

Wir benutzen nun (4.1) um zu zeigen, dass  $f_* = g_*$  gilt. Sei  $\alpha \in C_n(X)$  ein Zykel, also  $\partial\alpha = 0$ . Dann gilt  $g_{\#}(\alpha) - f_{\#}(\alpha) = \partial P(\alpha) + P\partial(\alpha) = \partial P(\alpha)$ . Also ist  $g_{\#}(\alpha) - f_{\#}(\alpha)$  ein Rand (nämlich von  $P(\alpha)$ ). Damit sind  $f_{\#}(\alpha)$  und  $g_{\#}(\alpha)$  Repräsentanten derselben Homologiekategorie und somit ist  $f_*([\alpha]) = g_*([\alpha])$  ( $[\alpha]$  ist die Homologiekategorie von  $\alpha$ ).  $\square$

Der letzte Teil des Beweises legt die folgende algebraische Proposition, Proposition 4.12, nahe. Den Beweis dazu erhalten wir direkt aus den obigen Überlegungen. Für die Formulierung der Proposition benötigen wir die folgende

**Definition 4.11.** Seien  $A, B$  Kettenkomplexe. Seien  $f_n : A_n \rightarrow B_n$  und  $g_n : A_n \rightarrow B_n$  Kettenabbildungen. Ein Operator  $P_n : A_n \rightarrow B_{n+1}$  heißt **Kettenhomotopie** zwischen den Abbildungen  $f$  und  $g$ , falls er ein Gruppenhomomorphismus ist und falls  $\partial P + P\partial = g - f$  (genauer:  $\partial_{n+1}^B P_n + P_{n-1} \partial_n^A = g_n - f_n$ ) gilt.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\partial} & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^A} & A_n & \xrightarrow{\partial_n^A} & A_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \dots \\
 & & \downarrow g_{n+1} & & \downarrow g_n & & \downarrow g_{n-1} & & \\
 & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\
 & & \downarrow P_n & & \downarrow P_{n-1} & & \downarrow P_{n-2} & & \\
 \dots & \xrightarrow{\partial} & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^B} & B_n & \xrightarrow{\partial_n^B} & B_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \dots
 \end{array}$$

**Proposition 4.12.** Kettenhomotope Kettenabbildungen induzieren dieselben Homomorphismen zwischen den zugehörigen Homologiegruppen.

*Aufgaben.*

**Aufgabe 4.1.** Beweise das Fünferlemma. Zusatz: Wie kann man die Voraussetzungen an die vertikalen Pfeile abschwächen?

**Lemma 4.13** (Fünferlemma). Sei

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\
 A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{l'} & E'
 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm abelscher Gruppen mit exakten Zeilen. Sind die Homomorphismen  $\alpha, \beta, \delta$  und  $\varepsilon$  Isomorphismen, so ist auch  $\gamma$  ein Isomorphismus.

**Aufgabe 4.2.** Zeige dass die Kettenhomotopie von Kettenabbildungen eine Äquivalenzrelation liefert.

**Aufgabe 4.3.** Sei  $f \simeq g$  für Abbildungen  $f, g : X \rightarrow Y$ . Zeige, dass  $f_*, g_* : \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(Y)$  für alle  $n$  übereinstimmen,  $f_* = g_*$ .

**Aufgabe 4.4.** Sei  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$  eine exakte Sequenz. Zeige, dass genau dann  $C \cong 0$  ist, wenn  $A \rightarrow B$  surjektiv und  $D \rightarrow E$  injektiv sind.

Sei  $(X, A)$  ein Paar topologischer Räume. Zeige, dass die Inklusionsabbildung  $A \hookrightarrow X$  genau dann für alle  $n$  einen Isomorphismus  $H_n(A) \rightarrow H_n(X)$  induziert, wenn  $H_n(X, A) \cong 0$  für alle  $n$  gilt.

**Aufgabe 4.5.** Zeige, dass die simplizialen Homologiegruppen  $H_n^\Delta$  von  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  und  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$  in jeder Dimension isomorph sind. Zeige weiterhin, dass diese beiden Räume jedoch nicht homöomorph und sogar nicht homotopieäquivalent sind.

## 5. EXAKTE SEQUENZEN UND AUSSCHNEIDUNGEN

Naiv könnte man hoffen, dass für  $A \subset X$  auch  $H_n(A) \subset H_n(X)$  bis auf Isomorphie gilt. Dies kann nicht richtig sein, denn jeder Raum  $X$  ist im Kegel über  $X$ ,  $\mathcal{C}X := (X \times I)/(X \times \{0\})$ , enthalten und jeder solche Kegel ist kontrahierbar.

Stattdessen bekommen wir für  $A \subset X$  Beziehungen zwischen den Gruppen  $H_n(X)$ ,  $H_n(A)$  und  $H_n(X/A)$ .

**Definition 5.1.** Sei

$$\dots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \dots$$

eine Folge von Gruppen und (Gruppen-)Homomorphismen. Dann heißt diese Folge (oder Sequenz) exakt, falls  $\ker \alpha_n = \operatorname{im} \alpha_{n+1}$  gilt. (Zunächst ist  $\operatorname{im} \alpha_{n+1} \subset \ker \alpha_n$  äquivalent zu  $\alpha_n \alpha_{n+1} = 0$ . Diese Bedingung kennen wir schon von Kettenkomplexen. Die Bedingung  $\ker \alpha_n \subset \operatorname{im} \alpha_{n+1}$  besagt gerade dass die Homologiegruppen dieses Kettenkomplexes trivial sind.)

**Bemerkung 5.2.**

- (i)  $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$  ist genau dann exakt, wenn  $\ker \alpha = 0$ , wenn also  $\alpha$  injektiv ist.
- (ii)  $A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow 0$  ist genau dann exakt, wenn  $\operatorname{im} \alpha = B$  gilt, wenn also  $\alpha$  surjektiv ist.
- (iii)  $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow 0$  ist nach den vorhergehenden Überlegungen genau dann exakt, wenn  $\alpha$  ein Isomorphismus ist.
- (iv)  $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$  ist genau dann exakt, wenn  $\alpha$  injektiv und  $\beta$  surjektiv sind und wenn  $\ker \beta = \operatorname{im} \alpha$  gilt. Also ist  $\operatorname{im} \alpha = \ker \beta$  ein Normalteiler und  $\beta$  induziert einen Isomorphismus  $C \cong B/\operatorname{im} \alpha$  und wenn wir  $A$  mit  $\operatorname{im} \alpha$  identifizieren, erhalten wir  $C \cong B/A$ .

**Definition 5.3.** Ist  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  exakt, so heißt dies eine **kurze exakte Sequenz**.

**Definition 5.4.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $A \subset X$  abgeschlossen und besitze  $A$  eine Umgebung  $U$ , so dass  $A$  Deformationsretrakt von  $U$  ist. Dann heißt  $(X, A)$  ein **gutes Paar**.

**Beispiel 5.5.** Ein Teilkomplex  $A$  eines CW-Komplexes  $X$  ist eine Vereinigung von Zellen von  $X$ , so dass mit jeder Zelle auch deren Abschluss in  $A$  enthalten ist. Äquivalent ist ein Teilkomplex  $A$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , die die Vereinigung von Zellen in  $X$  ist.

Sei  $X$  ein CW-Komplex und  $A$  ein nichtleerer Teilkomplex. Dann ist  $(X, A)$  ein gutes Paar.

*Beweis.* [2, Proposition A.5]. □

**Theorem 5.6.** Sei  $(X, A)$  ein gutes Paar. Sei  $i : A \hookrightarrow X$  die Inklusionsabbildung und  $j : X \rightarrow X/A$  die Projektionsabbildung. Dann gibt es eine Abbildung (Homomorphismus)  $\partial : \tilde{H}_n(X/A) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A)$  (für jedes  $n$ ), so dass die Sequenz

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \\ \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \dots \quad \dots \longrightarrow \tilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

exakt ist. Die Sequenz heißt **lange exakte Homologiesequenz**.

**Bemerkung 5.7.** Den Beweis werden wir später im Zusammenhang mit relativen Homologiegruppen führen und in Proposition 5.29 beenden.

Wir werden die Abbildung  $\partial$  im Beweis konstruieren. Die zugrunde liegende Idee dabei ist, dass  $x \in \tilde{H}_n(X/A)$  sich als Kette  $\alpha$  in  $X$  darstellen lässt, so dass  $\partial\alpha$  ein Zykel in  $A$  ist, dessen Homologieklassse  $\partial x \in \tilde{H}_{n-1}(A)$  ist.

**Korollar 5.8.** *Es gilt*

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n, \\ 0, & i \neq n. \end{cases}$$

*Beweis.* Sei zunächst  $n > 0$ . Sei  $(X, A) = (D^n, \mathbb{S}^{n-1})$ . Dann ist  $(X, A)$  ein gutes Paar und  $X/A$  ist homöomorph zu  $\mathbb{S}^n$ . Es gilt  $\tilde{H}_i(D^n) \cong 0$ , da  $D^n$  kontrahierbar ist. Dann liefert die Exaktheit aus Theorem 5.6, dass die Abbildungen  $\partial : \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$  für  $i > 0$  Isomorphismen sind. Im Falle  $i = 0$  ist  $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^n) \cong 0$ .

Im Falle  $n = 0$  folgt das Korollar aus Proposition 3.3, Proposition 3.5 und Bemerkung 3.7.

Aus den obigen Überlegungen folgt damit die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$  per Induktion nach  $n$ .  $\square$

Wir erhalten die folgende Anwendung, die wir zweidimensional aus  $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$  gefolgert hatten.

**Korollar 5.9** (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Für  $n \geq 1$  ist der Rand  $\partial D^n$  kein Retrakt von  $D^n$ . Daher besitzt jede stetige Abbildung  $f : D^n \rightarrow D^n$  einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Sei  $r : D^n \rightarrow \partial D^n = \mathbb{S}^{n-1}$  eine Retraktion. Sei  $i : \partial D^n \rightarrow D^n$  die Inklusion. Dann gilt  $ri = \mathbf{1}$  auf  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Also ist die Verknüpfung

$$\tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(D^n) \xrightarrow{r_*} \tilde{H}_{n-1}(\partial D^n)$$

die Identität. Da aber  $\tilde{H}_{n-1}(D^n) \cong 0$  ist, sind  $i_*$  und  $r_*$  die Nullabbildungen. Weil  $\tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) = \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$  ist, kann die Nullabbildung nicht die Identität sein. Widerspruch. Somit gibt es keine stetige Retraktion  $r : D^n \rightarrow \partial D^n$ .

(Wir gehen nun wortwörtlich wie im letzten Semester vor, ersetzen aber 2 durch  $n$ .) Falls es eine Abbildung  $f : D^n \rightarrow D^n$  gibt, die keinen Fixpunkt besitzt, definieren wir eine stetige Retraktion von  $D^n$  nach  $\mathbb{S}^{n-1}$ , d. h. eine stetige Abbildung  $r : D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ , so dass  $r|_{\mathbb{S}^{n-1}}$  die Identität ist. Sei  $x \in D^n$ . Definiere  $r(x)$  als den Punkt, in dem eine Halbgerade, die in  $f(x)$  startet und durch  $x$  geht, den Rand  $\partial D^n = \mathbb{S}^{n-1}$  schneidet. Aufgrund der Stetigkeit von  $f$  und der Fixpunktfreiheit ist dies eine stetige Abbildung  $D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ . Nach Definition ist auch klar, dass  $r$  eine Retraktion ist.

Wir erhalten also einen Widerspruch, da wir oben gesehen hatten, dass es keine Retraktion  $r : D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  geben kann.  $\square$

### 5.1. Relative Homologiegruppen.

**Definition 5.10.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ . Sei  $C_n(X, A) := C_n(X)/C_n(A)$ . (Ketten in  $A$  sind also in  $C_n(X, A)$  trivial.) Der Randoperator  $\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  bildet  $C_n(A)$  nach  $C_{n-1}(A)$  ab. Daher induziert  $\partial$  auch auf den



Quotientenräumen einen Randoperator  $\partial : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$ , d. h. ist dort wohldefiniert. Wir erhalten also eine Folge von Abbildungen

$$\dots \longrightarrow C_n(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \dots$$

Diese erfüllen  $\partial^2 = 0$ , denn dies gilt bereits, bevor man zu den Quotientengruppen übergeht. Wir erhalten also einen Kettenkomplex. Definiere die **relativen Homologiegruppen**  $H_n(X, A)$  durch  $H_n(X, A) := \ker \partial / \operatorname{im} \partial$ .

**Bemerkung 5.11.**

- (i) Die Repräsentanten von Elementen in  $H_n(X, A)$  heißen **relative Zykel** und sind repräsentiert durch  $n$ -Ketten  $\alpha \in C_n(X)$ , so dass  $\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$  ist.
- (ii) Ein relativer Zykel repräsentiert durch  $\alpha$  ist in  $H_n(X, A)$  genau dann trivial, wenn er ein **relativer Rand** ist:  $\alpha = \partial\beta + \gamma$  mit  $\beta \in C_{n+1}(X)$  und  $\gamma \in C_n(A)$ . (Dies folgt, da in  $H_n(X, A)$  aus  $C_n(X)$  gerade die Gruppen im  $\partial_{n+1}$  und  $C_n(A)$  herausdividiert werden.)
- (iii) Dies beschreibt gerade, dass  $H_n(X, A)$  die „Homologie von  $X$  modulo  $A$ “ ist.
- (iv)  $C_n(X)/C_n(A)$  ist (bis auf Isomorphie) auch eine Untergruppe von  $C_n(X)$ , mit den singulären Simplizes  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  als Basis, deren Bild nicht vollständig in  $A$  liegt. (Sie lässt sich als Untergruppe auffassen, da ihre Erzeuger als Teilmenge der Erzeuger von  $C_n(X)$  gewählt werden können.) Da diese Untergruppe jedoch nicht unter  $\partial$  abgeschlossen ist (betrachte Simplizes, deren Bild teilweise in  $A$  liegt), betrachten wir die Quotientengruppe  $C_n(X)/C_n(A)$ .

**Theorem 5.12.** *Sei  $(X, A)$  ein Paar topologischer Räume. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz der Form*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow \\ \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow H_{n-1}(X, A) \rightarrow \\ \rightarrow \dots \rightarrow H_0(X, A) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei  $i : C_n(A) \rightarrow C_n(X)$  die von der Inklusion  $A \hookrightarrow X$  induzierte Abbildung und  $j : C_n(X) \rightarrow C_n(X, A)$  die Projektionsabbildung. Dann kommutiert das folgende Diagramm (mit exakten Zeilen)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i} & C_n(X) & \xrightarrow{j} & C_n(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{j} & C_{n-1}(X, A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

nach Definition der Abbildungen  $\partial$ , bzw. nach Bemerkung 4.2 und Definition 5.10. Die Behauptung folgt nun aus dem (rein algebraischen) Theorem 5.14. Wir verwenden dabei die rotierte Form des obigen kommutativen Diagramms.  $\square$

**Definition 5.13.** Eine **kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen**

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

ist ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \xrightarrow{\partial} & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & A_n & \xrightarrow{\partial} & A_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \dots \\
 & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i \\
 \dots & \xrightarrow{\partial} & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & B_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \dots \\
 & & \downarrow j & & \downarrow j & & \downarrow j \\
 \dots & \xrightarrow{\partial} & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

in dem die Zeilen Kettenkomplexe und die Spalten kurze exakte Sequenzen sind. (Die Abbildungen  $i$  und  $j$  sind hier Abbildungen von Kettenkomplexen wie in Definition 4.5.)

**Theorem 5.14.** Sei  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen mit Bezeichnungen wie in Definition 5.13. Seien  $H_n(\cdot) := \ker \partial / \operatorname{im} \partial$  wie üblich für  $\cdot = A, B, C$  die zugehörigen Homologiegruppen. Dann gibt es eine Abbildung  $\partial : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$  für alle  $n$ , so dass

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(B) & \xrightarrow{j_*} & H_n(C) & \xrightarrow{\partial} & \dots \\
 & & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(B) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(C) & \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

eine lange exakte Sequenz von Homologiegruppen ist.

*Beweis.* Zunächst einmal konstruieren wir die Abbildung  $\partial$ . (Dann werden wir die Exaktheit der Sequenz beweisen.)

Die Randabbildung  $\partial$  soll eine Abbildung  $\partial : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$  sein. Sei also  $c \in C_n$  ein Zykel. Da  $j$  surjektiv ist, gibt es ein  $b \in B_n$  mit  $c = j(b)$ . (Beachte, dass es hier zunächst einmal nur darum geht, dem Element  $c \in C_n$  ein Element  $\partial c \in A_{n-1}$  zuzuordnen. Erst später wollen wir uns um die Wohldefiniertheit kümmern.) Aufgrund der Kommutativität des Diagramms in der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen gilt  $j\partial b = \partial j b = \partial c = 0$ , wobei wir ausgenutzt haben, dass  $c = j b$  ist und dass  $c$  ein Zykel ist, also  $\partial c = 0$  erfüllt. Also gilt  $B_{n-1} \ni \partial b \in \ker j$ .

Da die Sequenz exakt ist, gilt  $\operatorname{im} i = \ker j$  und somit finden wir ein  $a \in A_{n-1}$ , so dass  $ia = \partial b$  ist. Das Element  $a$  ist ein Zykel, denn es gilt  $i\partial a = \partial ia = \partial \partial b = 0$  aufgrund der Kommutativität des Diagrammes, wegen  $ia = \partial b$  und da  $\partial^2 = 0$  ist.  $\partial a = 0$  folgt nun, denn  $i$  ist injektiv.

Wir definieren nun  $\partial : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$  durch  $\partial[c] := [a]$ , wobei  $[\cdot]$  die jeweiligen Homologieklassen bezeichnet.

Nachweis der Wohldefiniertheit:

- $a$  ist eindeutig bestimmt durch  $\partial b$ , denn  $i$  ist injektiv.
- Wählt man statt  $b$  ein anderes Element  $b' \in B_n$ , so dass  $j(b') = j(b)$  gilt, so ist  $b' - b \in \ker j = \operatorname{im} i$ . Also gibt es ein  $a' \in A_n$  mit  $b' - b = ia'$  oder  $b' = b + ia'$ . Dann erhält man statt  $a \in A_{n-1}$  das Element  $a + \partial a'$ , denn es

gilt  $i(a + \partial a') = ia + i\partial a' = \partial b + \partial ia' = \partial(b + ia')$  und somit erfüllt  $a + \partial a'$  die oben angegebene Vorschrift, um aus  $b \in B_n$  ein Element  $a \in A_{n-1}$  zu gewinnen. Bei Betrachtung der Homologiegruppen ist aber  $[a] = [a + \partial a']$ , da sich die Repräsentanten nur um ein Element in  $\text{im } \partial$  unterscheiden.

- Sei  $c + \partial c'$  ein anderer Vertreter für die Homologieklassse  $[c]$  mit  $c' \in C_{n+1}$ . Da  $j$  surjektiv ist, finden wir  $b' \in B_{n+1}$  mit  $jb' = c'$ . Dann gilt  $c + \partial c' = c + \partial jb' = c + j\partial b' = j(b + \partial b')$  aufgrund der Kommutativität des Diagramms. Also wird  $b$  in der obigen Konstruktion durch  $b + \partial b'$  ersetzt, aber  $\partial b = \partial(b + \partial b')$  wegen  $\partial^2 = 0$  und somit sind wir in  $B_{n-1}$  wieder bei  $\partial b$ , was auch wieder dasselbe  $a \in A_{n-1}$  liefert.

Die Abbildung  $\partial : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$  ist ein Homomorphismus, denn wenn  $\partial[c_1] = [a_1]$  und  $\partial[c_2] = [a_2]$  vermöge  $b_1$  bzw.  $b_2$  gelten, dann ist  $j(b_1 + b_2) = jb_1 + jb_2 = c_1 + c_2$  und  $i(a_1 + a_2) = ia_1 + ia_2 = \partial b_1 + \partial b_2 = \partial(b_1 + b_2)$ . Somit gilt auch  $\partial([c_1] + [c_2]) = [a_1] + [a_2]$ . Hier haben wir (öfters) benutzt, dass wir schon wissen, dass alle Abbildungen, außer der neu konstruierten Randabbildung  $\partial$ , Homomorphismen sind.

Nun wollen wir nachrechnen, dass die angegebene Sequenz (an jeder Stelle) exakt ist.

$$H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B)$$

Es sind die folgenden sechs Inklusionen nachzurechnen:

- $\text{im } i_* \subset \ker j_*$ : Es gilt  $ji = 0$ , da das Diagramm exakt ist. Somit gilt auch  $j_*i_* = 0$  und die Behauptung folgt.
- $\text{im } j_* \subset \ker \partial$ : Sei  $b$  ein Zykel. Dann ist  $j_*[b]$  ein beliebiges Element in  $\text{im } j_*$  und es gilt  $\partial^B b = 0$ . Somit ist nach Definition  $a = 0$  in der Konstruktion von  $\partial$  und die Behauptung folgt.
- $\text{im } \partial \subset \ker i_*$ : Mit den Bezeichnungen aus der Konstruktion von  $\partial$  gilt  $i_*\partial[c] = [\partial b] = 0$ , da in  $H_*(B)$  Äquivalenzklassen modulo  $\text{im } \partial$  betrachtet werden.
- $\ker j_* \subset \text{im } i_*$ : Nach Definition besitzt eine Homologieklassse in  $\ker j_*$  als Vertreter einen Zykel  $b \in B_n$ , so dass  $jb$  ein Rand ist (und daher  $j_*[b] = 0$  gilt). Also gibt es  $c' \in C_{n+1}$  mit  $\partial c' = jb$ . Da  $j$  surjektiv ist, finden wir  $b' \in B_{n+1}$ , so dass  $c' = j(b')$  gilt. Es gilt  $\partial jb' = \partial c' = jb$  und daher folgt  $j(b - \partial b') = jb - j\partial b' = jb - \partial jb' = 0$ . Also ist  $b - \partial b' \in \ker j = \text{im } i$  aufgrund der Exaktheit der kurzen exakten Sequenzen. Daher gibt es  $a \in A_n$  mit  $ia = b - \partial b'$ . Es gilt  $i\partial a = \partial ia = \partial(b - \partial b') = \partial b = 0$ , da  $b$  ein Zykel ist. Nun ist  $i$  injektiv und daher ist auch  $a$  ein Zykel. Somit folgt  $i_*[a] = [b - \partial b'] = [b]$ . Somit haben wir zu einer Homologieklassse  $[b] \in \ker j_*$  ein  $a$  gefunden, so dass  $i_*[a] = [b]$  gilt, also folgt  $\ker j_* \subset \text{im } i_*$  wie behauptet.
- $\ker \partial \subset \text{im } j_*$ : Wir verwenden wieder die Bezeichnungen aus der Konstruktion von  $\partial$ . Sei  $c$  ein Vertreter einer Homologieklassse in  $\ker \partial$ . Dann gilt  $a = \partial a'$  für ein  $a' \in A_n$ . Dann ist  $b - ia'$  ein Zykel, denn es gilt  $\partial(b - ia') = \partial b - \partial ia' = \partial b - i\partial a' = \partial b - ia = 0$  nach Wahl von  $a$ . Weiterhin gilt  $j(b - ia') = jb - jia' = jb = c$ . Beachte, dass  $j_*$  auf  $[b - ia']$  definiert ist, da  $b - ia'$  ein Zykel ist. Es gilt  $j_*[b - ia'] = [c]$  und wir schließen, dass  $\ker \partial \subset \text{im } j_*$  gilt.
- $\ker i_* \subset \text{im } \partial$ : Sei  $a \in A_{n-1}$  ein Zykel, so dass  $[a] \in \ker i_*$  gilt. Dann gibt es  $b \in B_n$  mit  $ia = \partial b$ . Es gilt  $\partial jb = j\partial b = jia = 0$  und somit ist  $jb$  ein Zykel.

Nach Definition von  $\partial$  gilt schließlich noch  $\partial[jb] = [a]$  und die Behauptung folgt.  $\square$

Die hier benutzte Methode wird öfter als Diagrammjagd bezeichnet. Mit Hilfe einer exakten Sequenz können viele Aussagen recht elegant und komprimiert dargestellt werden. Die obigen algebraischen Überlegungen gehören zum Gebiet der homologischen Algebra.

**Bemerkung 5.15.** Die Randabbildung  $\partial : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$  in der langen exakten Sequenz

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \\ \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \longrightarrow \dots \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

in Theorem 5.12 ist aufgrund der Konstruktion von  $\partial$  in Theorem 5.14 die folgende Abbildung. Sei  $\alpha$  ein relativer Zykel in  $C_n(X)$ ,  $[\alpha] \in H_n(X, A)$ . Dann ist  $\partial[\alpha] = [\partial\alpha] \in H_{n-1}(A)$ .

**Korollar 5.16.** Sei  $(X, A)$  ein Paar topologischer Räume und  $H_n(X, A) \cong 0$  für alle  $n$ . Dann induziert  $i : A \hookrightarrow X$  Isomorphismen  $i_* : H_n(A) \xrightarrow{\cong} H_n(X)$  für alle  $n$ .

*Beweis.* Für alle  $n$  ist

$$0 \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz.  $\square$

**Bemerkung 5.17.** Sei  $(X, A)$  ein Paar topologischer Räume mit  $A \neq \emptyset$ . Erweitere die kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen  $0 \rightarrow C_n(A) \rightarrow C_n(X) \rightarrow C_n(X, A) \rightarrow 0$  für  $n \geq 0$  um die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{1}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

in Dimension  $-1$ . Dann liefert die algebraische Konstruktion von Theorem 5.14 die folgende lange exakte Homologiesequenz

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \\ \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \dots \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Beachte dazu, dass  $\varepsilon : C_0(A) \rightarrow \mathbb{Z}$  für  $A \neq \emptyset$  surjektiv ist und somit keine negativen Homologiegruppen auftreten.

**Beispiel 5.18.** Sei  $n > 0$ . In der langen exakten Homologiesequenz für das Paar  $(D^n, \partial D^n)$  gilt  $\tilde{H}_i(D^n) \cong 0$  für alle  $i$ . Daher sind die Abbildungen

$$\partial : H_i(D^n, \partial D^n) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \tilde{H}_{i-1}(\partial D^n)$$

Isomorphismen für  $i > 0$ . Für  $i = 0$  benutzen wir, dass in der Homologiesequenz  $0 \rightarrow H_0(D^n, \partial D^n) \rightarrow 0$  auftritt. Wir erhalten also

$$H_i(D^n, \partial D^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Falle  $n = 0$  benutzen wir Proposition 3.5 und erhalten ebenfalls

$$H_i(D^0, \partial D^0) = H_i(D^0, \emptyset) \cong H_i(D^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Beispiel 5.19.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x_0 \in X$ . Wir wenden die lange exakte Homologiesequenz für die reduzierten Homologiegruppen auf das Paar  $(X, x_0)$  (oder genauer:  $(X, \{x_0\})$ ) an. Da  $\tilde{H}_n(x_0) \cong 0$  für alle  $n$  gilt, erhalten wir  $H_n(X, x_0) \cong \tilde{H}_n(X)$  für alle  $n$ .

**Lemma 5.20.** Sei  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung von Paaren, d. h.  $f : X \rightarrow Y$  ist eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und es gilt  $f(A) \subset B$ . Dann induziert  $f$  einen Homomorphismus  $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ .

*Beweis.* Zunächst induziert  $f$  einen Homomorphismus  $f_{\#} : C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, B)$ , da die Kettenabbildung  $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  auch  $f_{\#}(C_n(A)) \subset C_n(B)$  erfüllt. Daher ist  $f_{\#}$  auch auf den Quotientengruppen wohldefiniert. In den absoluten Kettengruppen  $C_n(X)$  und  $C_n(Y)$  gilt die Beziehung  $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$ . Somit gilt diese Relation auch für die relativen Kettengruppen  $C_n(X)/C_n(A)$  und  $C_n(Y)/C_n(B)$ . Wir können also Lemma 4.6 anwenden und erhalten einen induzierten Homomorphismus  $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ .  $\square$

**Proposition 5.21.** Seien zwei Abbildungen  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  mittels einer Homotopie von Paaren homotop, dann gilt  $f_* = g_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ .

*Beweis.* Der Prismenoperator aus dem Beweis von Theorem 4.9 bildet  $C_n(A)$  nach  $C_{n+1}(B)$  ab. Daher induziert er einen relativen Prismenoperator auf den Quotientengruppen,  $P : C_n(X, A) \rightarrow C_{n+1}(Y, B)$ . Wir hatten nachgewiesen, dass  $\partial P + P\partial = g_{\#} - f_{\#}$  gilt. Diese Formel bleibt auch richtig, wenn wir zu Quotientengruppen übergehen. Daher sind die Abbildungen  $f_{\#}$  und  $g_{\#}$  kettenhomotop zueinander und induzieren daher nach Proposition 4.12 denselben Homomorphismus  $f_* = g_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ .  $\square$

**Definition 5.22.** Ein Tripel  $(X, A, B)$  topologischer Räume ist ein topologischer Raum  $X$  mit Teilmengen  $A$  und  $B$ , so dass  $B \subset A \subset X$ .

**Korollar 5.23.** Sei  $(X, A, B)$  ein Tripel topologischer Räume. Dann gibt es eine lange exakte Homologiesequenz

$$\dots \rightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots$$

*Beweis.* (Dies ist ein Korollar zu Theorem 5.14.) Wir haben die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow C_n(A) \rightarrow C_n(X) \rightarrow \underbrace{C_n(X)/C_n(A)}_{=C_n(X,A)} \rightarrow 0.$$

Hieraus erhalten wir durch Quotientenbildung die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow C_n(A, B) \rightarrow C_n(X, B) \rightarrow C_n(X, A) \rightarrow 0.$$

Die zugehörige lange exakte Sequenz ist gerade die oben angegebene Sequenz.  $\square$

**Bemerkung 5.24.** Bestehe nun speziell  $B$  aus einem einzelnen Punkt. Nach Beispiel 5.19 ist  $H_n(X, B) \cong \tilde{H}_n(X)$  und  $H_n(A, B) \cong \tilde{H}_n(A)$ . Dann erhalten wir aus der langen exakten Homologiesequenz für Tripel die reduzierte lange exakte Homologiesequenz für das Paar  $(X, A)$  wie in Bemerkung 5.17.

**5.2. Ausschneidungen.** Manchmal ändern sich die relativen Homologiegruppen  $H_n(X, A)$  nicht, wenn man eine Teilmenge  $Z \subset A$  ausschneidet bzw. weglässt.

**Theorem 5.25.** *Seien topologische Räume  $Z \subset A \subset X$  gegeben, so dass  $\bar{Z} \subset \text{int } A$  gilt. Dann induziert die Inklusion  $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$  für alle  $n$  Isomorphismen  $H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow H_n(X, A)$ .*

*Anders ausgedrückt gilt für Teilmengen  $A, B \subset X$  mit  $X = \text{int } A \cup \text{int } B$ , dass  $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$  für alle  $n$  einen Isomorphismus  $H_n(B, A \cap B) \rightarrow H_n(X, A)$  induziert.*

**Bemerkung 5.26.** Zunächst einmal sind die beiden Formulierungen äquivalent, denn setzen wir in der zweiten Formulierung  $B = X \setminus Z$ , dann gilt  $Z = X \setminus B$  und weiter  $A \cap B = A \setminus Z$ . Es gilt

$$\begin{aligned} & \bar{Z} \subset \text{int } A \\ \iff & \overline{X \setminus B} \subset \text{int } A \\ \iff & X \setminus \text{int } B \subset \text{int } A \\ \iff & \text{int } A \cup \text{int } B = X. \end{aligned}$$

Für den Beweis von Theorem 5.25 werden wir Homologiegruppen mit Hilfe von „kleinen“ Simplizes berechnen, die wir aus baryzentrischen Unterteilungen erhalten. Kleinheit bedeutet hier in einem metrischen Raum, dass der Durchmesser des Bildes klein ist. In allgemeinen topologischen Räumen definieren wir Kleinheit dadurch, dass das Bild in einer Menge einer vorgegebenen Überdeckung enthalten ist.

**Definition 5.27.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{U} = \{U_j\}$  eine Familie von Teilmengen, so dass  $\bigcup \text{int } U_j = X$  gilt. Sei  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  die Untergruppe von  $C_n(X)$ , die aus allen Ketten  $\sum_i n_i \sigma_i$  besteht, so dass für jedes  $i$  ein  $j$  existiert, so dass  $\text{int } \sigma_i \subset U_j$  gilt. Nach Definition der Randabbildung liegen Bilder von Ketten aus  $C_n^{\mathcal{U}}(X) \subset C_n(X)$  in  $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X) \subset C_{n-1}(X)$ . Wir erhalten also durch Einschränkung eine Randabbildung  $\partial : C_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ . Daher bilden die Gruppen  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  mit Randabbildung  $\partial$  einen Kettenkomplex. Die zugehörigen Homologiegruppen bezeichnen wir mit  $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ .

Für den Beweis von Theorem 5.25 benötigen wir die folgende technische

**Proposition 5.28.** *Die Inklusion  $\iota : C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$  ist eine Kettenhomotopieäquivalenz, d. h. es gibt eine Kettenabbildung  $\rho : C_n(X) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$ , so dass  $\iota\rho$  und  $\rho\iota$  kettenhomotop zur Identität sind. Also induziert  $\iota$  nach Proposition 4.12 für alle  $n$  einen Isomorphismus  $H_n^{\mathcal{U}}(X) \cong H_n(X)$ .*

*Beweis.* Der längere Beweis mit baryzentrischer Unterteilung gliedert sich in vier Schritte.

- (i) Baryzentrische Unterteilung der Simplizes: Ein Simplex  $[v_0, \dots, v_n]$  besteht aus den Punkten  $\sum_i t_i v_i$  mit  $\sum_i t_i = 1$  und  $t_i \geq 0$  für alle  $i$ . Das **Baryzentrum** oder der „Schwerpunkt“ des Simplizes  $[v_0, \dots, v_n]$  ist der Punkt  $b = \sum_i \frac{1}{n+1} v_i$ , für den wir also  $t_i = \frac{1}{n+1}$  für alle  $i$  setzen. Die **baryzentrische Unterteilung** ist nun induktiv definiert. Sei  $[v_0, \dots, v_n]$  ein Simplex. Seine baryzentrische Unterteilung ist eine Unterteilung in die  $n$ -Simplizes

$[b, w_0, \dots, w_{n-1}]$ , wobei  $[w_0, \dots, w_{n-1}]$  ein  $(n-1)$ -Simplex in der baryzentrischen Unterteilung einer Seite  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  ist. Induktionsanfang ist dabei die baryzentrische Unterteilung von  $[v_0]$ , die als  $[v_0]$  selbst definiert ist. (Hier ist das Bild selber wieder nur ein Punkt und wir müssen daher auch nicht weiter unterteilen.) Für  $n=1$  unterteilen wir das Simplex  $[v_0, v_1]$  in  $[b, v_0]$  und  $[b, v_1]$ , zwei Strecken, und für  $n=2$  unterteilen wir  $[v_0, v_1, v_2]$  in sechs Dreiecke, wenn wir die Baryzentren von  $[v_0, v_1]$  mit  $b_2$  bezeichnen,  $\dots$ , so sind die Dreiecke (2-Simplizes) gerade  $[b, b_2, v_0]$ ,  $[b, b_2, v_1]$ ,  $[b, b_0, v_1]$ ,  $[b, b_0, v_2]$ ,  $[b, b_1, v_2]$  und  $[b, b_1, v_0]$ . Die baryzentrische Unterteilung eines 3-Simplizes besteht aus 24 3-Simplizes. Aufgrund der induktiven Definition sind die Ecken der Simplizes in der baryzentrischen Unterteilung gerade die Baryzentren aller  $k$ -dimensionalen Seiten  $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$  von  $[v_0, \dots, v_n]$  für alle  $0 \leq k \leq n$ . Für  $k=0$  erhalten wir gerade eine Ecke  $v_i$  des ursprünglichen Simplizes, denn sie ist das Baryzentrum des 0-Simplizes  $[v_i]$ . Das Baryzentrum von  $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$  hat die baryzentrischen Koordinaten  $(t_i)$  mit

$$t_i = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{für } i \in \{i_0, \dots, i_k\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir bemerken, dass die  $n$ -Simplizes einer baryzentrischen Unterteilung von  $\Delta^n$  und alle ihre Seiten eine  $\Delta$ -Komplexstruktur für  $\Delta^n$  bilden, sogar eine simpliziale Struktur.

Wir behaupten, dass der Durchmesser jedes Simplizes in der baryzentrischen Unterteilung von  $[v_0, \dots, v_n]$  höchstens  $\frac{n}{n+1}$  mal der Durchmesser von  $[v_0, \dots, v_n]$  ist. Der Durchmesser ist hier der Durchmesser des Simplizes, wenn wir ihn als Teilmenge eines Euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^k$  betrachten. Zunächst einmal wird der Durchmesser zwischen zwei Ecken des Simplizes angenommen, denn es gilt für zwei Punkte  $v, \sum_i t_i v_i \in [v_0, \dots, v_n]$

$$\left| v - \sum_i t_i v_i \right| = \left| \sum_i t_i (v - v_i) \right| \leq \sum_i t_i |v - v_i| \leq \sum_i t_i \max_i |v - v_i| = \max_i |v - v_i|.$$

Wenden wir diese Formel auf den Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten im Simplex an, so können wir also den Abstand vergrößern, wenn wir einen dieser Punkte durch eine Ecke ersetzen. Nach nochmaliger Anwendung haben wir beide Punkte durch Eckpunkte ersetzt. Für die eigentliche Abschätzung argumentieren wir per Induktion. Wir dürfen  $n \geq 1$  annehmen. Seien also  $w_j$  und  $w_k$  zwei beliebige Ecken eines Simplizes  $[w_0, \dots, w_n]$  aus der baryzentrischen Unterteilung von  $[v_0, \dots, v_n]$ . Ist keiner der beiden Punkte das Baryzentrum, so liegen sie beide in einem Simplex, den wir nach baryzentrischer Unterteilung von  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  erhalten haben. Daher ist der Abstand nach Induktionsvoraussetzung durch  $\frac{n-1}{n} \leq \frac{n}{n+1}$  mal dem Durchmesser von  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  nach oben beschränkt, der kleiner als der von  $[v_0, \dots, v_n]$  ist. Sei also ohne Einschränkung  $w_j$  das Baryzentrum  $b$  und  $w_k$  eine Ecke  $v_i$ . Sei nun  $b_i$  das Baryzentrum von  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ , also der Punkt für den alle baryzentrischen Koordinaten  $1/n$  sind bis auf  $t_i = 0$ . Dann gilt  $b = \frac{1}{n+1} v_i + \frac{n}{n+1} b_i$ . Wir haben also  $b$  als Konvexkombination von  $v_i$  und  $b_i$  dargestellt. Auf der Geraden durch  $v_i, b$  und  $b_i$  ist also

$\text{dist}(b, v_i) = \frac{n}{n+1} \text{dist}(b_i, v_i)$ . Daher ist  $\text{dist}(b, v_i)$  nach oben durch  $\frac{n}{n+1}$ -mal dem Durchmesser von  $[v_0, \dots, v_n]$  beschränkt.

Beachte, dass der Faktor  $\frac{n}{n+1}$  nur von der Dimension abhängt, bei iterierter baryzentrischer Unterteilung also in kontrollierter Weise gegen Null geht, obwohl die Form der Simplexe in der baryzentrischen Unterteilung unterschiedlich ist.

- (ii) Baryzentrische Unterteilung linearer Ketten: Im Beweis wollen wir insbesondere einen Unterteilungsoperator  $S : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$  konstruieren und nachweisen, dass dieser kettenhomotop zur Identität ist. Zunächst wollen wir solch einen Operator in einem einfacheren Fall konstruieren.

Sei  $Y$  eine konvexe Teilmenge eines Euklidischen Raumes. Die (affin) linearen Abbildungen  $\Delta^n \rightarrow Y$  erzeugen eine Untergruppe von  $C_n(Y)$ . Wir bezeichnen sie mit  $LC_n(Y)$ , die Gruppe der **linearen Ketten**. Nach Definition des Randoperators bildet  $\partial : C_n(Y) \rightarrow C_{n-1}(Y)$  die Menge  $LC_n(Y)$  nach  $LC_{n-1}(Y)$  ab. Daher bilden die Gruppen  $LC_n(Y)$  und die Randabbildung  $\partial$  einen Unterkomplex von  $C_n(Y)$ . Definiere für einen Simplex  $[w_0, \dots, w_n] \subset Y$  eine affin lineare Abbildung  $\lambda : \Delta^n \rightarrow Y$  durch  $\lambda(e_i) := w_i$  und affin lineare Fortsetzung, wobei  $e_i$  die Ecken des Standardsimplizes  $\Delta^n$  bezeichnen. Um keine Fallunterscheidungen für 0-Simplizes machen zu müssen, erweitern wir den Komplex  $LC(Y)$  durch  $LC_{-1}(Y) = \mathbb{Z}$ , erzeugt vom leeren Simplex  $[\emptyset]$  sowie  $\partial[w_0] = [\emptyset]$  für alle 0-Simplizes  $[w_0]$ . (Dies ist natürlich weiterhin ein Komplex, da das Bild eines 1-Simplizes aus zwei 0-Simplizes mit unterschiedlichen Vorzeichen besteht.)

Für einen beliebigen Punkt  $b \in Y$  erhalten wir einen Homomorphismus  $b : LC_n(Y) \rightarrow LC_{n+1}(Y)$  (unter Verwendung von leicht doppeldeutiger Notation) durch  $b([w_0, \dots, w_n]) := [b, w_0, \dots, w_n]$  (genauer wäre dies für die entsprechenden Abbildungen zu definieren). Dies entspricht geometrisch dem Kegeloperator mit  $[w_0, \dots, w_n]$  als Basis und  $b$  als Spitze. Nach Definition des Randoperators erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial b([w_0, \dots, w_n]) &= [w_0, \dots, w_n] + \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} [b, w_0, \dots, \hat{w}_i, \dots, w_n] \\ &= [w_0, \dots, w_n] - b\partial[w_0, \dots, w_n]. \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität erhalten wir  $\partial b(\alpha) = \alpha - b(\partial\alpha)$  für alle  $\alpha \in LC_n(Y)$ . Dies drückt algebraisch die geometrische Tatsache aus, dass der Rand eines Kegels aus der Basis und dem Kegel des Randes besteht. Schreiben wir diese Relation um, so erhalten wir  $\partial b + b\partial = \mathbb{1}$ , also ist  $b$  eine Kettenhomotopie zwischen der Identität und der Nullabbildung im erweiterten Komplex  $LC(Y)$ .

Wir definieren nun induktiv einen Unterteilungshomomorphismus

$$S : LC_n(Y) \rightarrow LC_n(Y).$$

Sei  $\lambda : \Delta^n \rightarrow Y$  eine affin lineare Abbildung in  $LC_n(Y)$  und sei

$$b_\lambda := \lambda \left( \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right)$$

das Bild des Baryzentrums von  $\Delta^n$  unter  $\lambda$ . Induktiv definieren wir nun  $S$  mit Hilfe des Kegeloperators  $b_\lambda$ , definiert wie im letzten Abschnitt,  $S(\lambda) := b_\lambda(S\partial\lambda)$ . Als Induktionsanfang definieren wir  $S : LC_{-1}(Y) \rightarrow LC_{-1}(Y)$  als



Identität,  $S([\emptyset]) := [\emptyset]$ . Wir beobachten, dass  $S : LC_0(Y) \rightarrow LC_0(Y)$  ebenfalls die Identität ist, denn in diesem Fall erhalten wir  $S([w_0]) = w_0(S\partial[w_0]) = w_0(S[\emptyset]) = w_0([\emptyset]) = [w_0]$ . Ist nun  $\lambda : \Delta^n \rightarrow Y$  eine Einbettung mit im  $\lambda = [w_0, \dots, w_n]$ , dann ist  $S(\lambda)$  die Summe (mit gewissen Vorzeichen) von  $n$ -Simplizes in der baryzentrischen Unterteilung von  $[w_0, \dots, w_n]$ . Dies folgt, wenn man die induktiven Definitionen für die baryzentrische Unterteilung und den Unterteilungshomomorphismus  $S$  vergleicht.

Wir behaupten nun, dass  $S : LC(Y) \rightarrow LC(Y)$  eine Kettenabbildung ist, also  $\partial S = S\partial$  erfüllt. Zunächst gilt  $S = \mathbf{1}$  auf  $LC_{-1}(Y)$  und  $LC_0(Y)$ . Die allgemeine Behauptung folgt nun per Induktion aus der folgenden Rechnung

$$\begin{aligned} \partial S\lambda &= \partial(b_\lambda(S\partial\lambda)) && \text{nach Definition von } S \\ &= S\partial\lambda - b_\lambda\partial S\partial\lambda && \text{da } \partial b_\lambda + b_\lambda\partial = \mathbf{1} \\ &= S\partial\lambda - b_\lambda(S\partial\partial\lambda) && \text{nach Induktionsannahme} \\ &= S\partial\lambda && \text{da } \partial\partial = 0. \end{aligned}$$

Wir definieren nun eine Kettenhomotopie  $T : LC_n(Y) \rightarrow LC_{n+1}(Y)$  zwischen  $S$  und der Identität, die in das folgende Diagramm passt

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & LC_2(Y) & \xrightarrow{\partial} & LC_1(Y) & \xrightarrow{\partial} & LC_0(Y) & \xrightarrow{\partial} & LC_{-1}(Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow S & \swarrow T & \downarrow S & \swarrow T & \downarrow S=\mathbf{1} & \swarrow T=0 & \downarrow S=\mathbf{1} & & \\ \dots & \longrightarrow & LC_2(Y) & \xrightarrow{\partial} & LC_1(Y) & \xrightarrow{\partial} & LC_0(Y) & \xrightarrow{\partial} & LC_{-1}(Y) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Definiere  $T : LC_n(Y) \rightarrow LC_{n+1}(Y)$  induktiv durch

$$T(\lambda) := \begin{cases} 0, & n = -1, \\ b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda), & n \geq 0. \end{cases}$$

(Geometrisch kann man sich dies veranschaulichen mit Hilfe einer induktiv definierten Unterteilung von  $\Delta^n \times I$ , die man erhält, indem man alle Simplizes in  $(\Delta^n \times \{0\}) \cup (\partial\Delta^n \times I)$ , die man auf diese Weise erhält mit dem Schwerpunkt von  $\Delta^n \times \{1\}$  verbindet.  $T$  entspricht dann gerade dem Bild dieser Unterteilung unter der Projektion  $\Delta^n \times I \rightarrow \Delta^n$ .)

Wir wollen nun  $\partial T + T\partial = \mathbf{1} - S$  nachrechnen, was besagt, dass  $T$  eine Kettenhomotopie ist. Für die Abbildung  $LC_{-1}(Y) \rightarrow LC_{-1}(Y)$  ist dies erfüllt, denn in dieser Dimension gilt  $T = 0$  und  $S = \mathbf{1}$ . Wir gehen nun induktiv vor und wollen die Formel für Abbildungen  $LC_n(Y) \rightarrow LC_n(Y)$  nachrechnen:

$$\begin{aligned} (5.1) \quad \partial T\lambda &= \partial(b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)) && \text{nach Definition} \\ &= (\mathbf{1} - b_\lambda\partial)(\lambda - T\partial\lambda) && \text{da } \partial b_\lambda = \mathbf{1} - b_\lambda\partial \\ &= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda\partial\lambda + b_\lambda\partial T\partial\lambda \\ &= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda\partial\lambda + b_\lambda(-T\partial + \mathbf{1} - S)\partial\lambda && \text{nach Induktion} \\ &= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda\partial\lambda - b_\lambda T\partial\partial\lambda + b_\lambda\partial\lambda - b_\lambda S\partial\lambda \\ &= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda S\partial\lambda && \text{da } \partial\partial = 0 \\ &= \lambda - T\partial\lambda - S\lambda, \end{aligned}$$

da nach Definition  $S\lambda = b_\lambda S\partial\lambda$ .

Nun sind wir mit der Induktion fertig und lassen ab jetzt wieder  $LC_{-1}(Y)$  weg. Die Relation  $\partial T + T\partial = \mathbf{1} - S$  bleibt auch ohne die Gruppe  $LC_{-1}(Y)$  gültig, denn  $T : LC_{-1}(Y) \rightarrow LC_0(Y)$  war die Nullabbildung.

- (iii) Baryzentrische Unterteilung allgemeiner Ketten: Definiere den Unterteilungshomomorphismus  $S : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$  durch  $S\sigma := \sigma_{\#}S\mathbf{1}_{\Delta^n} = \sigma_{\#}S$  für ein Simplex  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  und  $\mathbf{1}_{\Delta^n} \in LC_n(\mathbb{R}^{n+1})$ . Da  $S\mathbf{1}_{\Delta^n}$  eine Summe von  $n$ -Simplizes in der baryzentrischen Unterteilung von  $\Delta^n$  (mit gewissen Vorzeichen) ist, ist  $S\sigma$  die entsprechende Summe (mit Vorzeichen) der Einschränkungen von  $\sigma$  auf die  $n$ -Simplizes in der baryzentrischen Unterteilung von  $\Delta^n$ . Um nachzurechnen, dass die Abbildung  $S$  eine Kettenabbildung ist, definieren wir  $\Delta_i^n := [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]$ . Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} \partial S\sigma &= \partial\sigma_{\#}S\mathbf{1}_{\Delta^n} = \sigma_{\#}\partial S\mathbf{1}_{\Delta^n} = \sigma_{\#}S\partial\mathbf{1}_{\Delta^n} \\ &= \sigma_{\#}S\left(\sum_i (-1)^i \mathbf{1}_{\Delta_i^n}\right) = \sum_i (-1)^i \sigma_{\#}S\mathbf{1}_{\Delta_i^n} \\ &= \sum_i (-1)^i S(\sigma|_{\Delta_i^n}) = S\left(\sum_i (-1)^i \sigma|_{\Delta_i^n}\right) \\ &= S\partial\sigma. \end{aligned}$$

(Genauer:  $\Delta^{n-1} \rightarrow [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]$  statt  $\mathbf{1}_{\Delta_i^n}$ .)

Analog definieren wir  $T : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$  durch  $T\sigma := \sigma_{\#}T\mathbf{1}_{\Delta^n}$ . Wir wollen nachrechnen, dass  $T$  eine Kettenhomotopie zwischen  $S$  und der Identität ist, also  $\partial T + T\partial = \mathbf{1} - S$  erfüllt. Wir erhalten unter Verwendung von (5.1)

$$\begin{aligned} \partial T\sigma &= \partial\sigma_{\#}T\mathbf{1}_{\Delta^n} = \sigma_{\#}\partial T\mathbf{1}_{\Delta^n} = \sigma_{\#}(\mathbf{1}_{\Delta^n} - S\mathbf{1}_{\Delta^n} - T\partial\mathbf{1}_{\Delta^n}) \\ &= \sigma - S\sigma - \sigma_{\#}T\partial\mathbf{1}_{\Delta^n} = \sigma - S\sigma - T\partial\sigma. \end{aligned}$$

Für die letzte Gleichheit haben wir dabei die folgenden Umformungen, die denen beim Nachweis von  $\partial S\sigma = S\partial\sigma$  sehr ähnlich sind, benutzt

$$\begin{aligned} \sigma_{\#}T\partial\mathbf{1}_{\Delta^n} &= \sigma_{\#}T\left(\sum_i (-1)^i \mathbf{1}_{\Delta_i^n}\right) = \sum_i (-1)^i \sigma_{\#}T\mathbf{1}_{\Delta_i^n} \\ &= \sum_i (-1)^i T\sigma|_{\Delta_i^n} = T\left(\sum_i (-1)^i \sigma|_{\Delta_i^n}\right) = T\partial\sigma. \end{aligned}$$

- (iv) Iterierte baryzentrische Unterteilungen: Definiere  $D_m : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$  durch  $D_m := \sum_{i=0}^{m-1} TS^i$ . Wir behaupten, dass  $D_m$  eine Kettenhomotopie zwischen  $\mathbf{1}$  und  $S^m$  ist, dass also  $\partial D_m + D_m\partial = \mathbf{1} - S^m$  gilt. Mit Hilfe einer

Teleskopsumme erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial D_m + D_m \partial &= \sum_{i=0}^{m-1} \partial T S^i + T S^i \partial = \sum_{i=0}^{m-1} \partial T S^i + T \partial S^i && \text{da } \partial S = S \partial \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} (\partial T + T \partial) S^i = \sum_{i=0}^{m-1} (\mathbf{1} - S) S^i && \text{siehe oben} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} S^i - S^{i+1} = \mathbf{1} - S^m && \text{Teleskopsumme.}
\end{aligned}$$

Für jedes singuläre  $n$ -Simplex  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  gibt es ein  $m$ , so dass jeder Simplex in  $S^m \Delta^n$  von  $\sigma$  in ein  $U_j \in \mathcal{U}$  abgebildet wird und somit insbesondere  $S^m \sigma$  in  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  liegt. (Dies folgt mit Hilfe der Kompaktheit von  $\Delta^n$  direkt wie folgt.) Wir bezeichnen  $S^m \mathbf{1}_{\Delta^n}$  mit  $S^m \Delta^n$ . Aufgrund des ersten Teiles finden wir für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $m$ , so dass alle Simplizes in  $S^m \Delta^n$ , als Teilmengen von  $\Delta^n$  aufgefasst, einen Durchmesser kleiner als  $\varepsilon$  haben. Überdecke  $\Delta^n$  mit den offenen Mengen  $\sigma^{-1}(\text{int } U_j)$ ,  $U_j \in \mathcal{U}$ . Aufgrund der Kompaktheit von  $\Delta^n$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$  (Lebesguezahl), so dass es für alle  $x \in \Delta^n$  ein  $j$  gibt, so dass  $B_\varepsilon(x) \cap \Delta^n \subset \sigma^{-1}(\text{int } U_j)$  ist. Damit gilt für genügend großes  $m$ , dass jeder Simplex  $A$  aus  $S^m \Delta^n$ , aufgefasst als Teilmenge von  $\Delta^n$ ,  $A \subset \sigma^{-1}(\text{int } U_j)$  für ein  $j$  erfüllt. Damit gilt  $\sigma(A) \subset U_j$  für ein  $j$ . Beachte, dass dieses  $m$  von  $\sigma$  abhängt.) Sei  $m(\sigma) \in \mathbb{N}$  minimal, so dass  $S^{m(\sigma)} \sigma$  in  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  ist.

Definiere nun  $D : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$  durch  $D\sigma := D_{m(\sigma)}\sigma$  und lineare Fortsetzung. Beachte, dass hier bei einer Summe von Simplizes verschiedene Operatoren  $D_m$  auftreten können. Wir wollen nachrechnen, dass  $D$  eine Kettenhomotopie ist. Wir haben bereits gesehen, dass

$$\partial D_{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma = \sigma - S^{m(\sigma)}\sigma$$

gilt. Da  $\partial D_{m(\sigma)}\sigma = \partial D\sigma$  ist, ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\partial D\sigma + D\partial\sigma &= \sigma - \left( S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D\partial\sigma \right) \\
&\equiv \sigma - \rho(\sigma),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile  $\rho : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$  definiert. Wir behaupten, dass sogar  $\rho(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X) \subset C_n(X)$  gilt. Nach Definition von  $m(\sigma)$  ist dies für  $S^{m(\sigma)}\sigma$  der Fall. Betrachte also  $D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma)$ . Bezeichnen wir die Einschränkung von  $\sigma$  auf die  $i$ -te Seite von  $\Delta^n$  mit  $\sigma_i$ , dann gilt  $m(\sigma_i) \leq m(\sigma)$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned}
D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma) &= D_{m(\sigma)}\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_i\right) - D\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i (D_{m(\sigma)}(\sigma_i) - D(\sigma_i)) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \left( \sum_{j=0}^{m(\sigma)-1} T S^j \sigma_i - \sum_{j=0}^{m(\sigma_i)-1} T S^j \sigma_i \right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=m(\sigma_i)}^{m(\sigma)-1} TS^j \sigma_i \in C_n^{\mathcal{U}}(X),$$

denn da  $j \geq m(\sigma_i)$  für alle  $i, j$  in der Summe gilt, sind alle Terme der Form  $S^j \sigma_i \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ . Der Operator  $T : C_{n-1}(X) \rightarrow C_n(X)$  ist mit Hilfe von Randoperatoren und baryzentrischen Unterteilungen definiert. Daher gilt  $T(C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)) \subset C_n^{\mathcal{U}}(X)$  und  $\rho(\sigma) \subset C_n^{\mathcal{U}}(X)$  folgt.

Die Abbildung  $\rho : C_n(X) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$  (mit neuem Zielbereich) ist eine Kettenabbildung, denn aufgrund der definierenden Gleichung  $\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \rho\sigma$  folgt

$$\partial\rho\sigma = \partial(\sigma - \partial D\sigma - D\partial\sigma) = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma - D\partial\partial\sigma = \rho\partial\sigma.$$

Die definierende Gleichung für  $\rho$  besagt, dass  $D\partial + \partial D = \mathbb{1} - \iota\rho$  gilt, wobei  $\iota : C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$  die Inklusionsabbildung ist. Weiterhin ist für  $D : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$  die Einschränkung auf  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  trivial, denn für  $\sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$  ist  $m(\sigma) = 0$ , also ist die Summe in der Definition von  $D\sigma$  die Summe über die leere Menge (ebenso für  $\partial\sigma$ ), also folgt nach Definition von  $\rho$

$$\rho(\sigma) = S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma) = S^0\sigma = \sigma.$$

Damit ist  $\rho\iota = \mathbb{1}$ , erfüllt also  $0\partial + \partial 0 = \mathbb{1} - \rho\iota$  für die Kettenhomotopie  $0 : C_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$ . Nach der Definition in der Formulierung von Proposition 5.28 ist also  $\iota$  eine Kettenhomotopieäquivalenz.

Es folgt nach Proposition 4.12, dass  $\rho_*\iota_* = (\rho\iota)_* = \mathbb{1}$  auf  $H_n^{\mathcal{U}}(X)$  und  $\iota_*\rho_* = (\iota\rho)_* = \mathbb{1}$  auf  $H_n(X)$  gilt. Somit induziert  $\iota$  (wie auch  $\rho$  in umgekehrter Richtung) für alle  $n$  einen Isomorphismus  $i_* : H_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow H_n(X)$ . □

*Beweis von Theorem 5.25.* Wir beweisen die zweite Fassung des Theorems. Seien also  $A, B \subset X$  zwei Mengen mit  $\text{int } A \cup \text{int } B = X$ . Sei  $\mathcal{U} = \{A, B\}$ . Wir schreiben  $C_n(A+B)$  für  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ , also für Summen von Ketten, die ganz in  $A$  oder in  $B$  liegen ( $\neq C_n(A \cup B)$ ). Im Beweis von Proposition 5.28 hatten wir (in der dortigen Notation) nachgewiesen, dass  $\partial D + D\partial = \mathbb{1}_{C_n(X)} - \iota\rho$  und  $\rho\iota = \mathbb{1}_{C_n(A+B)}$  gelten. Alle Abbildungen in diesen Formeln bilden Ketten in  $A$  auf Ketten in  $A$  ab. Daher induzieren sie Abbildungen auf den Quotientengruppen, wenn wir Ketten in  $A$  herausdividieren. Diese induzierten Abbildungen erfüllen nach Definition ganz automatisch dieselben Formeln für die Quotientengruppen. Daher induziert die von den Inklusionen  $A \hookrightarrow X$  und  $B \hookrightarrow X$  induzierte Abbildung  $C_n(A+B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$  einen Isomorphismus der Homologiegruppen  $H_n^{\mathcal{U}}(X, A) \cong H_n(X, A)$ .

Die Inklusion  $C_n(B) \rightarrow C_n(A+B)$  liefert nach Herausfaktorisieren von  $C_n(A)$  die Abbildung  $C_n(B)/C_n(A \cap B) \rightarrow C_n(A+B)/C_n(A)$ . Dies ist ein Isomorphismus, denn beide Gruppen sind freie abelsche Gruppen, die von den singulären  $n$ -Simplizes in  $B$  erzeugt werden, die (genauer: deren Bilder) nicht ganz in  $A$  liegen. Wir erhalten also einen Isomorphismus  $H_n(B, A \cap B) \cong H_n^{\mathcal{U}}(X, A)$ .

Zusammen mit dem letzten Abschnitt erhalten wir also gerade den behaupteten Isomorphismus  $H_n(X, A) \cong H_n(B, A \cap B)$ . □

Die folgende Proposition beendet zusammen mit Bemerkung 5.17, die insbesondere Theorem 5.14 benutzt, den Beweis von Theorem 5.6. Beachte, dass Bemerkung 5.17  $A \neq \emptyset$  voraussetzt, für  $A = \emptyset$  Theorem 5.6 aber offensichtlich auch wahr ist.

**Proposition 5.29.** Sei  $(X, A)$  ein gutes Paar mit  $A \neq \emptyset$ . Dann induziert die Quotientenabbildung  $q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$  für alle  $n$  einen Isomorphismus

$$q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A).$$

*Beweis.* Der letzte Isomorphismus folgt nach Beispiel 5.19.

Sei  $V$  eine Umgebung von  $A$ , so dass  $A$  Deformationsretrakt von  $V$  ist. Betrachte das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \longrightarrow & H_n(X, V) & \longleftarrow & H_n(X \setminus A, V \setminus A) \\ \downarrow q_* & & \downarrow q_* & & \downarrow q_* \\ H_n(X/A, A/A) & \longrightarrow & H_n(X/A, V/A) & \longleftarrow & H_n((X/A) \setminus (A/A), (V/A) \setminus (A/A)). \end{array}$$

Die horizontalen Pfeile sind jeweils von den Inklusionen induziert.

Wir behaupten, dass die Abbildung  $H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, V)$  links oben ein Isomorphismus ist. Dazu betrachten wir die lange exakte Homologiesequenz für das Tripel  $(X, V, A)$  aus Korollar 5.23. Es genügt daher zu zeigen, dass  $H_n(V, A) \cong 0$  für alle  $n$  ist, denn dann sind die dazwischenliegenden Abbildungen  $H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, V)$  Isomorphismen. Die Behauptung  $H_n(V, A) \cong 0$  folgt aus Proposition 5.21, analog zur Argumentation bei der Untersuchung der Fundamentalgruppe, dass  $\pi_i(V) \cong \pi_i(A)$  ist. Seien nämlich  $i : (A, A) \hookrightarrow (V, A)$  die Inklusion und  $r : (V, A) \rightarrow (A, A)$  die zur Deformationsretraktion gehörige Retraktion, so erhalten wir

$$(A, A) \xrightarrow{i} (V, A) \xrightarrow{r} (A, A) \xrightarrow{i} (V, A),$$

$\mathbf{1} \qquad \simeq \mathbf{1}$

also  $ri = \mathbf{1}$  und  $ir \simeq \mathbf{1}$  vermöge der Deformationsretraktion. Somit gilt nach Proposition 5.21  $r_*i_* = \mathbf{1} : H_n(A, A) \rightarrow H_n(A, A)$  und  $i_*r_* = \mathbf{1} : H_n(V, A) \rightarrow H_n(V, A)$ .  $i_* : H_n(A, A) \rightarrow H_n(V, A)$  und  $r_* : H_n(V, A) \rightarrow H_n(A, A)$  sind daher Isomorphismen. Also ist  $H_n(V, A) \cong H_n(A, A) \cong 0$ . Links oben steht also ein Isomorphismus.

Ist  $A$  ein Deformationsretrakt von  $V$ , so ist auch  $A/A$  ein Deformationsretrakt von  $V/A$ , denn die Stetigkeit der induzierten Deformationsretraktion folgt aus der Definition der Quotiententopologie. Somit liefert dieselbe Argumentation wie im letzten Abschnitt, dass auch  $H_n(X/A, A/A) \rightarrow H_n(X/A, V/A)$  links unten im kommutativen Diagramm ein Isomorphismus ist.

Nach dem Ausschneidungssatz, Theorem 5.25 (den wir anwenden dürfen, da nach Definition eines guten Paares  $A = \bar{A} \subset \text{int } V$  gilt), ist  $H_n(X \setminus A, V \setminus A) \cong H_n(X, V)$  vermöge der Inklusion ein Isomorphismus. Nach Definition der Quotiententopologie ist auch  $(V/A, A/A)$  ein gutes Paar und somit ist auch die von der Inklusion induzierte Abbildung  $H_n((X/A) \setminus (A/A), (V/A) \setminus (A/A)) \rightarrow H_n(X/A, V/A)$  ein Isomorphismus.

Die Abbildung  $q$ , auf  $X \setminus A$  eingeschränkt, liefert einen Homöomorphismus  $X \setminus A \rightarrow (X/A) \setminus (A/A)$ , ebenso für  $V$  statt  $X$ . Daher ist die Abbildung  $q_* : H_n(X \setminus A, V \setminus A) \rightarrow H_n((X/A) \setminus (A/A), (V/A) \setminus (A/A))$  auf der rechten Seite ein Isomorphismus.

Die Abbildung  $q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A)$  auf der linken Seite ist nun ebenfalls ein Isomorphismus, denn das obige Diagramm ist kommutativ.  $\square$

Für beliebige Paare erhalten wir

**Lemma 5.30.** *Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\emptyset \neq A \subset X$ . Sei  $X \cup \mathcal{C}A$  der Abbildungskegel der Inklusion  $A \hookrightarrow X$ . (Hier ist  $\mathcal{C}A = (A \times I)/(A \times \{0\})$  und wir identifizieren  $A \times \{1\}$  mit  $A \subset X$ .) Dann ist  $H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X \cup \mathcal{C}A)$ .*

*Beweis.* Sei  $p \in \mathcal{C}A$  die Kegelspitze  $A \times \{0\}$ . Wir erhalten die folgende Kette von Isomorphismen

$$\tilde{H}_n(X \cup \mathcal{C}A) \cong H_n(X \cup \mathcal{C}A, \mathcal{C}A) \cong H_n((X \cup \mathcal{C}A) \setminus \{p\}, \mathcal{C}A \setminus \{p\}) \cong H_n(X, A).$$

Der Isomorphismus  $\tilde{H}_n(X \cup \mathcal{C}A) \cong H_n(X \cup \mathcal{C}A, \mathcal{C}A)$  folgt aus der reduzierten langen exakten Homologiesequenz in Bemerkung 5.17, denn  $\mathcal{C}A$  ist kontrahierbar und somit ist  $\tilde{H}_n(\mathcal{C}A) \cong 0$  für alle  $n$ . Der zweite Isomorphismus folgt aus dem Ausschneidesatz, Theorem 5.25. Da  $\mathcal{C}A \setminus \{p\}$  die Menge  $A$  als Deformationsretrakt besitzt, folgt der letzte Isomorphismus aus Proposition 5.21.  $\square$

**Beispiel 5.31.** Wir wollen nun explizit Zykel angeben, die die unendlichen zyklischen Gruppen  $H_n(D^n, \partial D^n)$  und  $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$  erzeugen. Wir haben in Beispiel 5.18 bereits gesehen, dass  $H_n(D^n, \partial D^n) \cong \mathbb{Z}$  gilt. Nach Korollar 5.8 gilt  $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ .

Wir betrachten zunächst  $(D^n, \partial D^n)$  oder genauer das dazu homöomorphe Paar  $(\Delta^n, \partial \Delta^n)$  und wollen zeigen, dass die Abbildung  $i_n = \mathbf{1} : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ , als singuläres  $n$ -Simplex aufgefasst, ein  $H_n(\Delta^n, \partial \Delta^n)$  erzeugender Zykel ist. Da wir modulo  $\partial \Delta^n$  rechnen, ist klar, dass  $i_n$  ein Zykel ist. Wir gehen induktiv vor. Für  $n = 0$  ist klar, dass  $i_n$  einen Erzeuger repräsentiert. Sei also  $n \geq 1$ . Induktionsschritt: Sei  $\Lambda \subset \Delta^n$  die Vereinigung aller  $(n-1)$ -dimensionaler Seiten bis auf eine. Dann behaupten wir, dass die folgenden Abbildungen Isomorphismen sind

$$H_n(\Delta^n, \partial \Delta^n) \longrightarrow H_{n-1}(\partial \Delta^n, \Lambda) \longleftarrow H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial \Delta^{n-1}).$$

Für die erste Abbildung betrachten wir die lange exakte Homologiesequenz zum Tripel  $(\Delta^n, \partial \Delta^n, \Lambda)$  aus Korollar 5.23. Da  $\Lambda$  Deformationsretrakt von  $\Delta^n$  ist und wir  $n \geq 1$  annehmen durften, folgt  $H_n(\Delta^n, \Lambda) \cong H_n(\Lambda, \Lambda) \cong 0$  und wir erhalten

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_n(\Delta^n, \partial \Delta^n) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\partial \Delta^n, \Lambda) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Für den zweiten Isomorphismus betrachten wir die Inklusion  $\Delta^{n-1} \hookrightarrow \partial \Delta^n$  als die Einbettung auf die Seite, die nicht in  $\Lambda$  enthalten ist. Diese Einbettung induziert einen Homöomorphismus zwischen  $\Delta^{n-1}/\partial \Delta^{n-1}$  und  $\partial \Delta^n/\Lambda$ . Also gilt  $\tilde{H}_{n-1}(\Delta^{n-1}/\partial \Delta^{n-1}) \cong \tilde{H}_{n-1}(\partial \Delta^n/\Lambda)$ . Da es sich bei den beteiligten Räumen um gute Paare handelt, können wir Proposition 5.29 anwenden und erhalten

$$H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial \Delta^{n-1}) \cong \tilde{H}_{n-1}(\Delta^{n-1}/\partial \Delta^{n-1}) \cong \tilde{H}_{n-1}(\partial \Delta^n/\Lambda) \cong H_{n-1}(\partial \Delta^n, \Lambda),$$

was gerade den zweiten Isomorphismus liefert. Der Induktionsschritt folgt nun, denn unter dem Isomorphismus  $\partial : H_n(\Delta^n, \partial \Delta^n) \rightarrow H_{n-1}(\partial \Delta^n, \Lambda)$  wird  $i_n$  auf  $\partial i_n$  abgebildet, was in  $C_{n-1}(\partial \Delta^n, \Lambda)$  bzw.  $C_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial \Delta^{n-1})$  gerade  $\pm i_{n-1}$  ist.

Um die Erzeuger von  $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$  zu finden, betrachten wir  $\mathbb{S}^n$  als Vereinigung von zwei Simplex  $\Delta_1^n$  und  $\Delta_2^n$ , deren Ränder auf geeignete Weise zusammengeklebt sind, so dass die Reihenfolge der Ecken erhalten ist. Dann ist  $\Delta_1^n - \Delta_2^n$  (eigentlich die entsprechenden Identitäten), als  $n$ -Kette aufgefasst, ein Zykel. Wir behaupten, dass  $\Delta_1^n - \Delta_2^n$  ein Erzeuger der Gruppe  $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  ist. Zunächst einmal liefert die reduzierte lange exakte Homologiesequenz für das Paar  $(\mathbb{S}^n, \Delta_2^n)$ , Bemerkung 5.17, da  $\tilde{H}_n(\Delta_2^n) \cong 0$  ist, den Isomorphismus  $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n, \Delta_2^n)$ . Dies funktioniert nur für  $n \geq 1$ , aber im Falle  $n = 0$  ist ohnehin klar, dass die hier auftretenden Abbildungen Isomorphismen sind. Weiterhin sehen wir wie oben, da (vermöge des

durch die Inklusion induzierten Isomorphismus)  $\Delta_1^n / \partial\Delta_1^n$  homöomorph zu  $\mathbb{S}^n / \Delta_2^n$  ist, dass

$$H_n(\Delta_1^n, \partial\Delta_1^n) \cong H_n(\mathbb{S}^n, \Delta_2^n)$$

gilt. Wir erhalten also die folgende Kette von Isomorphismen

$$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n, \Delta_2^n) \longleftarrow H_n(\Delta_1^n, \partial\Delta_1^n).$$

Der Zykel  $\Delta_1^n - \Delta_2^n$  in der ersten Gruppe entspricht dem Zykel  $\Delta_1^n$  in der dritten Gruppe. Wir haben im ersten Teil des Beispiels bereits gesehen, dass  $\Delta_1^n$  in dieser Gruppe einen Erzeuger repräsentiert. Also repräsentiert  $\Delta_1^n - \Delta_2^n$  auch einen Erzeuger in  $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$ .

Aus der obigen Proposition 5.29 erhalten wir noch

**Korollar 5.32.** *Sei  $X$  ein CW-Komplex. Seien  $A, B$  Teilkomplexe mit  $X = A \cup B$ . Dann induziert die Inklusionsabbildung  $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$  für alle  $n$  einen Isomorphismus  $H_n(B, A \cap B) \rightarrow H_n(X, A)$ .*

*Beweis.* Im Falle  $A \cap B = \emptyset$  ist die Aussage klar. Nehme also an, dass  $A \cap B \neq \emptyset$  ist. Da CW-Komplexe und ihre Teilkomplexe gute Paare bilden, können wir benutzen, dass  $B/(A \cap B)$  und  $X/A$  homöomorph sind. Wir benutzen nun Proposition 5.29 und erhalten

$$H_n(B, A \cap B) \cong \tilde{H}_n(B/(A \cap B)) \cong \tilde{H}_n(X/A) \cong H_n(X, A). \quad \square$$

Zur obigen Proposition 5.29 erhalten wir weiterhin

**Korollar 5.33.** *Seien  $X_\alpha$  topologische Räume und  $x_\alpha \in X_\alpha$ , so dass  $(X_\alpha, x_\alpha)$  (oder genauer  $(X_\alpha, \{x_\alpha\})$ ) gute Paare sind. Dann induzieren die Inklusionen  $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$  einen Isomorphismus*

$$\bigoplus_\alpha (i_\alpha)_* : \bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha) \rightarrow \tilde{H}_n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right).$$

*Beweis.* Wir definieren

$$(X, A) := \left( \prod_\alpha X_\alpha, \prod_\alpha \{x_\alpha\} \right).$$

Hierauf wenden wir nun Proposition 5.29 an und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{H}_n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) &= \tilde{H}_n\left(\prod_\alpha X_\alpha / \prod_\alpha \{x_\alpha\}\right) \cong H_n\left(\prod_\alpha X_\alpha, \prod_\alpha \{x_\alpha\}\right) \\ &\cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha, \{x_\alpha\}) \cong \bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha). \end{aligned}$$

Der Isomorphismus zwischen dem Koprodukt (der disjunkten Vereinigung) und der direkten Summe funktioniert hier ganz analog zur Zerlegung in Proposition 3.3, wo wir solch ein Resultat für Homologiegruppen statt für relative Homologiegruppen gezeigt haben.  $\square$

Das folgende Theorem über die Invarianz der Dimension geht auf L. E. J. Brouwer zurück, der es 1910 mit anderen Methoden bewies.

**Theorem 5.34.** *Seien  $U \subset \mathbb{R}^m$  und  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen und nichtleer. Sind  $U$  und  $V$  homöomorph, so gilt  $m = n$ .*

*Beweis.* Seien ohne Einschränkung  $m, n \geq 2$ . Sei  $x \in U$ . Betrachte die Teilräume  $\mathbb{R}^m \supset \mathbb{R}^m \setminus \{x\} \supset \mathbb{R}^m \setminus U$ . Der Ausschneidungssatz, Theorem 5.25, liefert  $H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$ . Die lange exakte Sequenz, Bemerkung 5.17, für das Paar  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$  liefert, da  $\tilde{H}_k(\mathbb{R}^m) \cong 0$ , den Isomorphismus  $\partial : H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\})$ . Nun besitzt  $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$  als Deformationsretrakt einen Raum homöomorph zu  $\mathbb{S}^{m-1}$ . Aus den obigen Resultaten schließen wir also, dass

$$H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog schließen wir für  $y \in V$ , dass

$$H_k(V, V \setminus \{y\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun induziert ein Homöomorphismus  $h : U \rightarrow V$  einen Homöomorphismus  $U \setminus \{x\} \rightarrow V \setminus \{h(x)\}$  und damit einen Isomorphismus  $H_k(U, U \setminus \{x\}) \rightarrow H_k(V, V \setminus \{h(x)\})$  für alle  $k$ . Somit folgt  $m = n$ .  $\square$

Die Techniken aus dem obigen Beweis motivieren die folgende

**Definition 5.35.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Wir definieren die **lokalen Homologiegruppen** von  $X$  an einem Punkt  $x \in X$  als  $H_n(X, X \setminus \{x\})$ .

**Bemerkung 5.36.** Sei  $X$  ein  $T_1$ -Raum,  $x \in X$  und  $U \in \mathcal{U}(x)$ . Punkte sind also abgeschlossen. Wähle eine offene Menge  $V$  mit  $x \in V \subset U$ . Dann gilt  $\overline{X \setminus U} \subset \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subset X \setminus \{x\} = \text{int}(X \setminus \{x\})$ . Wie im Beweis von Theorem 5.34 sehen wir mit Hilfe des Ausschneidungssatzes (der aufgrund der obigen Rechnungen anwendbar ist), dass  $H_n(X, X \setminus \{x\}) \cong H_n(U, U \setminus \{x\})$  gilt. Daher hängen die lokalen Homologiegruppen nur von der „lokalen Topologie“ von  $X$  in einer Umgebung von  $x$  ab. Da für Homöomorphismen stets  $H_n(X, X \setminus \{x\}) \cong H_n(Y, Y \setminus \{f(x)\})$  für alle  $x \in X$  und  $n$  gilt, können wir mit Hilfe dieser Gruppen wie im Beweis der Invarianz der Dimension damit gegebenenfalls aussagen, dass zwei Räume lokal nicht homöomorph (mit einer naheliegenden Definition) sind.

*Aufgaben.*

**Aufgabe 5.1.** Lies und verstehe [2, Proposition A.2].

**Definition 5.37.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Definiere die **Suspension** (oder Einhängung) von  $X$ , den Doppelkegel über  $X$ , durch  $SX := (X \times [0, 1]) / \sim$  mit  $(x, t) \sim (y, s)$ , falls  $(x, t) = (y, t)$  oder  $s = t = 0$  oder  $s = t = 1$  gilt. Es ist  $SX := ((X \times [0, 1]) / (X \times \{0\})) / (X \times \{1\})$ .

**Aufgabe 5.2.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Zeige, dass  $\tilde{H}_n(X) \cong \tilde{H}_{n+1}(SX)$  für alle  $n$  gilt.

Allgemeiner: Der Raum  $SX$  ist homöomorph zur Vereinigung zweier Kegel  $\mathcal{C}X = (X \times [0, 1]) / (X \times \{0\})$  an der Basis  $X \times \{1\}$ ,  $((\mathcal{C}X \times \{a\}) \cup (\mathcal{C}X \times \{b\})) / \sim$ , wobei  $\sim$  die von  $(x, 1, a) \sim (x, 1, b)$  erzeugte Äquivalenzrelation ist. Was gilt für die Homologiegruppen, wenn man  $k$  Kegel in entsprechender Weise an der jeweiligen Basis zusammenklebt?

**Aufgabe 5.3.**



- (i) Berechne die Homologiegruppen  $H_n(X, A)$  im Falle, wenn  $A$  eine endliche Menge von Punkten und  $X = \mathbb{S}^2$  oder  $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  ist.
- (ii) Sei  $X$  eine geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht 2. Seien  $A$  und  $B$  Kreise, die „die beiden Tori trennen“ oder „einem Erzeuger der Fundamentalgruppe eines der Tori entsprechen“. Bild siehe Tafel: ...  
Bestimme die Gruppen  $H_n(X, A)$  und  $H_n(X, B)$ . Ändern sich im Falle „ $B$ “ die Gruppen, wenn man einen anderen Erzeuger wählt?

**Aufgabe 5.4.** Lies und verstehe im Anhang bis [2, Proposition A.5].

**Definition 5.38.** Ein  $\Delta$ -Komplex heißt **simplicialer Komplex**, wenn die Simplex eindeutig durch ihre Ecken bestimmt sind. Also hat jeder  $n$ -Simplex  $n + 1$  verschiedene Eckpunkte und kein anderer Simplex besitzt dieselben Eckpunkte.

**Aufgabe 5.5.** Sei  $X$  ein  $\Delta$ -Komplex. Zeige, dass die zweite baryzentrische Unterteilung von  $X$  ein simplicialer Komplex ist. Zeige dazu, dass die erste baryzentrische Unterteilung einen  $\Delta$ -Komplex liefert, so dass alle Ecken eines Simplex verschieden sind und dann, dass die baryzentrische Unterteilung eines solchen Komplexes ein simplicialer Komplex ist. Warum muss man zweimal baryzentrisch unterteilen?

**Aufgabe 5.6.** Sei  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Abbildung von Paaren, so dass  $f : X \rightarrow Y$  und  $f|_A : A \rightarrow B$  Homotopieäquivalenzen sind.

- (i) Zeige, dass  $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$  für alle  $n$  ein Isomorphismus ist.
- (ii) Zeige, dass die Inklusion  $f : (D^n, \mathbb{S}^{n-1}) \hookrightarrow (D^n, D^n \setminus \{0\})$  keine Homotopieäquivalenz von Paaren ist; es gibt nämlich keine Abbildung  $g : (D^n, D^n \setminus \{0\}) \rightarrow (D^n, \mathbb{S}^{n-1})$ , so dass  $fg$  und  $gf$  vermöge von Homotopien von Paaren homotop zur Identität sind. Hinweis (der nicht unbewiesen verwendet werden soll): Ist  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Homotopieäquivalenz von Paaren, so ist auch  $(X, \bar{A}) \rightarrow (Y, \bar{B})$  eine Homotopieäquivalenz von Paaren.

**Aufgabe 5.7.** Lies und verstehe im Appendix bis vor Theorem A.6.

**Aufgabe 5.8.** Sei  $X$  der Quotientenraum, den man erhält, indem man in einer endlichen Familie von 2-Simplex Paare von Seiten (in affin linearer Weise) identifiziert. Zeige, dass  $X$  lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$  ist.

**Aufgabe 5.9.** Sei  $X$  ein endlichdimensionaler CW-Komplex. Zeige, z. B. per Induktion, die folgenden Aussagen.

- (i) Hat  $X$  die Dimension  $n$  (in naheliegender Weise definiert), dann gilt  $H_i(X) \cong 0$  für  $i > n$  und  $H_n(X)$  ist eine freie abelsche Gruppe. Mit welchem geometrischen Objekt hängen die Erzeuger dieser Gruppe zusammen?
- (ii)  $H_n(X)$  ist eine freie abelsche Gruppe, deren Erzeuger sich bijektiv auf die  $n$ -Zellen abbilden lassen, falls es keine Zellen in den Dimensionen  $n + 1$  und  $n - 1$  gibt.
- (iii) Besteht  $X$  aus  $k$  Stück  $n$ -Zellen, so ist die Gruppe  $H_n(X)$  von höchstens  $k$  Elementen erzeugt.

Dazu kann es nützlich sein, zunächst einmal zu zeigen, dass  $X^n / X^{n-1}$  homöomorph zu einer Einpunktvereinigung von  $n$ -Sphären ist.

**Aufgabe 5.10.** Lies und verstehe im Appendix Theorem A.6 (und ggf. zusätzlich das nachfolgende Gegenbeispiel).

**Aufgabe 5.11.** Betrachte ein 3-Simplex. Identifiziere Paare von Seiten, so dass der Quotientenraum homöomorph zu  $\mathbb{S}^3$  ist und der 3-Simplex eine  $\Delta$ -Struktur auf  $\mathbb{S}^3$  liefert. Berechne die simpliziale Homologie dieses  $\Delta$ -Komplexes.

**Aufgabe 5.12.** Wir konstruieren einen 3-dimensionalen  $\Delta$ -Komplex  $X$  wie folgt aus  $n$  Tetraedern  $T_1, \dots, T_n$ : Zunächst identifizieren wir Seiten, so dass jeweils aufeinanderfolgende Tetraeder  $T_i$  und  $T_{i+1}$  (mit  $T_{n+1} \equiv T_1$ ) genau eine Seite gemeinsam haben und alle Tetraeder die an die beiden identifizierten Seiten grenzende Kante teilen. Bild:  $\dots$ . Identifiziere nun die Unterseite von  $T_i$  mit der Oberseite von  $T_{i+1}$  mit Hilfe zweier Rotationen. Dies ist ein Beispiel für einen Linsenraum. Zeige, dass die (simplizialen) Homologiegruppen in den Dimensionen 0 bis 3 isomorph zu  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , 0 und  $\mathbb{Z}$  sind.

**Aufgabe 5.13.** Sei  $X$  der Kegel über dem 1-Skelett von  $\Delta^3$ , also homöomorph zur Vereinigung aller Strecken vom Schwerpunkt zu Punkten in den sechs Kanten von  $\Delta^3$ . Berechne für  $x \in X$  die lokalen Homologiegruppen  $H_n(X, X \setminus \{x\})$ . Auf welcher Teilmenge (von Punkten  $x$ ) von  $X$  gilt  $H_n(X, X \setminus \{x\}) \cong 0$  für alle  $n$ . Diese Menge bezeichnen wir mit  $\partial X$ . (Warum ist diese Bezeichnung „als Rand“ sinnvoll?) Berechne die lokalen Homologiegruppen  $H_n(\partial X, \partial X \setminus \{x\})$ . Sei  $f : X \rightarrow X$  ein Homöomorphismus. Bestimme mit Hilfe der obigen Rechnungen, welche Teilmengen  $A \subset X$  die Eigenschaft haben, dass  $f(A) \subset A$  gilt (unabhängig von der speziellen Wahl des Homöomorphismusses).

**5.3. Natürlichkeit.** Die Eigenschaft der Natürlichkeit werden wir später in Beweisen benötigen.

Im Beispiel der langen exakten Sequenz von Paaren aus Theorem 5.12 besagt dies:

**Definition 5.39.** Die lange exakte Sequenz von Paaren ist **natürlich** (oder funktoriell), wenn für alle Paare  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  und für alle stetigen Abbildungen  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Dies ist äquivalent dazu, dass  $f_*$  eine Kettenabbildung ist. Wir wollen andere lange exakte Sequenzen ebenso natürlich nennen, wenn die von allen stetigen Abbildungen zwischen den langen exakten Sequenzen induzierten Homomorphismen Kettenabbildungen sind; ebenso, wenn diese Abbildungen wie in Theorem 5.41 von Gruppenhomomorphismen induziert sind.

**Lemma 5.40.** Die lange exakte Sequenz von Paaren aus Theorem 5.12 ist natürlich.

*Beweis.* Die Quadrate, die nur  $f_*$ ,  $i_*$  und  $j_*$  enthalten, sind kommutativ, denn die entsprechenden Quadrate sind zwischen den Kettengruppen  $C_n$  kommutativ. Dies überträgt sich direkt auf die Homologiegruppen.

Für das noch fehlende Quadrat benutzen wir, dass nach Bemerkung 4.2 auf der Ebene von Ketten  $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$  ist und dass die Randabbildung in unserem Fall nach Bemerkung 5.15 durch die Randabbildung  $\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  induziert



**Korollar 5.42.** *Die lange exakte Homologiesequenz eines Tripels topologischer Räume, Korollar 5.23, und die reduzierte lange exakte Homologiesequenz eines Paares topologischer Räume, Bemerkung 5.17, sind natürlich.*

**Lemma 5.43.** *Die lange exakte Homologiesequenz für gute Paare, reduzierte Homologiegruppen und Quotientenräume aus Theorem 5.6 ist natürlich.*

*Beweis.* Sei  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine stetige Abbildung von Paaren. Dann wollen wir nachweisen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \longrightarrow & \tilde{H}_n(A) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_n(X) & \xrightarrow{q_*} & \tilde{H}_n(X/A) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow f_* & & \\ \dots & \longrightarrow & \tilde{H}_n(B) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_n(Y) & \xrightarrow{q_*} & \tilde{H}_n(Y/B) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(B) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

kommutativ ist, wobei  $i : A \hookrightarrow X$  die Inklusionsabbildung,  $q : X \rightarrow X/A$  die Projektionsabbildung und  $\bar{f} : X/A \rightarrow Y/B$  die auf den Quotienten von  $f$  induzierte Abbildung ist.

Zunächst einmal gilt  $fi = if$  und  $\bar{f}q = qf$  und somit sehen wir wieder direkt, dass die ersten beiden Quadrate kommutieren.

Das dritte Quadrat können wir wie folgt erweitern (vergleiche Proposition 5.29)

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_n(X/A) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X/A, A/A) & \xleftarrow{q_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(A) \\ \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ \tilde{H}_n(Y/B) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y/B, B/B) & \xleftarrow{q_*} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(B) \end{array}$$

Die horizontalen Pfeile im ersten Quadrat sind nach Bemerkung 5.17 Isomorphismen und die horizontalen Pfeile im zweiten Quadrat sind nach Proposition 5.29 Isomorphismen. Beachte auch, dass diese hier auftretenden Isomorphismen gerade die sind, die in Proposition 5.29 auftraten und die wir verwendet haben, um  $H_n(X, A)$  in Theorem 5.12 durch  $\tilde{H}_n(X/A)$  zu ersetzen. Wegen der Natürlichkeit der langen exakten Homologiesequenz aus Bemerkung 5.17 sehen wir, dass das erste Quadrat kommutiert. Mit der gleichen Begründung kommutiert auch das dritte Quadrat. Das mittlere Quadrat kommutiert, da  $\bar{f}q = qf$  auf der Ebene von Ketten gilt.  $\square$

## 6. DIE ÄQUIVALENZ VON SIMPLIZIALER UND SINGULÄRER HOMOLOGIE

Wir wollen zeigen, dass singuläre und simpliziale Homologie für  $\Delta$ -Komplexe stets isomorph sind. Wir wollen hier auch den Fall relativer Homologiegruppen mitbehandeln. Sei also  $X$  ein  $\Delta$ -Komplex und  $A \subset X$  ein Unter- $\Delta$ -Komplex, also eine Vereinigung von Simplizes in  $X$ , so dass  $A$  damit eine  $\Delta$ -Komplex Struktur bekommt. Wir nennen  $(X, A)$  auch ein Paar von  $\Delta$ -Komplexen.

Wir definieren relative Ketten durch  $\Delta_n(X, A) := \Delta_n(X)/\Delta_n(A)$  und genauso wie bei der singulären Homologie auch relative simpliziale Homologiegruppen  $H_n^\Delta(X, A)$ . Genauso wie im Falle der singulären Homologie erhalten wir für das Paar  $(X, A)$  eine lange exakte Homologiesequenz analog zu Theorem 5.12. Der Beweis funktioniert ganz analog zum singulären Fall, insbesondere, da die Hauptarbeit rein algebraisch war.

Da simpliziale Ketten formale Summen von charakteristischen Abbildungen  $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$  sind, sind sie in kanonischer Weise auch singuläre Ketten. Wir erhalten also eine Abbildung  $\Delta_n(X, A) \rightarrow C_n(X, A)$ . Dies induziert einen kanonischen Homomorphismus  $H_n^\Delta(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$ .

Hier schließen wir  $A = \emptyset$  nicht aus. Die Überlegungen beinhalten also den absoluten (nicht relativen) Fall, da in kanonischer Weise  $H_n(X, \emptyset) \cong H_n(X)$  und  $H_n^\Delta(X, \emptyset) \cong H_n^\Delta(X)$  gelten.

Als algebraisches Hilfsmittel werden wir beim Beweis der Äquivalenz von simplizialer und singulärer Homologie das Fünferlemma benutzen.

**Lemma 6.1** (Fünferlemma). *Sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{l'} & E' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm abelscher Gruppen mit exakten Zeilen. Sind die Homomorphismen  $\alpha, \beta, \delta$  und  $\varepsilon$  Isomorphismen, so ist auch  $\gamma$  ein Isomorphismus.

*Beweis.* Wir werden zeigen, dass

- (i)  $\gamma$  surjektiv ist, wenn  $\beta$  und  $\delta$  surjektiv und  $\varepsilon$  injektiv sind,
- (ii)  $\gamma$  injektiv ist, wenn  $\beta$  und  $\delta$  injektiv sind und  $\alpha$  surjektiv ist.

Damit können wir die Voraussetzungen an  $\alpha$  und  $\varepsilon$  abschwächen.

- (i) Sei  $c' \in C'$ . Da  $\delta$  surjektiv ist, gibt es ein  $d \in D$ , so dass  $\delta d = k'c'$  gilt. Es gilt  $\varepsilon l d = l' \delta d = l' k' c' = 0$ , da insbesondere die letzte Zeile exakt ist. Aus  $\varepsilon l d = 0$  und der Injektivität von  $\varepsilon$  folgt  $l d = 0$ . Da die erste Zeile exakt ist, finden wir ein  $c \in C$ , so dass  $d = kc$  gilt. Es gilt  $k'(c' - \gamma c) = k'c' - k'\gamma c = k'c' - \delta kc = k'c' - \delta d = 0$  aufgrund von schon hergeleiteten Identitäten. Aufgrund der Exaktheit gibt es ein  $b' \in B'$ , so dass  $c' - \gamma c = j'b'$  gilt. Weil  $\beta$  surjektiv ist, existiert  $b \in B$  mit  $b' = \beta b$ . Es gilt nun  $\gamma(c + jb) = \gamma c + \gamma jb = \gamma c + j'\beta b = \gamma c + j'b' = c'$  und daher ist  $\gamma$  surjektiv.
- (ii) Sei nun  $c \in C$  mit  $\gamma c = 0$ . Es gilt  $\delta kc = k'\gamma c = 0$ . Da  $\delta$  injektiv ist, folgt auch  $kc = 0$ . Daher gibt es ein  $b \in B$  mit  $c = jb$ . Es gilt  $j'\beta b = \gamma jb = \gamma c = 0$ . Aufgrund der Exaktheit finden wir also  $a' \in A'$ , so dass  $\beta b = i'a'$  gilt. Nun ist  $\alpha$  surjektiv, es gibt also ein  $a \in A$ , so dass  $a' = \alpha a$  ist. Es gilt  $\beta(ia - b) = \beta ia - \beta b = i'\alpha a - \beta b = i'a' - \beta b = 0$ . Da  $\beta$  injektiv ist, folgt auch  $ia - b = 0$  oder, äquivalent dazu,  $b = ia$ . Weiterhin gilt  $c = jb = jia = 0$  aufgrund der Exaktheit ( $ji = 0$ ). Also ist  $\ker \gamma$  trivial und  $\gamma$  injektiv. □

**Theorem 6.2.** *Sei  $(X, A)$  ein Paar von  $\Delta$ -Komplexen. Dann sind die Homomorphismen  $H_n^\Delta(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$  für alle  $n$  Isomorphismen.*

*Beweis.* Sei  $X$  zunächst endlichdimensional, d. h. für ein  $n_0$  und für alle  $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$  gelte  $n \leq n_0$ . Sei weiterhin zunächst  $A = \emptyset$ . Sei  $X^k$  das  $k$ -Skelett von  $X$ , definiert als die Vereinigung (der Bilder) aller Simplizes mit Dimension  $\leq k$ , also aller  $n$ -Simplizes mit  $n \leq k$ .

Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm, dessen Zeilen lange exakte Homologiesequenzen von Paaren, vergleiche Theorem 5.12, sind

$$(6.1) \quad \begin{array}{ccccccccc} H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \twoheadrightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \twoheadrightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \twoheadrightarrow & H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \twoheadrightarrow & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \twoheadrightarrow & H_n(X^{k-1}) & \twoheadrightarrow & H_n(X^k) & \twoheadrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) & \twoheadrightarrow & H_{n-1}(X^{k-1}) \end{array} .$$

Da die vertikalen Pfeile gerade die kanonischen Abbildungen  $H_n^\Delta \rightarrow H_n$  sind, ist das Diagramm kommutativ.

Wir wollen zunächst zeigen, dass der erste und der vierte vertikale Pfeil Isomorphismen sind, genauer, dass  $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) \rightarrow H_n(X^k, X^{k-1})$  für alle  $n$  ein Isomorphismus ist. Nehme dazu ohne Einschränkung an, dass  $X^k \neq \emptyset$ .

Für die simplizialen Kettengruppen gilt  $\Delta_n(X^k, X^{k-1}) \cong 0$ , falls  $k \neq n$  ist. Für  $k = n$  ist  $\Delta_n(X^k, X^{k-1})$  die freie abelsche Gruppe, die von den  $(k-$  oder  $)n$ -Simplizes von  $X$  erzeugt wird. Damit ist  $\Delta_n(X^k, X^{k-1})$  für festes  $k$  ein Kettenkomplex, in dem sämtliche Randabbildungen die Nullabbildungen sind (da nur in einer Dimension eine möglicherweise nichttriviale Gruppe steht). Für solch einen Kettenkomplex stimmen die Homologiegruppen gerade mit den Kettengruppen überein. Somit verschwindet auch  $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$  für  $k \neq n$  und ist im Falle  $k = n$  die von den  $k$ -Simplizes in  $X$  erzeugte freie abelsche Gruppe.

Zur Berechnung der singulären Homologiegruppen  $H_n(X^k, X^{k-1})$  betrachten wir die Abbildung

$$\Phi : \coprod_{\alpha} (\Delta_{\alpha}^k, \partial\Delta_{\alpha}^k) \rightarrow (X^k, X^{k-1}),$$

die auf den Simplizes gerade durch die charakteristischen Abbildungen  $\Delta^k \rightarrow X$  aller  $k$ -Simplizes von  $X$  gegeben ist. Nach Definition eines  $\Delta$ -Komplexes induziert  $\Phi$  eine Abbildung auf den Quotientenräumen. Dies ist sogar ein Homöomorphismus zwischen  $\coprod_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k / \coprod_{\alpha} \partial\Delta_{\alpha}^k$  und  $X^k / X^{k-1}$ . Somit induziert  $\Phi$  einen Isomorphismus zwischen den zugehörigen singulären Homologiegruppen

$$H_n \left( \coprod_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k / \coprod_{\alpha} \partial\Delta_{\alpha}^k \right) \cong H_n(X^k / X^{k-1})$$

für alle  $n$ . Da beide topologischen Räume homöomorph sind, stimmen auch die reduzierten Homologiegruppen überein. Nun sind  $\Delta$ -Komplexe CW-Komplexe und damit ist ein  $\Delta$ -Komplex und ein  $\Delta$ -Unterkomplex insbesondere ein gutes Paar. Wir können also Proposition 5.29 auf die vertikalen Pfeile im folgenden Diagramm anwenden und erhalten dort den oberen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} H_n \left( \coprod_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k, \coprod_{\alpha} \partial\Delta_{\alpha}^k \right) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X^k, X^{k-1}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \tilde{H}_n \left( \coprod_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k / \coprod_{\alpha} \partial\Delta_{\alpha}^k \right) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_n(X^k / X^{k-1}) \end{array} .$$

Nach Definition ist der Quotient  $\coprod_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k / \coprod_{\alpha} \partial\Delta_{\alpha}^k$  (bis auf einen Homöomorphismus) eine Einpunktvereinigung von  $k$ -dimensionalen Sphären. Mit Hilfe von Korollar 5.33

erhalten wir also

$$\bigoplus_{\alpha} \tilde{H}_n(\mathbb{S}^k) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n\left(\bigvee_{\alpha} \mathbb{S}^k\right) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n\left(\prod_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k / \prod_{\alpha} \partial \Delta_{\alpha}^k\right).$$

Dabei wissen wir aufgrund von Beispiel 5.31, dass für  $k = n$  die Homologiegruppen  $H_n(\Delta^k, \partial \Delta^k)$  von  $\mathbf{1} : \Delta^k \rightarrow \Delta^k$  erzeugt werden und außerdem trivial sind, falls  $k \neq n$  ist.

Dies alles zusammengenommen haben wir dieselbe Beschreibung für die Homologiegruppen  $H_n(X^k, X^{k-1})$  wie für  $H_n^{\Delta}(X^k, X^{k-1})$  einschließlich der Erzeuger, falls  $n > 0$  ist, also in dem Fall, wenn reduzierte und nicht reduzierte Homologiegruppen übereinstimmen. Für  $n = 0$  ist die Aussage aber offenbar ebenfalls wahr. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} C_1(X^0, \emptyset) &\xrightarrow{\partial=0} C_0(X^0, \emptyset), \\ 0 \cong \Delta_1(X^0, \emptyset) &\xrightarrow{0} \Delta_0(X^0, \emptyset). \end{aligned}$$

Für  $k > 0$  ist die Behauptung einfach einzusehen. Somit ist

$$H_n^{\Delta}(X^k, X^{k-1}) \rightarrow H_n(X^k, X^{k-1})$$

für alle  $n, k$  ein Isomorphismus.

Betrachte nun das kommutative Diagramm (6.1). Die Zeilen sind exakt. Wir haben gerade gezeigt, dass der erste und der vierte vertikale Pfeil Isomorphismen sind. Wir gehen nun per Induktion (nach  $k$ ) vor und dürfen daher annehmen, dass auch der zweite und der fünfte vertikale Pfeil Isomorphismen sind. Dann liefert das Fünferlemma, dass auch der mittlere Pfeil ein Isomorphismus ist. Dies zeigt die Behauptung im Fall, wenn  $X$  endlichdimensional ist und  $A = \emptyset$  gilt.

Wir betrachten als nächstes den Fall, wenn  $X$  unendlichdimensional ist, wenn also  $X$  nicht endlichdimensional ist. Wir wollen dazu benutzen, dass eine kompakte Menge in  $X$  nur endlich viele offene Zellen  $D_{\alpha}^k$  in  $X$  (also die homöomorphen Bilder von  $\text{int } D_{\alpha}^k$ ) schneiden kann. Dies gilt allgemein für CW-Komplexe, vergleiche [2, Proposition A.1]. Für  $\Delta$ -Komplexe sieht man dies direkt wie folgt ein: Falls eine kompakte Menge  $C$  unendlich viele solcher offenen Simplizes schneidet, so finden wir eine Folge von Punkten  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $x_i \in C$ , so dass jeder Punkt  $x_i$  in einem anderen offenen Simplex liegt. Nach Definition eines  $\Delta$ -Komplexes, Definition 2.2, sind die Mengen  $U_i := X \setminus \bigcup_{j \neq i} \{x_j\}$  in  $X$  offen, da alle Urbilder unter den charakteristischen Abbildungen der Simplizes offen sind. Die Mengen  $U_i$  überdecken  $C$ , besitzen aber keine endliche Teilüberdeckung. Widerspruch. Somit ist  $C$  bereits in endlich vielen offenen Simplizes enthalten.

Wir wollen nun damit zeigen, dass  $H_n^{\Delta}(X) \rightarrow H_n(X)$  surjektiv ist. Für ein beliebiges Element in  $H_n(X)$  finden wir einen singulären  $n$ -Zykel  $z$ , der das vorgegebene Element repräsentiert. Der Zykel  $z$  ist eine endliche Linearkombination aus singulären Simplizes. Diese haben kompakte Bilder in  $X$  und treffen daher nur endlich viele offene Simplizes in der gegebenen  $\Delta$ -Struktur von  $X$ . Also sind alle diese Bilder im  $k$ -Skelett  $X^k$  für ein geeignetes  $k$  enthalten. Wir wissen bereits, dass  $H_n^{\Delta}(X^k) \rightarrow H_n(X^k)$  ein Isomorphismus und daher insbesondere surjektiv ist. Also ist  $z$  in  $X^k$  (und damit auch in  $X$ ) zu einem simplizialen Zykel (singulär) homolog. Somit ist die Abbildung  $H_n^{\Delta}(X) \rightarrow H_n(X)$  surjektiv.

Zur Injektivität: Sei ein simplizialer  $n$ -Zykel  $z$  der Rand einer singulären Kette  $a$  in  $X$ . Dies bedeutet, dass  $z$  im Kern der Abbildung  $H_n^\Delta(X) \rightarrow H_n(X)$  liegt. Nun ist das Bild dieser Kette  $a$  in  $X$  kompakt, liegt also (ebenso wie  $z$ ) wieder in einem  $X^k$ . Damit ist  $z$  aber auch ein Element des Kernes von  $H_n^\Delta(X^k) \rightarrow H_n(X^k)$ . Da diese Abbildung nach Voraussetzung jedoch ein Isomorphismus ist, ist  $z$  in  $X^k$  ein simplizialer Rand und somit auch in  $X$ .

Sei schließlich  $X$  beliebig und  $A \neq \emptyset$ . Analog zu (6.1) betrachten wir das folgende kommutative Diagramm, dessen Zeilen lange exakte Homologiesequenzen von Paaren und dessen vertikale Pfeile die kanonischen Abbildungen, erzeugt von  $C_n^\Delta \rightarrow C_n$ , sind

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{n+1}^\Delta(X, A) & \rightarrow & H_n^\Delta(A) & \rightarrow & H_n^\Delta(X) & \rightarrow & H_n^\Delta(X, A) & \rightarrow & H_{n-1}^\Delta(A) & \rightarrow & H_{n-1}^\Delta(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(X, A) & \rightarrow & H_n(A) & \rightarrow & H_n(X) & \rightarrow & H_n(X, A) & \rightarrow & H_{n-1}(A) & \rightarrow & H_{n-1}(X) \end{array}$$

(Im Vergleich zu (6.1) haben wir rechts noch ein Quadrat angehängt.) Aufgrund der obigen Überlegungen sind in den vier rechten Quadraten die beiden äußeren vertikalen Pfeile Isomorphismen. Nach Fünferlemma ist daher auch  $H_n^\Delta(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$  ein Isomorphismus.  $\square$

**Bemerkung 6.3.**

- (i) Aus Theorem 6.2 folgt insbesondere, dass die Gruppen  $H_n(X)$  endlich erzeugt sind, wenn  $X$  eine  $\Delta$ -Komplex Struktur mit endlich vielen  $n$ -Simplizes besitzt. (In diesem Falle sind nämlich die simplizialen Kettengruppen  $\Delta_n(X)$  endlich erzeugt, also (kleiner Satz) auch die Untergruppe der Zyklen und somit schließlich ebenso  $H_n^\Delta(X)$ .)
- (ii) Theorem 6.2 liefert auch, dass  $H^\Delta(X)$  (bis auf einen Gruppenisomorphismus) nicht von der Wahl einer  $\Delta$ -Struktur auf  $X$  abhängt.
- (iii) Schreiben wir  $H_n(X)$ , falls diese Gruppe endlich erzeugt ist, als die direkte Summe zyklischer Gruppen, so heißt die Anzahl der  $\mathbb{Z}$  Summanden von  $H_n(X)$  die  $n$ -te **Bettizahl** von  $X$ . Die natürlichen Zahlen, die die Ordnung der endlichen zyklischen Summanden angeben, heißen **Torsionskoeffizienten**.

*Aufgaben.* Ziel der folgenden Lese- und Versteheaufgaben ist der Beweis des  $n$ -dimensionalen Satzes von Borsuk und Ulam [2, Corollary 2B.7].

**Theorem 6.4** (Borsuk–Ulam). *Sei  $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann gibt es ein  $x \in \mathbb{S}^n$ , so dass  $g(x) = g(-x)$  gilt.*

Wichtig ist bei der Homologie mit Koeffizienten daher insbesondere der Fall  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Aufgabe 6.1.** Lies und verstehe über Homologietheorien mit von  $\mathbb{Z}$  verschiedenen Koeffizienten auf Seite 153 in [2], soweit wir dies für Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  schon besprochen haben.

**Aufgabe 6.2.** Besorge dir die Grundkenntnisse zu Überlagerungen, wie sie für die nächste Aufgabe nötig sind.

**Aufgabe 6.3.** Lies und verstehe die Herleitung der langen exakten Sequenz zwischen der Formulierung und dem Beweis von Proposition 2B.6 in [2].

**Aufgabe 6.4.** Lies und verstehe Lemma 2.49 [2].



## 7. ABBILDUNGSGRAD

Der Abbildungsgrad wurde schon vor der Entwicklung der singulären Homologietheorie mit Hilfe der sogenannten „simplicialen Approximation“ definiert.

**Definition 7.1.** Sei  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  eine stetige Abbildung für  $n > 0$ . Dann induziert  $f$  eine Abbildung  $f_* : H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n)$ .  $f_*$  ist eine Abbildung zwischen zwei unendlichen zyklischen Gruppen. Also ist  $f_*$  von der Form  $f_*(\alpha) = d\alpha$  für alle  $\alpha \in H_n(\mathbb{S}^n)$  und für ein  $d \in \mathbb{Z}$ , wobei  $d$  nur von  $f$  abhängt. Wir nennen  $d$  den **Abbildungsgrad** (oder **Grad** oder **Brouwergrad** oder **Brouwerschen Abbildungsgrad**) der Abbildung  $f$ . Wir bezeichnen ihn mit  $\deg f$ .

Es gelten die folgenden (relativ) elementaren Eigenschaften des Abbildungsgrades

**Lemma 7.2.** Seien  $f, g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  stetige Abbildungen.

- (i) Die Abbildung  $\mathbf{1} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  erfüllt  $\deg \mathbf{1} = 1$ .
- (ii) Ist  $f$  nicht surjektiv, so gilt  $\deg f = 0$ .
- (iii) Homotope Abbildungen  $f, g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  haben denselben Abbildungsgrad.
- (iv)  $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$ .
- (v) Ist  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  eine Homotopieäquivalenz, so gilt  $\deg f = \pm 1$ .
- (vi) Ist  $f(\hat{x}, x^{n+1}) = (\hat{x}, -x^{n+1})$ , in Koordinaten  $(\hat{x}, x^{n+1})$  des  $\mathbb{R}^{n+1}$  beschrieben, eine Reflektion an der  $(n-1)$ -Sphäre  $\{x^{n+1} = 0\} \cap \mathbb{S}^n$ , so gilt  $\deg f = -1$ .
- (vii) Für die Antipodalabbildung  $-\mathbf{1} : x \mapsto -x$  gilt  $\deg(-\mathbf{1}) = (-1)^{n+1}$ .
- (viii) Besitzt  $f$  keine Fixpunkte, so gilt  $\deg f = (-1)^{n+1}$ .

*Beweis.*

- (i) Ist klar, da  $\mathbf{1}_* = \mathbf{1}$ .
- (ii) Sei  $x_0 \in \mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^n)$ . Dann können wir  $f$  zerlegen als

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^n \\ & \searrow \tilde{f} & \nearrow i \\ & \mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} & \end{array}$$

und erhalten Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(\mathbb{S}^n) \\ & \searrow (\tilde{f})_* & \nearrow i_* \\ & \underbrace{H_n(\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\})}_{\cong 0} & \end{array}$$

Somit ist  $f_* : H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n)$  die Nullabbildung und es folgt  $\deg f = 0$ .

- (iii) Ist  $f \simeq g$ , so folgt  $f_* = g_*$  und daher gilt  $\deg f = \deg g$ . (Die Umkehrung ist komplizierter und wurde von Hopf bewiesen, [2, Korollar 4.25] ist ein Beweis, der Homotopietheorie verwendet.)
- (iv) Folgt direkt aus  $(fg)_* = f_*g_*$ .
- (v) Ist  $f$  eine Homotopieäquivalenz, so gibt es eine Abbildung  $g$ , so dass  $fg \simeq \mathbf{1}$  ist. Aus der Multiplikatивität des Abbildungsgrades folgt  $\deg f \cdot \deg g = \deg \mathbf{1} = 1$ . Da  $\deg f, \deg g \in \mathbb{Z}$  ist, folgt  $\deg f = \pm 1$ .

- (vi)  $\mathbb{S}^n$  besitzt eine  $\Delta$ -Komplex Struktur mit genau zwei  $n$ -Simplizes  $\Delta_1^n$  und  $\Delta_2^n$ , die der oberen und der unteren Hemisphäre entsprechen. Nach Beispiel 5.31 repräsentiert  $\Delta_1^n - \Delta_2^n$  gerade einen Erzeuger von  $H_n(\mathbb{S}^n)$  (beachte, dass wir dort die Reihenfolge der Ecken beim Zusammenkleben beibehalten haben). Die Reflektion vertauscht gerade  $\Delta_1^n$  und  $\Delta_2^n$ , bildet also den Erzeuger von  $H_n(\mathbb{S}^n)$  auf sein Inverses ab.
- (vii) Die Antipodalabbildung  $-\mathbf{1}$  lässt sich als Verknüpfung von  $n + 1$  Reflexionen, alle mit Abbildungsgrad  $-1$ , schreiben. Bei jeder dieser Reflexionen wird gerade das Vorzeichen einer Koordinate im  $\mathbb{R}^{n+1}$  geändert.
- (viii) Gilt  $x \neq f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{S}^n$  so liegt der Ursprung nicht auf der Verbindungsstrecke von  $f(x)$  zu  $-x$ , definiert durch  $[0, 1] \ni t \mapsto (1-t)f(x) + t(-x)$ . Also definiert

$$f_t(x) := \frac{(1-t)f(x) - tx}{|(1-t)f(x) - tx|}$$

eine Homotopie zwischen  $f_0 = f$  und  $f_1 = -\mathbf{1}$ .

(Beachte, dass die Antipodalabbildung  $-\mathbf{1}$  keine Fixpunkte besitzt. Die Aussage, dass jede fixpunktfreie Abbildung  $-$  bis auf Homotopie  $-$  die Antipodalabbildung ist, können wir als Umkehrung davon auffassen.)

□

Eine Anwendung des Abbildungsgrades ist

**Theorem 7.3.** *Auf  $\mathbb{S}^n$  gibt es genau dann ein stetiges nirgends verschwindendes tangentiales Vektorfeld, wenn  $n$  ungerade ist.*

*Beweis.* Die differentialgeometrische Aussage über die Existenz eines nullstellenfreien Vektorfeldes ist äquivalent dazu, dass es eine stetige Abbildung  $v : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  gibt mit  $\langle v(x), x \rangle = 0$  und  $v(x) \neq 0$  (oder sogar  $|v(x)| = 1$ ) für alle  $x$ .

„ $\implies$ “: Wir nehmen nun an, dass  $v$  eine solche Abbildung mit  $|v(x)| = 1$  ist. Für  $t \in [0, 1]$  definieren wir eine Homotopie  $f_t(x) := x \cdot \cos \pi t + v(x) \cdot \sin \pi t$ . Diese Homotopie spielt sich für einen festen Wert von  $x$  auf dem Großkreis durch  $x$  und  $v(x)$  ab. Beachte, dass  $\langle x, v(x) \rangle = 0$  sichert, dass  $f_t$  nullstellenfrei ist ( $f_t$  braucht auch nicht mehr normiert zu werden). Die Abbildung  $f_t$  ist eine Homotopie zwischen  $f_0 = \mathbf{1}$  und  $f_1 = -\mathbf{1}$ . Daher gilt  $1 = \deg \mathbf{1} = \deg(-\mathbf{1}) = (-1)^{n+1}$  und somit ist  $n$  ungerade.

„ $\impliedby$ “: Sei  $n = 2k - 1$ . Definiere

$$v(x^1, x^2, \dots, x^{2k-1}, x^{2k}) := (-x^2, x^1, \dots, -x^{2k}, x^{2k-1}).$$

Motiviert durch den Fall  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  drehen wir also in jeder zweidimensionalen Ebene um  $90^\circ$ . Es gilt  $\langle x, v(x) \rangle = 0$ , also ist  $v$  ein tangentiales Vektorfeld. Es verschwindet nirgends, denn für alle  $x \in \mathbb{S}^n$  ist  $|v(x)| = 1$ . □

Komplizierter ist es, die maximale Anzahl von tangentialen Vektorfeldern auf  $\mathbb{S}^n$  zu finden, die in jedem Punkt linear unabhängig sind.

**Bemerkung 7.4.** Theorem 7.3 besagt, dass jedes tangentiale Vektorfeld auf  $\mathbb{S}^2$  (oder auf  $\mathbb{S}^{2k}$ ) eine Nullstelle besitzt. Dies bedeutet umgangssprachlich: „Ein Igel lässt sich nicht ohne Wirbel kämmen.“

**Definition 7.5.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Die Homöomorphismen  $X \rightarrow X$  bilden eine Gruppe bezüglich Komposition. Eine Gruppe  $G$  **operiert** auf einem

Raum  $X$ , wenn es einen Gruppenhomomorphismus von  $G$  in die Gruppe der Homöomorphismen  $X \rightarrow X$  gibt. (Wir ordnen also jedem Gruppenelement  $g \in G$  einen Homöomorphismus  $X \rightarrow X$  zu, so dass dem Produkt von Gruppenelementen die Verkettung der zugehörigen Homöomorphismen und  $\mathbf{1} \in G$  die Identität  $\mathbf{1} : X \rightarrow X$  zugeordnet werden.) Die Gruppe  $G$  operiert **frei** auf  $X$ , wenn nur dem Element  $\mathbf{1} \in G$  ein Homöomorphismus zugeordnet wird, der einen Fixpunkt besitzt. (Die Zuordnung  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ni 0 \mapsto (\mathbf{1} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n)$  und  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ni 1 \mapsto (-\mathbf{1} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n)$  beschreibt eine freie Operation von  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{S}^n$ .)

**Proposition 7.6.** *Die Gruppe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist (bis auf Isomorphismen) die einzige nicht-triviale Gruppe, die für gerades  $n$  frei auf  $\mathbb{S}^n$  operiert.*

*Beweis.* Sei  $G$  eine nichttriviale Gruppe,  $g \mapsto f_g$  sei die freie Operation von  $g$  auf  $\mathbb{S}^n$ ,  $n$  gerade, also ist insbesondere  $f_g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  ein Homöomorphismus. Da Homöomorphismen  $f$  einen Abbildungsgrad  $\deg f = \pm 1$  besitzen, liefert die Komposition  $g \mapsto f_g \mapsto \deg f_g$  eine Funktion  $d : G \rightarrow \{\pm 1\}$ . Da der Abbildungsgrad multiplikativ ist,  $\deg(f_{g_1} \circ f_{g_2}) = (\deg f_{g_1}) \cdot (\deg f_{g_2})$ , ist  $d$  ein Homomorphismus. Wir hatten gesehen, Lemma 7.2, dass eine fixpunktfreie Abbildung  $f_g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  Abbildungsgrad  $\deg f_g = (-1)^{n+1} = -1$  hat, falls  $n$  gerade ist. Somit ist keine fixpunktfreie Abbildung im Kern der Abbildung  $G \ni g \mapsto \deg f_g$ . Es gilt daher  $\ker(d) = \{\mathbf{1}\}$ . Wegen  $|G| > 1$  ist  $d$  surjektiv, also auch bijektiv und wir erhalten  $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .  $\square$

Mit Hilfe des **lokalen Abbildungsgrades** kann man oft den Abbildungsgrad einer Abbildung berechnen.

**Definition 7.7.** Sei  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ,  $n > 0$ , eine stetige Abbildung. Nehme an, dass es einen Punkt  $y \in \mathbb{S}^n$  gibt, so dass  $f^{-1}(y)$  nur aus endlich vielen Punkten  $x_1, \dots, x_m$  besteht. (Bei einer glatten Abbildung ist dies aufgrund des Sardeschen Satzes für fast alle Bildpunkte der Fall.) Sei  $V$  eine offene Umgebung von  $y$ . Seien  $U_1, \dots, U_m$  disjunkte Umgebungen der Punkte  $x_1, \dots, x_m$ , die wir so wählen, dass  $f(U_i) \subset V$  für alle  $i$  gilt. Dann ist auch  $f(U_i \setminus \{x_i\}) \subset V \setminus \{y\}$ . Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V \setminus \{y\}) \\
 & \swarrow \cong & \downarrow k_i & & \downarrow \cong \\
 H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{x_i\}) & \xleftarrow{p_i} & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus f^{-1}(y)) & \xrightarrow{f_*} & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{y\}) \\
 & \swarrow \cong & \uparrow j & & \uparrow \cong \\
 & & H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(\mathbb{S}^n)
 \end{array}$$

wobei  $k_i$  und  $p_i$  durch die entsprechenden Inklusionen induziert sind und alle anderen Abbildungen die offensichtlichen Abbildungen sind. Daher ist das Diagramm kommutativ. Die beiden Isomorphismen in der oberen Hälfte des Diagrammes kommen vom Ausschneidungssatz, Theorem 5.25, genauso wie im Beweis von Theorem 5.34 (Invarianz der Dimension). Da für  $p \in \mathbb{S}^n$  aufgrund der Voraussetzung  $n > 0$  aber  $H_n(\mathbb{S}^n \setminus \{p\}) \cong 0$  folgt, liefert die lange exakte Sequenz von Paaren die beiden Isomorphismen im unteren Teil des Diagrammes (In Dimension  $n = 1$  ist noch die folgende Zusatzüberlegung nötig: Zunächst einmal ist  $H_0(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{p\}) \cong 0$ , wie man beispielsweise aus der langen exakten Homologiesequenz für Tripel sieht. Daher ist  $\mathbb{Z} \cong H_0(\mathbb{S}^n \setminus \{p\}) \rightarrow H_0(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  ein Isomorphismus

und somit  $H_1(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{p\}) \rightarrow H_0(\mathbb{S}^n \setminus \{p\})$  die Nullabbildung. Also ist auch hier  $H_1(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_1(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{p\})$  ein Isomorphismus.). Mit Hilfe dieser vier Isomorphismen sehen wir, dass die beiden Gruppen  $H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$  und  $H_n(V, V \setminus \{y\})$  isomorph zu  $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  sind. Also ist die Abbildung  $f_*$  in der obersten Zeile des Diagrammes vermöge dieser Identifikation gerade eine Multiplikation mit einer Zahl in  $\mathbb{Z}$ . Wir nennen diese Zahl den **lokalen Abbildungsgrad** von  $f$  in  $x_i$  und bezeichnen ihn mit  $\deg f|_{x_i}$ . (Beachte insbesondere, dass die Kommutativität des obigen Diagrammes nicht impliziert, dass der lokale Abbildungsgrad mit dem Abbildungsgrad übereinstimmen muss. Beachte weiterhin, dass die Kommutativität des gesamten Diagrammes nicht zwangsläufig aus der Kommutativität der einzelnen Kästchen folgt. Hier ist dies jedoch hinreichend. Möglich ist die Situation des folgenden Diagrammes

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 1} & \mathbb{Z} \\
 & \swarrow \times 1 & \downarrow i_1 & & \downarrow \times 1 \\
 \mathbb{Z} & \xleftarrow{p_1+p_2} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{p_1+2p_2} & \mathbb{Z} \\
 & \searrow \times 1 & \uparrow i_2 & & \uparrow \times 1 \\
 & & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z}
 \end{array}$$

wobei  $p_j$  die Projektion auf die  $j$ -te Komponente und  $i_j$  die Injektion in die  $j$ -te Komponente bezeichnen.)

Der lokale Abbildungsgrad ist aufgrund des Ausschneidungssatzes nicht von der speziellen Wahl der Umgebungen  $U_i$  abhängig. Für die Unabhängigkeit von der Wahl von  $V$  argumentiert man analog. Zu Umgebungen  $U_i$  und  $W_i$  finden wir einen kleinen offenen Ball  $B$  um  $x_i$ , so dass  $\overline{B} \subset U_i$  und  $\overline{B} \subset W_i$  gelten. Wir erhalten dann aufgrund des Ausschneidungssatzes das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) & & \\
 \cong \uparrow & \searrow f_* & \\
 H_n(B, B \setminus \{x_i\}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V \setminus \{y\})
 \end{array}$$

was die Wohldefiniertheit zeigt, da  $\deg_{U_i} f|_{x_i} = \deg_B f|_{x_i}$  gilt und wir analog auch  $\deg_{W_i} f|_{x_i} = \deg_B f|_{x_i}$  erhalten.

**Bemerkung 7.8.** Sei  $f$  nun zusätzlich ein Homöomorphismus. Dann gibt es für jeden Punkt  $y$  genau einen Punkt  $x_i$  mit  $f(x_i) = y$ . Dann sind alle Abbildungen im obigen Diagramm Isomorphismen (wir können sogar die oberste Zeile weglassen bzw.  $V = \mathbb{S}^n$  und  $U_i = \mathbb{S}^n$  wählen) und es gilt  $\deg f|_{x_i} = \deg f = \pm 1$ . (Das Ergebnis muss  $\pm 1$  sein, da  $f^{-1}$  existiert.) Bildet allgemeiner  $f$  jede Menge  $U_i$  homöomorph auf  $V$  ab, dann gilt  $\deg f|_{x_i} = \pm 1$  (oder  $\mp 1$ ) für alle  $i$ . (Die Begründung für  $\pm 1$  ist hier wieder analog zu oben mit Hilfe der Existenz einer Inversen. Die Surjektivität der Einschränkung von  $f$  kann man auch durch Verkleinern der beteiligten Mengen künstlich herstellen.) (Das Vorzeichen kann man häufig in Anwendungen aufgrund der Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades bestimmen.)

Lokaler Abbildungsgrad und Abbildungsgrad hängen wie folgt zusammen:

**Proposition 7.9.** *In der Situation von Definition 7.7 gilt*

$$\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}.$$

*Beweis.* Aufgrund des Ausschneidungssatzes ist

$$H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus f^{-1}(\{y\})) \cong \bigoplus_i H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \cong \bigoplus_i \mathbb{Z},$$

wobei wir benutzt haben, dass die Mengen  $U_i$  disjunkt sind, um die direkte Summe zu erhalten.  $k_i$  ist dann gerade die Inklusionsabbildung für den  $i$ -ten Summanden, induziert von  $(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \hookrightarrow (\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus f^{-1}(\{y\}))$ . Das obere Dreieck kommutiert und somit sind  $p_i$  die Abbildungen des  $i$ -ten direkten Summanden auf  $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{x_i\})$ . Wie bisher identifizieren wir die äußeren Gruppen im obigen kommutativen Diagramm mit  $\mathbb{Z}$ . Die Kommutativität des unteren Dreiecks impliziert  $p_i j(1) = 1$ , also muss in  $j(1)$  aufgrund der Ausschneidungseigenschaft  $(H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \cong H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{x_i\}))$  vermöge der auf den  $i$ -ten Summanden eingeschränkten Abbildung  $p_i$  in jeder Komponente eine Eins stehen,  $j(1) = (1, \dots, 1)$ . Also ist  $j(1) = (1, \dots, 1) = \sum_i k_i(1)$ . Das obere Quadrat ist kommutativ. Also bildet die mittlere Abbildung  $f_*$  das Element  $k_i(1)$  auf  $\deg f|_{x_i}$  ab und somit wird  $\sum_i k_i(1) = j(1)$  auf  $\sum_i \deg f|_{x_i}$  abgebildet. Da  $f_*$  in der untersten Zeile 1 auf  $\deg f$  abbildet, folgt  $\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}$ .  $\square$

Vergleiche dies mit der folgenden Definition aus der nichtlinearen Funktionalanalysis [1], wo man mit Hilfe einer analogen Formel den Abbildungsgrad definiert.

**Definition 7.10.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Für einen regulären Wert  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  von  $f|_{\Omega}$  definieren wir den Brouwer-Grad

$$G(f, \Omega, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} \det df(x).$$

Wir wollen Proposition 7.9 benutzen, um nachzuweisen, dass es für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  und jedes  $n > 0$  eine Abbildung mit Abbildungsgrad  $k$  gibt.

**Beispiel 7.11.** Sei  $n \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Wir wollen ohne Einschränkung annehmen, dass  $k > 0$  ist. Im Falle  $k < 0$  genügt es, an geeigneter Stelle im Beweis zusätzliche Reflektionen einzubauen und im Falle  $k = 0$  genügt es, eine konstante Abbildung zu betrachten. Sei  $q : \mathbb{S}^n \rightarrow \bigvee_{i=1}^k \mathbb{S}^n$  die Quotientenabbildung, die das Komplement von  $k$  disjunkten offenen Kugeln  $B_i$  in  $\mathbb{S}^n$  zu einem Punkt identifiziert und aus jeder Kugel (zusammen mit dem Punkt, der bei der Identifikation des Komplementes der offenen Kugeln entsteht) eine  $\mathbb{S}^n$  macht. Sei  $p : \bigvee_{i=1}^k \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  eine Abbildung, die alle Sphären mit einer einzigen Sphäre identifiziert, „ $\mathbb{S}^n \times \{i\} \rightarrow \mathbb{S}^n$ “. Betrachte die Abbildung  $f := pq$ . Für fast alle  $y \in \mathbb{S}^n$  (nämlich gerade für alle, die nicht dem identifizierten Punkt aus der Einpunktvereinigung entsprechen; es gilt also für alle Punkte bis auf einen) besteht  $f^{-1}(y)$  aus je einem Punkt  $x_i \in B_i$ . Eingeschränkt auf eine geeignete Umgebung von  $x_i$  (z.B. auf  $B_i$  und mit einer entsprechenden Einschränkung im Bild) ist  $f$  ein Homöomorphismus. Daher ist  $\deg f|_{x_i} = \pm 1$ . Falls nötig wenden wir vor  $p$  noch eine Reflektion der entsprechenden Sphären  $\mathbb{S}^n$

in  $\bigvee_{i=1}^k \mathbb{S}^n$  an und erhalten  $\deg f|_{x_i} = 1$  für alle  $i$  (oder  $= -1$ ). Proposition 7.9 liefert nun  $\deg f = \sum_{i=1}^k \deg f|_{x_i} = \sum_{i=1}^k 1 = k$  und wir haben wie gewünscht eine Abbildung mit Abbildungsgrad  $k$  konstruiert.

**Beispiel 7.12.** Betrachte  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ . Sei  $k \in \mathbb{Z}$ . Wir behaupten, dass die Abbildung  $f(z) := z^k$  den Abbildungsgrad  $\deg f = k$  besitzt. Für  $k = 0$  ist dies offensichtlich, denn dann ist  $f$  konstant, also insbesondere nicht surjektiv. Durch Komposition mit  $z \mapsto z^{-1}$ , einer Spiegelung, dürfen wir annehmen, dass  $k > 0$  ist. Sei  $y \in \mathbb{S}^1$ . Für jedes  $y \in \mathbb{S}^1$  besteht  $f^{-1}(y)$  aus  $k$  Punkten  $x_1, \dots, x_k$ . Wenn wir  $f$  auf eine kleine Umgebung eines dieser Punkte  $x_i$  einschränken, ist  $f$  ein Homöomorphismus, der um den Faktor  $k$  streckt und dreht. Durch lokales Homotopieren von  $f$ , das den lokalen Abbildungsgrad von  $f$  nicht verändert, können wir die Streckung wegdeformieren. (Dies folgt aus der Homotopieinvarianz und aufgrund des Ausschneidungssatzes.) Also stimmt der lokale Abbildungsgrad mit dem lokalen Abbildungsgrad einer Rotation überein. Eine Rotation ist ein Homöomorphismus, also stimmen ihr lokaler (Abbildungsgrad) und (globaler) Abbildungsgrad überein. Weiterhin ist eine Rotation homotop zur Identität, besitzt also den Abbildungsgrad  $+1$ . Also gilt  $\deg f|_{x_i} = 1$  für alle  $i = 1, \dots, k$  und wir erhalten nach Proposition 7.9, dass  $\deg f = k$  gilt.

Für beliebige Sphären  $\mathbb{S}^n$ ,  $n \geq 1$ , erhalten wir Abbildungen mit dem (lokalen) Abbildungsgrad (in einem speziellen Punkt, hier einem der Pole, falls  $n \geq 2$ ) auch mit Hilfe von Suspensionen der Abbildungen  $z \mapsto z^k$  aus Beispiel 7.12.

**Definition 7.13.** Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Sei  $\mathcal{C}X := (X \times I)/(X \times \{1\})$  der Kegel von  $X$ . Wir definieren die von  $f$  induzierte Abbildung  $\mathcal{C}f : \mathcal{C}X \rightarrow \mathcal{C}Y$  vertreterweise (d. h. von  $X \times I$  nach  $Y \times I$  ohne Quotientenbildung) durch

$$\mathcal{C}f(x, t) := (f(x), t).$$

Analog definieren wir die **Suspension** von  $f$ ,  $Sf : SX \rightarrow SY$ , vertreterweise durch  $Sf(x, t) := (f(x), t)$ . Beachte, dass diese Abbildungen jeweils auf den Kegeln bzw. Suspensionen wieder wohldefiniert und stetig sind.

Der Übergang zur Suspension erhält den Abbildungsgrad, was die obige Behauptung zeigt, dass der (lokale) Abbildungsgrad (für  $n \geq 2$ ) beliebige Werte aus  $\mathbb{Z}$  annehmen kann:

**Proposition 7.14.** Sei  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  stetig und  $Sf : \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  die Suspension von  $f$ . Dann gilt  $\deg Sf = \deg f$ .

*Beweis.* Wir haben hier  $S\mathbb{S}^n$  und  $\mathbb{S}^{n+1}$  identifiziert.

Bezeichne  $\mathcal{C}\mathbb{S}^n$  den Kegel  $(\mathbb{S}^n \times I)/(\mathbb{S}^n \times \{1\})$  und identifiziere die Basis wie folgt mit  $\mathbb{S}^n$ :  $\mathbb{S}^n \equiv \mathbb{S}^n \times \{0\} \subset \mathcal{C}\mathbb{S}^n$ . Dann ist  $\mathcal{C}\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^n$  die Suspension von  $\mathbb{S}^n$ . Die induzierte Abbildung  $\mathcal{C}f : (\mathcal{C}\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n) \rightarrow (\mathcal{C}\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n)$ , die auf dem zweiten Faktor mit  $f$  übereinstimmt, ohne die Notation  $\mathcal{C}f$  abzuändern, induziert auf dem Quotientenraum  $\mathbb{S}^{n+1} \simeq S\mathbb{S}^n = \mathcal{C}\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^n$  gerade die Suspension  $Sf$  der Abbildung  $f$ . Nach Kapitel 5.3 ist die lange exakte Homologiesequenz für Paare aus Bemerkung 5.17 natürlich. Wir wenden dies auf  $(\mathcal{C}\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n)$  an und erhalten den rechten Teil des

folgenden kommutativen Diagrammes

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \partial & & \\
 & & \cong & & \\
 \tilde{H}_{n+1}(\mathbb{S}^{n+1}) & \xleftarrow{\cong} & H_{n+1}(\mathcal{CS}^n, \mathbb{S}^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \\
 \downarrow (Sf)_* & & \downarrow (Cf)_* & & \downarrow f_* \\
 \tilde{H}_{n+1}(\mathbb{S}^{n+1}) & \xleftarrow{\cong} & H_{n+1}(\mathcal{CS}^n, \mathbb{S}^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \\
 & & \partial & & \\
 & & \cong & & 
 \end{array}$$

Hier haben wir links bereits  $\mathbb{S}\mathbb{S}^n$  und  $\mathbb{S}^{n+1}$  identifiziert und auch für  $Sf$  keine neue Notation eingeführt. Die beiden Pfeile nach links sind von der Quotientenabbildung induziert und nach Proposition 5.29 Isomorphismen, da es sich um gute Paare handelt. Schließlich ist  $\partial$  (gerader Pfeil) ein Isomorphismus, da  $\tilde{H}_i(\mathcal{CS}^n) \cong 0$  für alle  $i$  gilt, da ein Kegel über einer Menge stets kontrahierbar ist. Benutzen wir die Identifikation von  $\mathbb{S}\mathbb{S}^n$  und  $\mathbb{S}^{n+1}$  und Proposition 5.29, so erhalten wir die gekrümmten Pfeile und brauchen ab jetzt nur noch die äußeren Pfeile zu betrachten. Die Kommutativität des obigen Diagrammes liefert also, dass  $f_*$  und  $Sf_*$  Multiplikationen mit der gleichen Zahl sind. Somit stimmen die beiden Abbildungsgrade wie behauptet überein.  $\square$

*Aufgaben.*

**Aufgabe 7.1.** Betrachte stetige Abbildungen  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  für  $n \geq 1$ .

- (i) Gib eine stetige surjektive Abbildung  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  an, so dass  $f_* : H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n)$  die Nullabbildung ist.
- (ii) Sei  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  stetig. Zeige, dass  $f$  homotop zu einer Abbildung ist, die einen Fixpunkt besitzt.

**Aufgabe 7.2.** Sei  $f : D^n \rightarrow D^n$  stetig. Zeige, dass  $f$  einen Fixpunkt besitzt, also den Brouwerschen Fixpunktsatz erfüllt, indem du mit Hilfe von  $f$  eine Abbildung  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  konstruierst, die die gesamte Sphäre auf die „südliche“ Hemisphäre abbildet und dann den Abbildungsgrad benutzt. (Solch einen Beweis hat auch Brouwer angegeben.)

**Aufgabe 7.3.** Sei  $f : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$  eine stetige Abbildung. Zeige, dass es einen Punkt  $x \in \mathbb{S}^{2n}$  gibt, so dass entweder  $f(x) = x$  oder  $f(x) = -x$  gilt. Schließe daraus, dass jede stetige Abbildung  $\mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  einen Fixpunkt besitzt. Benutze lineare Abbildungen  $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , um eine Abbildung  $\mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$  zu konstruieren, so dass weder  $f$  noch  $-f$  einen Fixpunkt besitzt.

**Aufgabe 7.4.** Eine Reflektion des  $\mathbb{R}^{n+1}$  an einer  $n$ -dimensionalen Hyperebene durch den Ursprung induziert eine Abbildung  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ . Seien  $A, B : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  zwei solche Abbildungen. Zeige, dass  $A$  und  $B$  homotop sind. Es genügt sogar, eine Homotopie  $f_t$  zu benutzen, so dass jede Abbildung  $f_t$  wie beschrieben von einer Reflektion induziert ist. (Es könnte nützlich sein, eine Reflektion zunächst mit Hilfe des Skalarproduktes zu beschreiben.)

## 8. ZELLULÄRE HOMOLOGIE

Für CW-Komplexe kann man mit Hilfe des Abbildungsgrades sehr effizient Homologiegruppen ausrechnen. Dazu benötigen wir zunächst das folgende technische Lemma.

**Lemma 8.1.** *Sei  $X$  ein CW-Komplex. Dann gilt*

- (i)  $H_k(X^n, X^{n-1}) \cong 0$  für  $k \neq n$ .  $H_n(X^n, X^{n-1})$  ist eine freie abelsche Gruppe, deren Erzeuger bijektiv auf die  $n$ -Zellen von  $X$  abgebildet werden können.
- (ii)  $H_k(X^n) \cong 0$  für  $k > n$ . Insbesondere gilt  $H_k(X) \cong 0$ , falls  $X$  ein endlichdimensionaler CW-Komplex ist und  $k > \dim X$  gilt.
- (iii) Ist  $k < n$ , so induziert die Inklusion  $i : X^n \hookrightarrow X$  einen Isomorphismus  $i_* : H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ .

*Beweis.*

- (a)  $(X^n, X^{n-1})$  ist ein gutes Paar und  $X^n/X^{n-1}$  ist homöomorph zu einer Einpunktvereinigung von  $n$ -dimensionalen Sphären und zwar von einer  $n$ -Sphäre pro  $n$ -Zelle. Nach Proposition 5.29 gilt  $H_k(X^n, X^{n-1}) \cong \tilde{H}_k(X^n/X^{n-1})$ . Der obige Homöomorphismus liefert  $\tilde{H}_k(X^n/X^{n-1}) \cong \tilde{H}_k\left(\bigvee_l \mathbb{S}^n\right)$  für  $l$  in einer geeigneten Indexmenge und nach Korollar 5.33 ist  $\tilde{H}_k\left(\bigvee_l \mathbb{S}^n\right) \cong \bigoplus_l \tilde{H}_k(\mathbb{S}^n)$ . Nun ist  $\tilde{H}_k(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  für  $k = n$  und  $\cong 0$  für  $k \neq n$ . Die Behauptung (i) folgt also.

- (b) Die lange exakte Sequenz für Paare, Theorem 5.12, enthält

$$H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^n, X^{n-1}).$$

Sei zunächst  $k \neq n$ ,  $k \neq n - 1$ . Dann verschwinden die beiden äußeren Gruppen in dieser Sequenz nach (i). Wir erhalten also Isomorphismen  $H_k(X^{n-1}) \cong H_k(X^n)$ , falls  $k \neq n$ ,  $k \neq n - 1$ .

Ist  $k > n$  (also insbesondere  $k > 0$ ), so erhalten wir daraus  $H_k(X^n) \cong H_k(X^{n-1}) \cong H_k(X^{n-2}) \cong \dots \cong H_k(X^0) \cong 0$  und (ii) folgt.

- (c) Ist  $k < n$ , so folgt für alle  $m \geq 0$ , dass  $H_k(X^n) \cong H_k(X^{n+1}) \cong \dots \cong H_k(X^{n+m})$  gilt. Dies zeigt (iii), falls  $X$  ein endlichdimensionaler CW-Komplex ist.

(Lediglich die folgenden Gruppen brauchen also nicht isomorph zu beiden „Nachbarn“ zu sein:  $H_k(X^{k+1})$ ,  $H_k(X^k)$  und  $H_k(X^{k-1})$ .)

Beachte, dass die obigen Isomorphismen jeweils von den Inklusionsabbildungen  $X^{n-1} \hookrightarrow X^n$  induziert sind.

- (d) Es bleibt also noch, (iii) für unendlichdimensionale CW-Komplexe  $X$  nachzuweisen. Eine singuläre Kette in  $X$  hat ein kompaktes Bild, trifft also nach [2, Appendix A.1] nur das Innere von endlich viele Zellen des CW-Komplexes  $X$ . Daher liegt jede singuläre Kette in einem endlichen Skelett  $X^m$ .

Sei  $\alpha$  ein  $k$ -Zykel in  $X$ . Dann ist  $\alpha$  also auch ein  $k$ -Zykel in einem  $X^m$  für  $m$  genügend groß; wir dürfen  $m > n$  annehmen. Aufgrund der Isomorphismen aus der endlichdimensionalen Variante von (iii) ist  $\alpha$  homolog zu einem Zykel in  $X^n$ . Also kommt jeder  $k$ -Zykel in  $X$  von einem  $k$ -Zykel in  $X^n$ , falls  $n > k$  ist. Somit ist  $i_* : H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$  surjektiv.

Die Argumentation für die Injektivität funktioniert analog. Sei  $\alpha$  ein  $k$ -Zykel in  $X^n$  mit  $[\alpha] \in \ker i_*$ . Nehme an, dass  $\alpha = \partial\beta$  für einen  $(k+1)$ -Zykel in  $X$

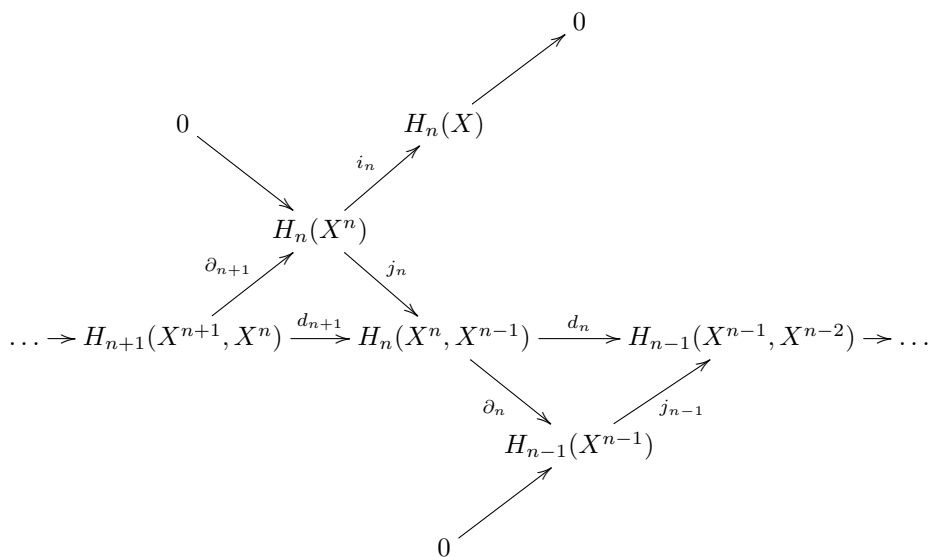


gilt. Dann liegt  $\beta$  in einem  $X^m$  für geeignetes großes  $m \geq n$ . Also ist  $[\alpha]$  auch schon im Kern der Abbildung  $H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^m)$ . Diese Abbildung ist aber ein Isomorphismus. Somit ist  $[\alpha] = 0$  in  $H_k(X^n)$  und (iii) folgt auch für unendlichdimensionale CW-Komplexe.  $\square$

Für die Paare  $(X^{n+1}, X^n)$ ,  $(X^n, X^{n-1})$  und  $(X^{n-1}, X^{n-2})$  erhalten wir aus den langen exakten Sequenzen aus Theorem 5.12 mit Hilfe von Lemma 8.1

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(X^n) & \longrightarrow & H_n(X^{n+1}) & \longrightarrow & H_n(X^{n+1}, X^n), \\
 & & & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 & & & & H_n(X) & & 0 \\
 \\ 
 H_n(X^{n-1}) & \longrightarrow & H_n(X^n) & \xrightarrow{j_n} & H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(X^{n-1}), \\
 \downarrow \cong & & & & & & \\
 0 & & & & & & \\
 \\ 
 H_{n-1}(X^{n-2}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{j_{n-1}} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}). \\
 \downarrow \cong & & & & & & \\
 0 & & & & & & 
 \end{array}$$

Diese Teile aus exakten Sequenzen von Paaren bauen wir nun in ein gemeinsames Diagramm ein.



Dieses Diagramm machen wir kommutativ, indem wir  $d_n := j_{n-1}\partial_n$  für alle  $n$  definieren. Nach Bemerkung 5.15 ist der obige Randoperator  $\partial$  mit Hilfe eines Randoperators für  $n$ -Ketten definiert. Daher treten in  $d_n d_{n+1}$  zwei solche Randoperatoren auf und da  $j$  von Projektionsabbildungen induziert ist, folgt  $d_n d_{n+1} = 0$  für alle  $n$ . Also ist die Zeile im obigen Diagramm ein Kettenkomplex. Die Kettengruppen  $H_n(X^n, X^{n-1})$  sind aufgrund der Überlegungen beim Beweis der Äquivalenz von singulärer und simplizialer Homologie von den  $n$ -Zellen in  $X$  erzeugt und frei, siehe

Kapitel 6. Daher bezeichnen wir diesen Kettenkomplex als **zellulären Kettenkomplex**. Die Homologiegruppen dieses Kettenkomplexes heißen **zelluläre Kettengruppen** von  $X$ . Wir bezeichnen sie mit  $H_n^{CW}(X)$ , lassen den Index CW aber gleich wieder weg, denn es gilt

**Theorem 8.2.** *Sei  $X$  ein CW-Komplex. Dann gilt  $H_n^{CW}(X) \cong H_n(X)$ .*

*Beweis.* Aufgrund des obigen Diagrammes können wir die Gruppen  $H_n(X)$  und  $H_n(X^n)/\text{im } \partial_{n+1}$  identifizieren. Da  $i_n$  surjektiv und die Sequenz exakt ist, gilt  $H_n(X^n)/\text{im } \partial_{n+1} = H_n(X^n)/\ker i_n \cong \text{im } i_n = H_n(X)$ . Die Abbildung  $j_n$  ist injektiv, bildet also im  $\partial_{n+1}$  isomorph auf  $\text{im}(j_n \partial_{n+1}) = \text{im } d_{n+1}$  ab. Weiterhin bildet sie aufgrund der Exaktheit  $H_n(X^n)$  isomorph auf  $\text{im } j_n = \ker \partial_n$  ab. Auch  $j_{n-1}$  ist injektiv. Somit haben  $\partial_n$  und  $j_{n-1} \partial_n = d_n$  denselben Kern, es folgt also  $\ker \partial_n = \ker d_n$ . Zusammengenommen induziert  $j_n$  also einen Isomorphismus  $H_n(X^n)/\text{im } \partial_{n+1} \cong \ker \partial_n / \text{im } d_{n+1} = \ker d_n / \text{im } d_{n+1} \cong H_n^{CW}(X)$ . Aufgrund der allerersten Identifikation im Beweis erhalten wir also  $H_n(X) \cong H_n^{CW}(X)$  wie behauptet.  $\square$

**Bemerkung 8.3.** Wir erhalten direkt die folgenden Konsequenzen.

- (i) Ist  $X$  ein CW-Komplex ohne  $n$ -Zellen, so ist  $H_n(X) \cong 0$ , da die  $n$ -te zelluläre Kettengruppe  $H_n(X^n, X^{n-1})$  dann nach Lemma 8.1 trivial ist.
- (ii) Ist  $X$  ein CW-Komplex mit  $k$   $n$ -Zellen, so lässt sich  $H_n(X)$  mit  $k$  oder weniger Elementen erzeugen. (Wie bei der ersten Behauptung folgt dies, denn wenn  $H_n(X^n, X^{n-1})$  von  $k$  Elementen erzeugt ist, so sind  $\ker d_n$  und  $\ker d_n / \text{im } d_{n+1}$  von  $k$  oder weniger Elementen erzeugt.)
- (iii) Ist  $X$  ein CW-Komplex ohne Zellen in den Dimensionen  $n+1$  und  $n-1$ , so ist  $H_n(X)$  eine freie abelsche Gruppe deren Erzeuger gerade den  $n$ -Zellen von  $X$  entsprechen. Dies liegt daran, dass in diesem Falle  $X^{n+1} = X^n$  und  $X^{n-1} = X^{n-2}$  gelten und somit der relevante Teil des zellulären Kettenkomplexes gerade die Gestalt  $0 \cong H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \rightarrow H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \cong 0$  hat.

**Aufgabe 8.1.** Benutze die letzte Beobachtung in Bemerkung 8.3, um die Homologiegruppen von  $\mathbb{C}P^n$  zu bestimmen: Stelle  $\mathbb{C}P^n$  als CW-Komplex mit jeweils genau einer Zelle in jeder geraden Dimension  $\leq 2n$  dar und schließe daher, dass

$$H_i(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } i = 0, 2, 4, \dots, 2n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Stelle  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$  als CW-Komplex mit genau einer 0-Zelle, zwei  $n$ -Zellen und einer  $2n$ -Zelle dar. Berechne  $H_i(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n)$ . (Der Fall  $n = 1$  braucht nicht mehr zu behandelt werden, denn ...)

Hier ist jeweils auch zu begründen, warum die topologischen Räume homöomorph zu einem CW-Komplex mit der angegebenen Zellenzahl sind.

Um etwas ausrechnen zu können müssen wir insbesondere noch die Randabbildungen kennen. Betrachten wir zunächst  $d_1 : H_1(X^1, X^0) \rightarrow H_0(X^0)$ . Erzeuger von  $H_1(X^1, X^0)$  sind gerade (bis auf einen Isomorphismus) die 1-Zellen und da in Dimension 1 die Definitionen für CW-Komplexe und  $\Delta$ -Komplexe übereinstimmen, gerade  $\cong \Delta_1(X)$ . Wir hatten  $d_1$  so definiert, dass das folgende Diagramm

kommutativ wird

$$\begin{array}{ccc} H_1(X^1, X^0) & \xrightarrow{d_1} & H_0(X^0). \\ & \searrow \partial_1 & \nearrow j_0 \\ & & H_0(X^0) \end{array}$$

Daher ist  $d_1$  gerade die Randabbildung  $\Delta_1(X) \rightarrow \Delta_0(X)$  des  $\Delta$ -Komplexes  $X^1$ .

Im Spezialfall, dass  $X$  genau eine 0-Zelle besitzt (und daher zusammenhängend ist), ist  $d_1 = 0$ , da (geometrische Begründung) alle 1-Zellen an beiden Seiten an diese 1-Zelle angeklebt werden oder da (algebraische Begründung) sonst  $H_0^{CW}(X) = H_0(X^0)/\text{im } d_1 \cong \mathbb{Z}/\text{im } d_1 \not\cong H_0(X) \cong \mathbb{Z}$  wäre.

Falls  $n > 1$  ist, erhalten wir die Randabbildungen aus dem folgenden

**Lemma 8.4.** *Sei  $n > 1$ . Es gilt*

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta} d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1},$$

wobei  $d_{\alpha\beta}$  der Abbildungsgrad der Abbildung

$$\mathbb{S}_\alpha^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}_\beta^{n-1}$$

ist, die sich aus der anheftenden Abbildung von  $e_\alpha^n$  und der Quotientenabbildung, unter der  $X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}$  zu einem Punkt kollabiert, zusammensetzt.

*Beweis.* Wir identifizieren hier die Zellen  $e_\alpha^n$  und  $e_\beta^{n-1}$  mit Erzeugern der jeweiligen Summanden der zellulären Kettengruppen. Die anheftende Abbildung für eine Zelle  $e_\alpha^n$  hat kompaktes Bild, trifft also nach [2, Proposition A.1] nur endlich viele  $(n-1)$ -dimensionale Zellen  $e_\beta^{n-1}$  in ihrem Inneren, so dass sich ein nichttrivialer Abbildungsgrad ergeben kann. Daher ist die angegebene Summe endlich.

Um die angegebene Formel herzuleiten, betrachten wir das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(\partial D_\alpha^n) & \xrightarrow{\Delta_{\alpha\beta^*}} & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}_\beta^{n-1}) \\ \downarrow \Phi_{\alpha^*} & & \downarrow \varphi_{\alpha^*} & & \uparrow q_{\beta^*} \\ H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{q^*} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \\ & \searrow d_n & \downarrow j_{n-1} & & \downarrow \cong \\ & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}, X^{n-2}/X^{n-2}), \end{array}$$

wobei

- $\Phi_\alpha$  die charakteristische Abbildung der Zelle  $e_\alpha^n$  und  $\varphi_\alpha$  ihre anheftende Abbildung ist.
- $q : X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/X^{n-2}$  die Projektionsabbildung auf den Quotienten ist.
- die Abbildung  $q_\beta : X^{n-1}/X^{n-2} \rightarrow \mathbb{S}_\beta^{n-1}$  das Komplement der offenen Zelle  $e_\beta^{n-1}$  auf einen Punkte abbildet. Das Ergebnis ist ein topologischer Raum homöomorph zu einer Sphäre  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Vermöge der charakteristischen Abbildung  $\Phi_\beta$  identifizieren wir sie mit  $\mathbb{S}_\beta^{n-1} = D_\beta^{n-1}/\partial D_\beta^{n-1}$ .

- die Abbildung  $\Delta_{\alpha\beta} : \partial D_\alpha^n \rightarrow \mathbb{S}_\beta^{n-1}$  als  $\Delta_{\alpha\beta} := q_\beta q \varphi_\alpha$  definiert ist. Damit ist das obige Quadrat per definitionem kommutativ.  $\Delta_{\alpha\beta}$  kann auch als Komposition der anheftenden Abbildung für  $e_\alpha^n$  mit der Quotientenabbildung  $X^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}_\beta^{n-1}$  aufgefasst werden, wobei bei der Quotientenbildung das Komplement von  $e_\beta^{n-1}$  in  $X^{n-1}$  auf einen Punkt abgebildet wird.

Das Quadrat links oben ist kommutativ, da die vertikalen Pfeile von der charakteristischen und der anheftenden Abbildung her kommen und die horizontalen Pfeile von Randabbildungen herkommen. Benutze dann die Natürlichkeit der reduzierten langen exakten Homologiesequenz für Paare. Das Quadrat rechts unten ist offensichtlich kommutativ und das rechts oben nach Definition. Das Dreieck links unten ist ein Teil des Diagrammes in der Definition der Randabbildungen  $d_n$  für die zelluläre Homologie. Beachte hierbei stets, dass wir zur Zeit  $n > 1$  annehmen, wir also reduzierte oder nicht reduzierte Homologiegruppen verwenden können. Die beiden Isomorphismen rechts unten sind klar, der links oben folgt aus der reduzierten langen exakten Homologiesequenz für Paare, da die reduzierten Homologiegruppen von  $D_\alpha^n$  trivial sind.

Sei also  $[D_\alpha^n] \in H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) \cong \mathbb{Z}$  ein Erzeuger. Die Abbildung  $\Phi_{\alpha*}$  bildet diesen auf einen Erzeuger des Summanden  $\mathbb{Z}$  der Gruppe  $H_n(X^n, X^{n-1})$  ab, der der Zelle  $e_\alpha^n$  entspricht. Bezeichne diesen Erzeuger mit  $e_\alpha^n$ ; also gilt  $\Phi_{\alpha*}[D_\alpha^n] = e_\alpha^n$ . Die Kommutativität des linken Teils des obigen Diagrammes liefert

$$d_n(e_\alpha^n) = j_{n-1} \varphi_{\alpha*} \partial [D_\alpha^n].$$

Wähle für  $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$  eine Basis, die den Zellen  $e_\beta^{n-1}$  entspricht. Dann ist die Abbildung  $q_{\beta*}$  die Projektion von  $H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})$  auf den Summanden  $\mathbb{Z} \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}_\beta^{n-1})$ , der gerade  $e_\beta^{n-1}$  entspricht. (Für  $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$  und  $\tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})$  können wir dabei dieselben Erzeuger wählen und brauchen diese Gruppen daher nicht zu unterscheiden.) Nach Korollar 5.33 ist  $d_n(e_\alpha^n)$  durch diese Bilder eindeutig bestimmt. Aufgrund der Kommutativität des obigen Diagrammes ist die  $e_\beta^{n-1}$  entsprechende Komponente von  $d_n(e_\alpha^n)$  durch  $\Delta_{\alpha\beta*} \partial [D_\alpha^n] = q_{\beta*} q \varphi_{\alpha*} \partial [D_\alpha^n]$  gegeben. (Beachte, dass  $\partial [D_\alpha^n]$  ein Erzeuger von  $\tilde{H}_{n-1}(\partial D_\alpha^n)$  ist.) Der Koeffizient in dieser Darstellung mit Erzeugern, die Zellen  $e_\beta^{n-1}$  entsprechen, kommt also gerade von der Abbildung  $\Delta_{\alpha\beta*} : \tilde{H}_{n-1}(\partial D_\alpha^n) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}_\beta^{n-1})$  und ist damit der oben beschriebene Abbildungsgrad.  $\square$

**Aufgabe 8.2.** Bestimme die zellulären Homologiegruppen der folgenden Räume:  $\mathbb{T}^2$ ,  $\mathbb{T}^3 \simeq (\mathbb{S}^1)^3$ ,  $\mathbb{R}P^2$ ,  $\mathbb{S}^n$ , Kleinsche Flasche,  $\mathbb{C}P^n$ .

## 9. EULERCHARAKTERISTIK

**Definition 9.1.** Sei  $X$  ein endlicher CW-Komplex, also ein CW-Komplex, der aus endlich vielen Zellen aufgebaut ist. Definiere die **Eulercharakteristik** von  $X$ ,  $\chi(X)$ , durch  $\chi(X) := \sum_n (-1)^n c_n$ , wobei  $c_n$  die Anzahl der  $n$ -Zellen in  $X$  bezeichnet.

**Definition 9.2.** Sei  $G$  eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Stelle  $G$  als direkte Summe zyklischer Gruppen dar. Die Anzahl der Summanden isomorph zu  $\mathbb{Z}$  heißt **Rang** von  $G$ ,  $\text{rang } G$ .

Es gilt

**Lemma 9.3.** Sei  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz endlich erzeugter abelscher Gruppen. Dann gilt  $\text{rang } B = \text{rang } A + \text{rang } C$ .

*Beweis.* Übung. □

Wir wollen nun nachweisen, dass  $\chi(X)$  homologisch definiert werden kann und daher nur vom Homotopietyp von  $X$  abhängt, insbesondere also von der gewählten CW-Struktur auf  $X$  unabhängig ist.

**Theorem 9.4.** Sei  $X$  ein endlicher CW-Komplex. Dann gilt

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n \text{rang } H_n(X).$$

*Beweis.* Das Theorem lässt sich algebraisch wie folgt umformulieren: Sei

$$0 \longrightarrow C_k \xrightarrow{d_k} C_{k-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

ein Kettenkomplex aus endlich erzeugten abelschen Gruppen. Dann wollen wir zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^k (-1)^i \text{rang } C_i = \sum_{i=1}^k (-1)^i \text{rang } H_i$$

gilt, wobei  $H_k$  die entsprechenden Homologiegruppen bezeichnet. Wenden wir dies auf den zellulären Kettenkomplex mit  $C_k = H_k(X^k, X^{k-1})$  an, so ist die linke Seite gerade die Eulercharakteristik, da  $H_k(X^k, X^{k-1})$  eine freie abelsche Gruppe ist, die von den  $k$ -Zellen erzeugt wird. Für die rechte Seite benutzen wir, dass nach Theorem 8.2 bei dieser Wahl der Gruppen  $C_k$  der zelluläre Kettenkomplex gerade Homologiegruppen liefert, die isomorph zu denen der singulären Homologie sind, also insbesondere denselben Rang wie diese haben.

Definiere also

- die Zyklen  $Z_n := \ker d_n$ ,
- die Ränder  $B_n := \text{im } d_{n+1}$ ,
- die Homologiegruppen  $H_n := Z_n/B_n$ .

Wir erhalten kurze exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0$$

und

$$0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n \rightarrow 0.$$

Diese entsprechen den kurzen exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow \ker d_n \rightarrow C_n \rightarrow \text{im } d_n \rightarrow 0$$

(was allgemein für Gruppenhomomorphismen  $d_n$  gilt) und

$$0 \rightarrow \text{im } d_{n+1} \rightarrow \ker d_n \rightarrow \ker d_n / \text{im } d_{n+1} \rightarrow 0$$

(was für Kettenabbildungen gilt). Für die Ränge der jeweiligen Gruppen folgt also

$$\begin{aligned} \text{rang } C_n &= \text{rang } Z_n + \text{rang } B_{n-1}, \\ \text{rang } Z_n &= \text{rang } B_n + \text{rang } H_n. \end{aligned}$$

Wir setzen die zweite Gleichung in die erste ein, summieren mit Vorfaktoren  $(-1)^n$ , benutzen, dass sich alle Bildränge gegenseitig aufheben, und erhalten

$$\sum_n (-1)^n \text{rang } C_n = \sum_n (-1)^n (\text{rang } B_n + \text{rang } B_{n-1} + \text{rang } H_n) = \sum_n (-1)^n \text{rang } H_n.$$

Das Theorem folgt. □

**Aufgabe 9.1.**

- (i) Bestimme die Eulercharakteristik für die Beispiele aus Aufgabe 8.2.
- (ii) Bestimme die Eulercharakteristik eines Fahrradvorderrades mit Schlauch, Felge, Speichen und Nabe.

10. MAYER-VIETORIS SEQUENZEN

Für Räume und Teilräume gibt es noch eine weitere wichtige exakte Sequenz, die Mayer-Vietoris Sequenz.

**Theorem 10.1.** *Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $A, B \subset X$  mit  $\text{int } A \cup \text{int } B = X$ . Dann ist die folgende Sequenz eine lange exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\Psi} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir verwenden den Kettenkomplex  $C_n(A+B)$  wie im Beweis von Theorem 5.25. Nach Proposition 5.28 induziert  $C_n(A+B) \hookrightarrow C_n(X)$  einen Isomorphismus der Homologiegruppen  $H_n(A+B) \cong H_n(X)$ . Die Mayer-Vietoris Sequenz ist nun die lange exakte Sequenz, die man mit Theorem 5.14 aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow C_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\psi} C_n(A+B) \longrightarrow 0$$

und dem obigen Isomorphismus bekommt. (Die Abbildungen sind in der langen exakten Sequenz in naheliegender Weise bezeichnet.) Die obige Sequenz ist dabei eine kurze exakte Sequenz, wenn wir  $\varphi(x) := (x, -x)$  und  $\psi(x, y) := x + y$  setzen: Zunächst ist  $\ker \varphi = 0$ , denn eine Kette in  $A \cap B$ , die in  $A$  (oder  $B$ ) verschwindet, verschwindet auch schon in  $A \cap B$ . Nach Definition von  $\varphi$  und  $\psi$  gilt  $\psi\varphi = 0$ , also ist  $\text{im } \varphi \subset \ker \psi$ . Zu  $\ker \psi \subset \text{im } \varphi$ : Sei  $(x, y) \in C_n(A) \oplus C_n(B)$ , so dass  $x + y = 0$  gilt und damit auch  $x = -y$ . Daher ist  $x \in C_n(A)$  und  $x \in C_n(B)$ , also gilt auch  $x \in C_n(A \cap B)$ . Nun ist  $\varphi(x) = (x, -x) = (x, y)$ . Daher ist jedes Element in  $\ker \psi$  auch in  $\text{im } \varphi$  und die Behauptung folgt. Die Exaktheit an der Stelle  $C_n(A+B)$  ist klar, da  $\psi$  offensichtlich surjektiv ist. Somit ist die angegebene kurze Sequenz exakt und das Theorem folgt. □

**Aufgabe 10.1.** Erweitere die kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen, die man erhält, wenn man die kurzen exakten Sequenzen aus dem Beweis von Theorem 10.1 übereinanderschreibt, wie folgt

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_0(A \cap B) & \xrightarrow{\varphi} & C_0(A) \oplus C_0(B) & \xrightarrow{\psi} & C_0(A+B) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \oplus \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

und erhalte daraus eine Mayer-Vietoris Sequenz für reduzierte Homologiegruppen, falls  $A \cap B \neq \emptyset$  ist, nämlich

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow \tilde{H}_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \xrightarrow{\Psi} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Die folgende Aufgabe lässt sich insbesondere auf CW-Komplexe und ihre Unterkomplexe anwenden.

**Aufgabe 10.2.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $A, B \subset X$  und gelte  $X = A \cup B$ . Seien  $U \supset A$  und  $V \supset B$  Umgebungen von  $A$  bzw.  $B$ , so dass

- $A$  Deformationsretrakt von  $U$ ,
- $B$  Deformationsretrakt von  $V$  und
- $A \cap B$  Deformationsretrakt von  $U \cap V$  ist.

Benutze das Fünferlemma, um zu zeigen, dass  $C_n(A + B) \rightarrow C_n(U + V)$  einen Isomorphismus auf der Ebene der Homologiegruppen erzeugt. Leite daraus eine Mayer-Vietoris Sequenz für  $A, B$  und  $X$  her.

**Beispiel 10.2.** Sei  $X = \mathbb{S}^n$  und seien  $A$  und  $B$  die abgeschlossene nördliche und südliche Hemisphäre. Dann gilt  $A \cap B \simeq \mathbb{S}^{n-1}$  ( $\simeq :=$  ist homöomorph zu). Nun ist  $\tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B) \cong 0$ , da  $A$  und  $B$  auf einen Punkt kontrahierbar sind. Sei nun  $n \geq 1$ . Wir erhalten für  $i \geq 1$  aus der Mayer-Vietoris Sequenz die Isomorphismen  $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ . Per Induktion kann man hieraus nochmals die Homologiegruppen der Sphären berechnen.

**Aufgabe 10.3.** Zerlege die Kleinsche Flasche in zwei Möbiusbänder und bestimme mit Hilfe einer Mayer-Vietoris Sequenz die Homologiegruppen der Kleinschen Flasche.

**Aufgabe 10.4.** Sei  $(X, Y) = (A \cup B, C \cup D)$  ein Paar topologischer Räume, so dass  $C \subset A, D \subset B, X = \text{int } A \cup \text{int } B$  und  $Y = \text{int } C \cup \text{int } D$  gelten. Dann ist die folgende lange relative Mayer-Vietoris Sequenz exakt:

$$\dots \rightarrow H_n(A \cap B, C \cap D) \xrightarrow{\Phi} H_n(A, C) \oplus H_n(B, D) \xrightarrow{\Psi} H_n(X, Y) \xrightarrow{\partial} \dots$$

Zeige dazu zunächst, dass in dem folgenden kommutativen Diagramm mit von Inklusionen induzierten Abbildungen alle Zeilen und Spalten exakt sind

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_n(C \cap D) & \xrightarrow{\varphi} & C_n(C) \oplus C_n(D) & \xrightarrow{\psi} & C_n(C + D) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_n(A \cap B) & \xrightarrow{\varphi} & C_n(A) \oplus C_n(B) & \xrightarrow{\psi} & C_n(A + B) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_n(A \cap B, C \cap D) & \xrightarrow{\varphi} & C_n(A, C) \oplus C_n(B, D) & \xrightarrow{\psi} & C_n(A + B, C + D) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Hierbei ist  $C_n(A + B, C + D)$  die Quotientengruppe aus  $C_n(A + B) \subset C_n(X)$  und  $C_n(C + D) \subset C_n(Y)$ . Komplizierter ist dabei die Exaktheit der dritten Zeile. Zeige dazu zunächst einmal, dass die dritte Zeile ein Kettenkomplex ist und folgere dann die Exaktheit mit Hilfe einer langen exakten Homologiesequenz.

Eine Einbettung hatten wir als stetige Abbildung definiert, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist.

**Proposition 11.1.**

- (i) Sei  $h : D^k \rightarrow \mathbb{S}^n$  eine Einbettung. Dann gilt  $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(D^k)) \cong 0$  für alle  $i$ .  
(ii) Sei  $h : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^n$  eine Einbettung und  $k < n$ . Dann ist

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{S}^k)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n - k - 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Als Folgerung erhalten wir den verallgemeinerten Jordanschen Kurvensatz:

**Korollar 11.2.** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  mit  $A \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ . Dann ist  $\mathbb{R}^n \setminus A$  die disjunkte Vereinigung von zwei offenen wegzusammenhängenden Mengen. Die Aussage bleibt auch richtig, wenn wir  $\mathbb{R}^n$  durch  $\mathbb{S}^n$  ersetzen.

Der Satz von Schönfliess besagt, dass jede Einbettung  $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^2$  äquivalent zur Standardeinbettung ist. Äquivalenz besagt hier, dass es einen Homöomorphismus von  $\mathbb{S}^2$  gibt, der das Bild von  $\mathbb{S}^1$  auf den Äquator abbildet.

Beachte aber, dass die Komplemente einer eingebetteten Sphäre  $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$  nicht einfach zusammenhängend sein müssen. Die Alexander-Sphäre liefert das entsprechende Gegenbeispiel.

In Dimension  $n = 4$  ist die entsprechende Aussage zum Satz von Schönfliess für glatte Einbettungen eine offene Vermutung, die Schönfliess Vermutung.

Einbettungen  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$  sind im allgemeinen nicht äquivalent zu Standardeinbettungen. Gegenbeispiele sind Knoten. Hieran sehen wir, dass Homologiegruppen (ohne zur universellen Überlagerung überzugehen) es nicht erlauben, Knoten zu unterscheiden, wie wir dies in Spezialfällen mit Hilfe der Fundamentalgruppe können.

Mit Hilfe von Theorem 11.4 folgt, dass es Einbettungen  $D^k \rightarrow \mathbb{S}^n$  oder  $\mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^n$  nur für  $k \leq n$  geben kann. Betrachte dazu die Einschränkung auf einen  $n$ -dimensionalen Unterraum. Dieser hat in  $\mathbb{S}^n$  schon ein offenes Bild. Damit lässt sich die Abbildung nicht stetig und injektiv in die Zusatzdimensionen fortsetzen.

*Beweis von Proposition 11.1.*

- (i) Wir beweisen das Resultat per Induktion nach  $k$ . Für  $k = 0$  ist  $\mathbb{S}^n \setminus h(D^0)$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  und das Resultat folgt. Wir führen den Induktionsschritt für  $I^k$  statt  $D^k$ . Setze  $A := \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times [0, \frac{1}{2}])$  und  $B := \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times [\frac{1}{2}, 1])$ . Es gilt  $A \cap B = \mathbb{S}^n \setminus h(I^k)$  und  $A \cup B = \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times \{\frac{1}{2}\})$ . Nach Induktionsannahme gilt  $\tilde{H}_i(A \cup B) \cong 0$  für alle  $i$ .  $A$  und  $B$  sind offene Mengen. Damit ist die Mayer-Vietoris Sequenz für  $A$  und  $B$  exakt. (Um die reduzierte Mayer-Vietoris Sequenz exakt zu machen, ist insbesondere nachzuweisen, dass  $A \cap B \neq \emptyset$  ist. Dies entspricht hier gerade dem Nachweis, dass  $h : D^k \rightarrow \mathbb{S}^n$  nicht surjektiv ist. Dies ist aber der Fall, da eine surjektive Einbettung ein Homöomorphismus ist, die Homologiegruppen von  $D^k$  und  $\mathbb{S}^n$  unabhängig von  $k$  und  $n$  jedoch nicht übereinstimmen.) Also ist  $\Phi : \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(I^k)) = \tilde{H}_i(A \cap B) \rightarrow \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B)$  für alle  $i$  ein Isomorphismus. Bis auf Vorzeichen induzieren die Inklusionen  $\mathbb{S}^n \setminus h(I^k) \hookrightarrow A$  und  $\mathbb{S}^n \setminus h(I^k) \hookrightarrow B$  die beiden Komponenten von  $\Phi$ . Gibt es also einen  $i$ -dimensionalen Zykel  $\alpha$  in  $\mathbb{S}^n \setminus h(I^k)$ , der kein Rand in  $\mathbb{S}^n \setminus h(I^k)$  ist, also einen Repräsentanten einer nichttrivialen Homologiekategorie, dann ist  $\alpha$  auch in  $A$  oder in  $B$  kein Rand (da es das Bild von  $\alpha$  unter der Inklusion ist, die den Isomorphismus  $\Phi$  induziert). (Im Falle  $i = 0$  ist „Rand“ im Sinne von erweiterten Kettenkomplexen zu verstehen, da der obige Isomorphismus reduzierte



Homologiegruppen verwendet.) Wir sind zu  $A$  und  $B$  gekommen, indem wir auf den letzten Faktor in  $I^k$  eine Intervallhalbierung angewandt haben. Iterieren wir nun dieses Argument, so erhalten wir eine geschachtelte Folge von Intervallen  $I = I_1 \supset I_2 \supset \dots$  mit  $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i = \{p\} \in I$  und  $\alpha$  ist in keiner der Mengen  $\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_m)$  für beliebiges  $m \in \mathbb{N}$  ein Rand. Da wir nach Induktionsvoraussetzung bereits wissen, dass  $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\})) \cong 0$  ist, ist  $\alpha$  in  $\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\})$  ein Rand von einer Kette  $\beta$ ,  $\alpha = \partial\beta$ . Die Kette  $\beta$  ist aber eine endliche Linearkombination singulärer Simplizes, deren Bilder in  $\mathbb{S}^n \setminus h(I^k \times \{p\})$  kompakt sind und auch deren Vereinigung ist in dieser Menge kompakt. Da diese Vereinigung eine kompakte Menge ist und von den geschachtelten offenen Mengen  $\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_m)$  überdeckt wird, gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$ , so dass  $\beta$  bereits eine Kette in  $\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_m)$  ist. In dieser Menge gilt natürlich auch  $\alpha = \partial\beta$ . Dies zeigt aber, dass  $\alpha$  auch schon in  $\mathbb{S}^n \setminus h(I^k)$  ein Rand ist. Es folgt, dass  $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(I^k)) \cong 0$  wie behauptet gilt.

- (ii) Wir beweisen die Aussage wiederum per Induktion. Für  $k = 0$  ist  $\mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{S}^0) \simeq \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ , also  $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{S}^0)) \cong \tilde{H}_i(\mathbb{S}^{n-1})$  und die Behauptung folgt nach Korollar 5.8. Für den Induktionsschritt zerlegen wir  $\mathbb{S}^k = D_+^k \cup D_-^k$ , wobei  $D_+^k$  die obere abgeschlossene und  $D_-^k$  die untere abgeschlossene Hemisphäre sind. Es gilt  $D_+^k \cap D_-^k \simeq \mathbb{S}^{k-1}$ . Definiere  $A := \mathbb{S}^n \setminus h(D_+^k)$  und  $B := \mathbb{S}^n \setminus h(D_-^k)$ . Aufgrund des ersten Teiles gilt  $\tilde{H}_i(A) \cong \tilde{H}_i(B) \cong 0$  für alle  $i$ . Also liefert die reduzierte Mayer-Vietoris Sequenz für  $i \geq 0$  den Isomorphismus  $\tilde{H}_{i+1}(\mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{S}^{k-1})) \cong \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{S}^k))$ . (Beachte wie oben, dass die reduzierte Mayer-Vietoris Sequenz exakt ist, da  $h$  für  $k < n$  nicht surjektiv sein kann. Somit ist auch  $\tilde{H}_{-1}(\mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{S}^k)) \cong 0$ .) Dies zeigt die Behauptung nach Induktionsannahme. □

Zum zweiten Teil des Beweises erhalten wir das folgende

**Korollar 11.3.** *Sei  $h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  eine Einbettung. Dann ist  $h$  surjektiv.*

*Beweis.* Falls  $h$  nicht surjektiv wäre, könnten wir wie im zweiten Teil des obigen Beweises argumentieren und erhielten aus der Mayer-Vietoris Sequenz  $0 \oplus 0 \cong \tilde{H}_0(A) \oplus \tilde{H}_0(B) \rightarrow \tilde{H}_0(\mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{S}^{n-1})) \rightarrow 0$ . Also wäre  $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{S}^{n-1})) \cong 0$  im Widerspruch zum zweiten Teil von Proposition 11.1. Der Widerspruch löst sich aber im Falle  $A \cap B = \emptyset$  auf, da dann die 0 rechts in der Mayer-Vietoris Sequenz durch  $\tilde{H}_{-1}(\emptyset) \cong \mathbb{Z}$  ersetzt wird. Somit ist  $h$  surjektiv. □

**Aufgabe 11.1.** Zeige mit Techniken ähnlich denen bereits in diesem Abschnitt verwendeten:

- (i) Es gibt keine Einbettung  $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ .
- (ii) Für  $m > n$  gibt es keine Einbettung  $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ .
- (iii) Für  $m > n$  gibt es keine stetige injektive Abbildung  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Aufgabe 11.2** (Gehörnte Alexander-Sphäre). Es gibt eine zu  $\mathbb{S}^2$  homöomorphe Teilmenge  $S$  des  $\mathbb{R}^3$ , so dass eine Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^3 \setminus S$  nicht einfach zusammenhängend ist.

**11.1. Gebietsinvarianz.** Die Offenheit von Mengen ist unter Einbettungen zwischen Räumen gleicher Dimension erhalten.

**Theorem 11.4.** *Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Einbettung. Dann ist  $h(U) \subset \mathbb{R}^n$  offen.*

*Beweis.* Betrachte die Einpunktkompaktifizierung  $\mathbb{S}^n$  von  $\mathbb{R}^n$ . Wir wollen die zur Behauptung äquivalente Aussage zeigen, dass  $h(U)$  in  $\mathbb{S}^n$  offen ist. Sei also  $h : U \rightarrow \mathbb{S}^n$  eine Einbettung. Sei  $x \in U$  und  $\varepsilon > 0$ , so dass  $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset U$  ist. Es genügt zu zeigen, dass  $h(B_\varepsilon(x)) = h(\overline{B_\varepsilon(x)} \setminus \partial B_\varepsilon(x))$  in  $\mathbb{S}^n$  offen ist. Nach Proposition 11.1 besteht  $\mathbb{S}^n \setminus h(\partial B_\varepsilon(x))$  aus zwei Wegzusammenhangskomponenten. Diese beiden Wegzusammenhangskomponenten sind gerade  $h(B_\varepsilon(x))$  und  $\mathbb{S}^n \setminus h(\overline{B_\varepsilon(x)})$ , denn diese beiden Mengen sind zunächst einmal disjunkt und disjunkt zu  $h(\partial B_\varepsilon(x))$ . Dann ist die erste Menge das Bild von  $B_\varepsilon(x)$  unter einer stetigen Abbildung (sogar homöomorph zu  $B_\varepsilon(x)$ ) und damit wegzusammenhängend. Die zweite Menge ist nach Proposition 11.1 wegzusammenhängend. Schließlich ist  $h(B_\varepsilon(x)) \cup (\mathbb{S}^n \setminus h(\overline{B_\varepsilon(x)})) = \mathbb{S}^n \setminus h(\partial B_\varepsilon(x))$ . Somit sind die angegebenen Mengen gerade die Wegzusammenhangskomponenten von  $\mathbb{S}^n \setminus h(\partial B_\varepsilon(x))$ . Nun ist  $\mathbb{S}^n \setminus h(\partial B_\varepsilon(x))$  in  $\mathbb{S}^n$  offen. Damit sind die Wegzusammenhangskomponenten, die in  $\mathbb{S}^n \setminus h(\partial B_\varepsilon(x))$  offen sind (da dies ein Raum ist, der lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist), auch in  $\mathbb{S}^n$  offen. Insbesondere ist also  $h(B_\varepsilon(x)) \subset \mathbb{S}^n$  offen. Das Theorem folgt.  $\square$

Für topologische Mannigfaltigkeiten erhalten wir hieraus

**Korollar 11.5.** *Sei  $M$  eine geschlossene (geschlossen := kompakt, ohne Rand)  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit,  $N$  eine zusammenhängende  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Sei  $h : M \rightarrow N$  eine Einbettung. Dann ist  $h$  surjektiv und damit insbesondere ein Homöomorphismus.*

*Beweis.* Nach Definition einer Mannigfaltigkeit sind  $M$  und  $N$  Hausdorffräume.  $h(M)$  ist daher als stetiges Bild einer kompakten Menge wieder kompakt. Insbesondere ist  $h(M)$  also abgeschlossen. Nach Theorem 11.4 ist  $h(M)$  aber auch offen in  $N$ . Da  $N$  zusammenhängend ist, gilt  $h(M) = N$  und die Behauptung folgt.  $\square$

**Aufgabe 11.3.** Vervollständige nun die Aufgabe vom Anfang des Semesters und untersuche, welche der topologischen Räume  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{S}^1$ ,  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{T}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  zueinander homöomorph bzw. homöomorph zu einem Teilraum sind.

## 12. HOMOTOPIETHEORIE

### 12.1. Definitionen und erste Konstruktionen.

**Definition 12.1.** Sei  $(X, x_0)$  ein punktierter topologischer Raum. Sei  $I = [0, 1]$ . Dann ist  $\pi_n(X, x_0)$  die Menge der Homotopieklassen von (stetigen) Abbildungen

$$f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$$

mit  $f_t(\partial I^n) = \{x_0\}$  für die betrachteten Homotopien und für beliebige  $t$ .

Für  $n = 0$  ist  $I^0$  ein Punkt,  $\partial I^0 = \emptyset$  und  $\pi_0(X, x_0)$  die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von  $X$ .

**Lemma 12.2.** *Mit*

$$(f + g)(x^1, \dots, x^n) = \begin{cases} f(2x^1, x^2, \dots, x^n), & x^1 \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2x^1 - 1, x^2, \dots, x^n), & x^1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

wird  $\pi_n(X, x_0)$  für  $n \geq 1$  zu einer Gruppe. Für  $n \geq 2$  ist diese abelsch.

*Beweis.* Assoziativität, Existenz von inversem und neutralem Element zeigt man wie im Falle der Fundamentalgruppe: Die konstante Abbildung auf  $x_0$  ist das neutrale Element und es gilt

$$-f(x^1, \dots, x^n) = f(-x^1, x^2, \dots, x^n).$$

Die folgende anschauliche Überlegung zeigt, dass die Gruppe für  $n \geq 2$  abelsch ist: Für  $n \geq 2$  schrumpft man die Definitionsgebiete von  $f$  und  $g$  in  $I^n$  auf kleine Würfel, bewegt diese aneinander vorbei und vergrößert sie wieder.  $\square$

**Bemerkung 12.3.**

- (i) Wir werden  $\pi_n$  in dem hier für uns interessanten Fall  $n \geq 2$  additiv schreiben.
- (ii) Abbildungen  $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  entsprechen gerade den Abbildungen

$$I^n / \partial I^n \simeq \mathbb{S}^n \rightarrow X,$$

die einen festen Punkt  $s_0 \in \mathbb{S}^n$  nach  $x_0$  abbilden. Somit werden wir  $\pi_n(X, x_0)$  aus als Homotopieklassen von Abbildungen  $(\mathbb{S}^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  bestehenden Raum betrachten. In dieser Interpretation ist  $f + g$  als Verknüpfung

$$\mathbb{S}^n \xrightarrow{c} \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n \xrightarrow{f \vee g} X$$

definiert, wobei  $c$  den Äquator  $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$  mit  $s_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$  zu einem Punkt zusammenschrumpft und  $f \vee g$  die auf jeweils einer Sphäre von  $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$  von  $f$  bzw.  $g$  induzierte Abbildung ist.

**Lemma 12.4.** Sei  $n \geq 1$ . Sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum,  $x_0, x_1 \in X$ . Dann sind  $\pi_n(X, x_0)$  und  $\pi_n(X, x_1)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  isomorph. Daher schreiben wir in dieser Situation zukünftig auch  $\pi_n(X)$  für  $\pi_n(X, x_0)$ .

*Beweisskizze.* Sei  $\gamma: I \rightarrow X$  stetig und gelte  $\gamma(0) = x_0$  und  $\gamma(1) = x_1$ . Wir ordnen einer Abbildung  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$  eine Abbildung  $\gamma f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  zu: Setze  $I_k := [-k, k]$  und nehme ohne Einschränkung nach Verschiebung und Streckung an, dass  $f$  auf  $I_2^n$  definiert ist. Setze

$$(\gamma f)(x) := \begin{cases} f(2x), & x \in I_1^n, \\ \gamma(\lambda), & x \in I_2^n \setminus I_1^n \text{ mit } x = (2 - \lambda)y, y \in \partial I_1^n, \lambda \in [0, 1]. \end{cases}$$

(Vorsicht: Im Fall  $n = 1$  ist diese Notation nicht mit der Verknüpfung von Wegen kompatibel.) Es gilt mit analog zu den oben verwendeten Bezeichnungen, falls die Verknüpfungen wohldefiniert sind:

- (i)  $\gamma(f + g) \simeq \gamma f + \gamma g$ ,
- (ii)  $(\gamma \eta) f \simeq \gamma(\eta f)$ ,
- (iii)  $1f \simeq f$ , wobei  $1$  der konstante Weg ist.

(i) folgt, indem wir die Definitionsgebiete von  $\gamma f$  und  $\gamma g$  nebeneinander legen, den Beitrag von  $\gamma$  zwischen  $f$  und  $g$  weghomotopieren und schließlich die Definitionsgebiete von  $f$  und  $g$  wie in der Definition von  $f + g$  verkleinern.

Definiere nun die Basispunktwechselabbildung  $\beta_\gamma: \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  durch  $\beta_\gamma([f]) = [\gamma f]$ . Nach (i) ist  $\beta_\gamma$  ein Gruppenhomomorphismus. (ii) und (iii) sichern, dass  $\beta_\gamma$  ein Isomorphismus ist: Sei  $\bar{\gamma}$  der zu  $\gamma$  inverse Weg. Dann gilt  $\beta_{\bar{\gamma}} \beta_\gamma f = [(\bar{\gamma} \gamma) f] = [1f] = [f]$ .  $\square$

**Bemerkung 12.5.**  $\pi_1$  operiert auf  $\pi_n$ ,  $n \geq 1$ :

$$\pi_1(X, x_0) \ni [\gamma] \mapsto ([f] \mapsto [\gamma f]) \in \text{Aut}(\pi_n(X, x_0)).$$

Wegen  $\beta_{\gamma\eta} = \beta_\gamma\beta_\eta$  ist dies ein Homomorphismus.

**Bemerkung 12.6.** Eine Abbildung  $\varphi: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  induziert

$$\varphi_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

vermöge  $\varphi_*([f]) = [\varphi f]$ .  $\varphi_*$  ist wohldefiniert und für  $n \geq 1$  ein Homomorphismus. Wegen  $(\varphi\psi)_* = \varphi_*\psi_*$  und  $\mathbf{1}_* = \mathbf{1}$  ist  $\pi_n$  ein Funktor. Ist  $\varphi_t: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  eine Homotopie, so folgt  $(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_*$ .

Eine Homotopie punktierter Räume  $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$  induziert einen Isomorphismus aller Homotopiegruppen  $\pi_n$ . (Wie für die Fundamentalgruppe überlegt man sich, dass dies auch stimmt, wenn die ausgezeichneten Punkte während der Homotopie bewegt werden.)

**Proposition 12.7.** Sei  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine Überlagerung. Dann ist

$$p_*: \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$$

für alle  $n \geq 2$  ein Isomorphismus.

*Beweis.* Da  $\mathbb{S}^n$  für  $n \geq 2$  einfach zusammenhängend ist, lässt sich jede Abbildung  $f: (\mathbb{S}^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  zu einer Abbildung  $\tilde{f}$  liften:

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (\mathbb{S}^n, s_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0). \end{array}$$

Somit ist  $p_*$  surjektiv.

Die Injektivität folgt ebenso, da sich auch Homotopien liften lassen.  $\square$

**Bemerkung 12.8.** Insbesondere gilt also  $\pi_n(X) \cong 0$  für  $n \geq 2$  und für einen topologischen Raum  $X$  mit zusammenziehbarer universeller Überlagerung, also z. B. für  $\mathbb{S}^1$  oder  $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ .

**Proposition 12.9.** Seien  $X_\alpha$  wegzusammenhängende Räume. Dann gilt

$$\pi_n \left( \prod_{\alpha} X_{\alpha} \right) \cong \prod_{\alpha} \pi_n(X_{\alpha})$$

für alle  $n$ .

*Beweis.* Eine Abbildung  $f: Y \rightarrow \prod_{\alpha} X_{\alpha}$  ist (nach Definition der Produkttopologie) eine Familie von Abbildungen  $f_{\alpha}: Y \rightarrow X_{\alpha}$ . Wir wenden dies mit  $\mathbb{S}^n$  und  $\mathbb{S}^n \times I$  statt  $Y$  an und erhalten das Resultat.  $\square$

## 12.2. Relative Homotopiegruppen.

**Definition 12.10.** Sei  $(X, A)$  ein Paar,  $x_0 \in A$ . Wir wollen eine relative Homologiegruppe  $\pi_n(X, A, x_0)$  definieren.

Identifiziere  $I^{n-1}$  mit der Seite  $\{x^n = 0\} \subset I^n$ . Sei  $J^{n-1} := \overline{\partial I^n \setminus I^{n-1}}$ . Dann definieren wir  $\pi_n(X, A, x_0)$ ,  $n \geq 1$ , als Menge der Homotopieklassen von Abbildungen  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ , wobei wir Homotopien von Abbildungen dieser Form zulassen. (Die Definition von  $\pi_0(X, A, x_0)$  sei nicht so klar.) Beachte, dass wegen  $\pi_n(X, x_0, x_0) \cong \pi_n(X, x_0)$  Homotopiegruppen ein Spezialfall von relativen Homotopiegruppen sind.

Die Addition in  $\pi_n(X, A, x_0)$  definieren wir für  $n \geq 2$  mit derselben Formel wie die Addition in  $\pi_n(X, x_0)$ : Wieder werden die Abbildungen „in der  $x^1$ -Richtung gestaucht und dann nebeneinandergeklebt.“ Die  $x^n$ -Koordinate spielt für relative Homotopiegruppen eine spezielle Rolle. Für  $n \geq 3$  ist  $\pi_n(X, A, x_0)$  abelsch. Für  $n = 1$  erhalten wir  $I^1 = [0, 1]$ ,  $I^0 = \{0\}$  und  $J^0 = \{1\}$ . Daher ist  $\pi_1(X, A, x_0)$  die Menge aller Homotopieklassen von Wegen von  $x_0$  nach  $A$ . Hier haben wir keine natürliche Gruppenstruktur.

Wir können  $\pi_n(X, A, x_0)$  auch als Klasse von Abbildungen von der Sphäre betrachten: Identifiziert man die Punkte in  $J^{n-1}$  zu einem Punkt, so wird aus dem Tripel  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$  das Tripel  $(D^n, \mathbb{S}^{n-1}, s_0)$ . In dieser Sichtweise erhalten wir eine Addition mit Hilfe der Abbildung  $c: D^n \rightarrow D^n \vee D^n$ , die eine geeignete  $D^{n-1} \subset D^n$  (durch  $s_0$ ) zu einem Punkt kollabiert.

**Proposition 12.11** (Kompressionskriterium). *Eine Abbildung  $f: (D^n, \mathbb{S}^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  ist genau dann ein Repräsentant des Nullelementes, wenn es relativ zu  $\mathbb{S}^{n-1}$  (d. h. die Homotopie ist auf  $\mathbb{S}^{n-1}$  in  $t$  konstant) zu einer Abbildung mit Bild in  $A$  homotop ist.*

*Beweis.* Wir betrachten hier Repräsentanten relativer Homologiegruppen als Abbildungen  $(D^n, \mathbb{S}^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ .

„ $\Leftarrow$ “: Sei eine solche Homotopie relativ zu  $\mathbb{S}^{n-1}$  zu einer Abbildung  $g$  gegeben. Dann ist die Homotopie auch in  $\pi_n(X, A, x_0)$  zulässig, da sie ja sogar in  $\mathbb{S}^{n-1}$  konstant ist. Also gilt  $[f] = [g]$ . Verknüpfen wir  $g$  mit einer Homotopie, die  $D^n$  (z. B. auf Geradenstücken) auf  $s_n$  deformiert, so folgt  $[g] = 0$ .

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $F: D^n \times I \rightarrow X$  eine Homotopie, die  $[f] = 0$  liefert. Wir schränken  $F$  auf eine Familie von Kreisscheiben (mit Parameter  $t \in I$ ) ein, die mit  $D^n \times \{0\}$  startet und bei  $(D^n \times \{1\}) \cup (\mathbb{S}^{n-1} \times I)$  endet. („Deformiere einen Deckel des Zylinders  $D^n \times I$  auf den restlichen Rand.“) Dies liefert eine Homotopie von Abbildungen von  $f$  zu einer Abbildung mit Bild in  $A$ . Da der Rand der Kreisscheiben konstant ist, ist die Homotopie auf  $\mathbb{S}^{n-1}$  konstant.  $\square$

**Bemerkung 12.12.** Wie im Fall von Homotopiegruppen induziert eine (stetige) Abbildung  $\varphi: (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  eine Abbildung

$$\varphi_*: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0).$$

Für  $n \geq 2$  erhalten wir Homomorphismen. Weiterhin folgt wie im absoluten Fall  $(\varphi\psi)_* = \varphi_*\psi_*$ ,  $\mathbf{1}_* = \mathbf{1}$  und  $\varphi_* = \psi_*$ , falls  $\varphi \simeq \psi$  gilt, also  $\varphi$  und  $\psi$  vermöge einer Familie von Abbildungen  $(X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  homotop sind.

**Theorem 12.13.** *Die Sequenz*

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \pi_0(X, x_0) \end{aligned}$$

ist exakt. Dabei sind  $i: (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$  und  $j: (X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$  die Inklusionen. Die Abbildung  $\partial$  kommt von der Einschränkung von  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  auf  $I^{n-1} \equiv I^{n-1} \times \{0\}$  oder von der Einschränkung von Abbildungen  $(D^n, \mathbb{S}^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  auf  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Für  $n \geq 2$  ist  $\partial$ , die Randabbildung, ein Homomorphismus.

Am Ende

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_0, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0),$$

wo  $\pi_1(X, A, x_0)$  keine Gruppe mehr ist, ist die Exaktheit als  $\text{im } j_* = \ker \partial$  zu verstehen und  $\ker \partial$  ist die Menge aller Homotopieklassen von Abbildungen, die auf die Homotopiekategorie der konstanten Abbildung abgebildet werden. Ebenso ist die Exaktheit an der Stelle  $\pi_0(A, x_0)$  zu verstehen.

*Beweis.* Wir zeigen etwas mehr, nämlich die Exaktheit der langen exakten Sequenz für das Tripel  $(X, A, B, x_0)$  mit  $x_0 \in B \subset A \subset X$ .

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \pi_1(X, A, x_0). \end{aligned}$$

Im Fall  $B = x_0$  erhalten wir daraus die behauptete lange exakte Sequenz von Paaren, lediglich die Exaktheit an den letzten beiden Stellen in der langen exakten Sequenz für Paare ist noch gesondert zu betrachten. An den Stellen, wo keine Gruppen stehen, wollen wir unter dem Kern einer Abbildung die Homotopieklassen verstehen, die auf die Homotopiekategorie der konstanten Abbildung abgebildet werden.

Exaktheit an der Stelle  $\pi_n(X, B, x_0)$ :

$$\pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0).$$

Es gilt  $j_* i_* = 0$ , denn jede Abbildung  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (A, B, x_0)$  ist nach dem Kompressionskriterium nullhomotop.

Zu  $\ker j_* \subset \text{im } i_*$ : Sei  $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$  ein Vertreter des Nullelementes in  $\pi_n(X, A, x_0)$ . Dann ist, wiederum aufgrund des Kompressionskriteriums,  $f$  relativ zu  $\partial I^n$  zu einer Abbildung mit Bild in  $A$  homotop. Somit ist  $[f] \in \pi_n(X, B, x_0)$  auch in  $\text{im } i_*$ .

Exaktheit an der Stelle  $\pi_n(X, A, x_0)$ :

$$\pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0).$$

Es gilt  $\partial j_* = 0$ , da die Einschränkung einer Abbildung  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$  auf  $I^{n-1}$  eine Abbildung mit Bild in  $B$  liefert. Diese ist nach Kompressionskriterium eine Vertreterin der Null.

Sei umgekehrt die Einschränkung von  $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  auf  $I^{n-1}$  in  $\pi_{n-1}(A, B, x_0)$  homotop zur konstanten Abbildung. Somit gibt es nach Kompressionskriterium eine Homotopie  $F: I^{n-1} \times I \rightarrow A$  relativ zu  $\partial I^{n-1}$  mit Bild von  $F(\cdot, 0) \subset B$  und  $f|_{I^{n-1}} = F(\cdot, 1)$ . Indem wir die Homotopie  $F$  „unter“ der Abbildung  $f: I^{n-1} \times I \rightarrow X$  anfügen, d. h.  $F(\cdot, t+1)$  für  $-1 \leq t \leq 0$  verwenden, erhalten wir nach „Stauhen“ des entstandenen Rechteckes eine Abbildung  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$ . Indem wir die Abbildung  $F$  nur für  $-\tau \leq t \leq 0$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$  unter  $f$  anfügen, sehen wir, dass  $f$  in der Klasse der Abbildungen  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  zu einer Abbildung  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$  homotop ist. Somit ist  $[f] \in \text{im } j_*$ .

Exaktheit an der Stelle  $\pi_n(A, B, x_0)$ :

$$\pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0).$$

Die Komposition  $i_* \partial$  verschwindet, denn die Einschränkung einer Abbildung

$$f: (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$$

auf  $I^n$  ist relativ zu  $\partial I^n$  homotop zu einer konstanten Abbildung: Verwende die Abbildung  $f$  selbst und die  $x^{n+1}$ -Koordinate als Homotopieparameter.

Für die Umkehrung,  $\ker i_* \subset \text{im } \partial$ , betrachten wir zunächst den einfacheren Fall, dass  $B$  nur aus einem Punkt besteht, also  $B = \{x_0\}$ . Sei  $f_t: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  eine Homotopie von  $f_0$  zur konstanten Abbildung. Fassen wir den Homotopieparameter als zusätzliche Koordinate auf, so erhalten wir eine Abbildung  $F: (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$  mit  $F|_{\{x^{n+1}=0\}} = f_0$ , also  $\partial([F]) = f_0$ . Die Inklusion folgt damit, wenn  $B$  aus nur einem Punkt besteht.

Sei nun  $B \subset A$  beliebig. Sei  $F$  eine Homotopie von der Abbildung

$$f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (A, B, x_0)$$

zur konstanten Abbildung unter Verwendung von Abbildungen  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$  ( $A$  statt  $X$  im ersten Tripel ergibt sich, da wir ein Element in  $\ker i_*$  betrachten.). Schränke nun  $F$  auf  $(I^{n-1} \times \{0\}) \times I$  ein:  $g := F|_{(I^{n-1} \times \{0\}) \times I}$ . Dann ist  $F$  auf einem  $(n+1)$ -dimensionalen Würfel definiert dessen Seite  $\{t=0\}$  eingeschränkt wir gerade  $f$  und auf dessen Seite  $\{x^n=0\}$  eingeschränkt wir gerade  $g$  erhalten. Auf der Seite  $\{t=1\}$  erhalten wir die konstante Abbildung auf  $x_0$ , ebenso auf allen weiteren Seiten, da dort  $x^n > 0$  gilt. Durch eine Deformation des Würfels können wir die beiden Seiten, auf denen die Abbildungen  $f$  und  $g$  definiert sind, auf eine Seite, weiterhin mit einer gemeinsamen Kante, bringen. Alle anderen Seiten werden weiterhin auf  $x_0$  abgebildet. Wir erhalten einen Vertreter einer Klasse in  $\pi_{n+1}(X, A, x_0)$ . Somit ist die durch „Übereinanderlegen“ der Definitionsbereiche von  $f$  und  $g$  entstandene Abbildung („oben liegt  $f$ , unten  $g$ “) entstandene Abbildung in  $\text{im } \partial$ . Da  $\text{im } g \subset B$  ist, können wir die untere Grenze des Definitionsbereiches nach oben „verschieben“ und erhalten nach dieser Homotopie gerade  $f$ . Die Behauptung folgt.

Exaktheit am Ende: Bei  $\pi_1(X, A, x_0)$ :  $j_*: \pi_1(X, x_0, x_0) \rightarrow \pi_1(X, A, x_0)$  bildet Homotopieklassen von Abbildungen  $(I, \{0, 1\}, \{1\}) \rightarrow (X, x_0, x_0)$  in die Homotopieklassen von Abbildungen  $(I, \{0, 1\}, \{1\}) \rightarrow (X, A, x_0)$  ab. Somit besteht  $\text{im } j_*$  gerade aus den Homotopieklassen von Kurven in  $X$ , die in  $x_0$  starten und irgendwo in der Wegzusammenhangskomponente von  $A$  enden, die  $x_0$  enthält. Schränken wir  $\partial: \pi_1(X, A, x_0) \rightarrow \pi_0(A, x_0)$  auf  $\{0, 1\}$  ein, so besteht der Zielraum aus je einem

Element, für jede Wegzusammenhangskomponente von  $A$ . Da im  $j_*$  gerade die Kurven liefert, die in der Wegzusammenhangskomponente von  $A$  mit  $x_0 \in A$  enden, also nach Einschränkung auf  $\{0, 1\}$  homotop zur konstanten Abbildung sind, folgt im  $j_* = \ker \partial$ .

Exaktheit bei  $\pi_0(A, x_0)$ : Wir sehen, dass im  $\partial$  gerade aus Homotopieklassen von Abbildungen

$$(\{0, 1\}, \{1\}) \rightarrow (A, x_0)$$

besteht, die sich zu einer verbindenden Kurve zwischen Anfangs- und Endpunkt fortsetzen lassen. Somit erhalten wir nur Endpunkte in der Wegzusammenhangskomponente von  $X$  mit  $x_0 \in X$ . Dies ist aber auch genau der Kern von  $i_*$ . Dies liefert die Exaktheit an der letzten Stelle.  $\square$



**Bemerkung 12.14.**

- (i) Da  $CX$  kontrahierbar ist, liefert die lange exakte Homotopiesequenz für das Paar  $(CX, X)$  die Isomorphismen

$$0 \cong \pi_{i+1}(CX) \longrightarrow \pi_{i+1}(CX, X) \xrightarrow{\partial} \pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(CX) \cong 0.$$

Da es zu jeder Gruppe  $G$  einen Raum  $X$  mit  $\pi_1(X) \cong G$  gibt, gibt es auch einen Raum  $X$  mit  $\pi_2(CX, X) \cong G$ .

- (ii) Die lange exakte Homotopiesequenz von Tripeln ist in der folgenden Weise natürlich: Eine Abbildung  $(X, A, B, x_0) \rightarrow (Y, C, D, y_0)$  zwischen punktierten Tripeln induziert eine Abbildung zwischen den zugehörigen langen exakten Homotopiesequenzen, so dass die entstehenden Quadrate (und damit das gesamte Diagramm) kommutieren.
- (iii) Für die absoluten Homotopiegruppen kommt es nicht auf den Basispunkt an. Eine analoge Konstruktion mit  $\beta_\gamma: \pi_n(X, A, x_1) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0)$  und  $\beta_\gamma([f]) = [\gamma f]$  funktioniert auch in diesem Fall, nur ist hier das Quadrat, in dem in  $\gamma f$  die ursprüngliche Abbildung  $f$  steht, in Richtung  $-x^n$  zu verschieben, bis es die Ebene  $\{x^n = 0\}$  berührt. Man erhält damit, dass  $\pi_n(X, A, x_0)$  nicht von  $x_0$  abhängt, falls  $A$  wegzusammenhängend ist. (Details: Übung.)
- (iv)  $\pi_1(A, x_0)$  operiert wie im absoluten Fall auf  $\pi_n(X, A, x_0)$  vermöge  $\gamma \mapsto \beta_\gamma$ . Lässt man  $\pi_1(A, x_0)$  gemäß dieser Vorschrift auf die lange exakte Homotopiesequenz wirken, so vertauscht diese Operation mit den Abbildungen der Sequenz. (Kleine Übung.)

**Definition 12.15.** Ein punktierter topologischer Raum  $(X, x_0)$  heißt  $n$ -zusammenhängend, falls  $\pi_i(X, x_0) \cong 0$  für alle  $i \leq n$  gilt.

**Bemerkung 12.16.** Ein 0-zusammenhängender Raum ist wegzusammenhängend, ein 1-zusammenhängender Raum ist einfach zusammenhängend. Ein  $n$ -zusammenhängender Raum ist insbesondere auch 0-zusammenhängend. Somit kommt es bei dieser Definition nicht auf die spezielle Wahl des Basispunktes  $x_0$  an. Somit ist  $(X, x_0)$  genau dann für ein  $x_0 \in X$  ein  $n$ -zusammenhängender topologischer Raum, wenn dies für alle  $x_0 \in X$  gilt. Eine Formulierung ohne  $x_0$  ist folgende:

Ein Raum  $X$  ist genau dann  $n$ -zusammenhängend, wenn eine der drei folgenden äquivalenten (kleine Übung) Bedingungen für alle  $i \leq n$  erfüllt sind:

- (i) Jede Abbildung  $\mathbb{S}^i \rightarrow X$  ist zu einer konstanten Abbildung homotop.
- (ii) Jede Abbildung  $\mathbb{S}^i \rightarrow X$  lässt sich zu einer Abbildung  $D^{i+1} \rightarrow X$  fortsetzen.
- (iii)  $\pi_i(X, x_0) \cong 0$  für alle  $x_0 \in X$ .

Für relative Homotopiegruppen sind die folgenden Bedingungen äquivalent (sofern definiert;  $\pi_0$  haben wir im relativen Fall nicht definiert). Dies folgt direkt mit Hilfe des Kompressionskriteriums.

- (a) Jede Abbildung  $(D^i, \partial D^i) \rightarrow (X, A)$  ist relativ zu  $\partial D^i$  zu einer Abbildung  $D^i \rightarrow A$  homotop.
- (b) Jede Abbildung  $(D^i, \partial D^i) \rightarrow (X, A)$  ist mit einer Homotopie von solchen Abbildungen zu einer Abbildung  $D^i \rightarrow A$  homotop.
- (c) Jede Abbildung  $(D^i, \partial D^i) \rightarrow (X, A)$  ist mit einer Homotopie von solchen Abbildungen zu einer konstanten Abbildung  $D^i \rightarrow A$  homotop.
- (d)  $\pi_i(X, A, x_0) \cong 0$  für alle  $x_0 \in A$ .

Jede der ersten drei Bedingungen liefert im Falle  $i = 0$ , dass jede Wegzusammenhangskomponente von  $X$  einen Punkt aus  $A$  enthält, da  $D^0$  ein Punkt ist und  $\partial D^0 = \emptyset$  gilt.

**Definition 12.17.** Ein Paar  $(X, A)$  heißt  $n$ -zusammenhängend, falls die obigen Bedingungen (a)-(d) (außer (d) im Fall  $i = 0$ ) für alle  $i \leq n$  erfüllt sind.

### 12.3. Satz von Whitehead.

**Theorem 12.18.** Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen zusammenhängenden CW-Komplexen. Induziert  $f$  für alle  $n$  einen Isomorphismus  $f_*: \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ , so ist  $f$  eine Homotopieäquivalenz.

Ist  $f: X \hookrightarrow Y$  zusätzlich die Inklusionsabbildung eines Unterkomplexes  $X$ , so ist  $X$  ein Deformationsretrakt von  $Y$ .

Ohne Beweis. □

### 12.4. Zelluläre Approximation.

**Definition 12.19.** Seien  $X, Y$  CW-Komplexe. Dann heißt  $f: X \rightarrow Y$  zellulär, wenn für die Skelette und alle  $n \in \mathbb{N}$  die Inklusion  $f(X^n) \subset Y^n$  gilt.

**Theorem 12.20.** Jede Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  von CW-Komplexen ist homotop zu einer zellulären Abbildung. Ist  $f$  auf einem CW-Unterkomplex  $A \subset X$  bereits zellulär, so können wir eine auf  $A$  stationäre Homotopie wählen.

*Beweisskizze.* Sei dies bis zu  $n - 1$  bereits richtig. Wie im Kapitel über Morsetheorie können wir nun  $f$  auf einer einzelnen  $n$ -Zelle in  $X$  so homotopieren, dass die Behauptung gilt. Dies funktioniert auch für alle an  $X^{n-1}$  angehefteten  $n$ -Zellen gleichzeitig.

Führt man nun die Homotopien für alle  $n$ -Zellen auf einem Intervall der Form  $[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}]$  durch, so erhält man die gewünschte Homotopie. Beachte, dass die Stetigkeit auch bei  $t = 1$  gegeben ist, da die Homotopie in jedem Punkt vor  $t = 1$  bereits konstant wird. □

**Korollar 12.21.** Für  $n < k$  gilt  $\pi_n(\mathbb{S}^k) \cong 0$ .

*Beweis.* Betrachte auf  $\mathbb{S}^n$  und  $\mathbb{S}^k$  als CW-Komplexe mit einem Punkt und einer angehefteten  $n$ - bzw.  $k$ -dimensionalen Zelle. Sei  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^k$  eine Abbildung, die den ausgezeichneten Punkt respektiert. Dann kann diese Abbildung unter Fixierung des ausgezeichneten Punktes zu einer zellulären Abbildung deformiert werden. Wegen  $n < k$  ist diese Abbildung dann aber automatisch konstant und die Behauptung folgt. □

**Definition 12.22.** Ein konvexer Polyeder ist die Lösungsmenge von endlich vielen affin linearen Ungleichungen der Form  $\sum_i a_i x^i \leq b$ . Ein Polyeder ist eine endliche Vereinigung von konvexen Polyedern. Eine Abbildung von einem Polyeder in den  $\mathbb{R}^k$  heißt stückweise linear (piecewise linear, PL), falls es eine Zerlegung des Polyeders in konvexe Polyeder gibt, so dass die Einschränkung der Abbildung auf jeden dieser konvexen Polyeder eine (affin) lineare Abbildung ist.

**Lemma 12.23.** Sei  $f: I^n \rightarrow Z$  eine Abbildung, wobei der Raum  $Z$  aus dem Teilraum  $W$  durch Anheften einer Zelle  $e^k$  entstanden ist. Dann ist  $f$  relativ zu  $f^{-1}(W)$  homotop zu einer Abbildung  $f_1$ , für die es einen Polyeder  $K \subset I^n$  mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- (i)  $f_1(K) \subset e^k$  und  $f_1|_K$  ist nach Identifikation von  $e^k$  mit einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^k$  stückweise (affin) linear.
- (ii) Es gibt eine offenen Teilmenge  $U \subset e^k$  mit  $K \supset f_1^{-1}(U)$ .

*Beweisidee.* Im Urbild von kompakten Teilmengen von  $e^k$  ist  $f$  gleichmäßig stetig. Betrachte  $B_1 \subset B_2 \Subset e^k$  und als kompakte Mengen in  $e^k$  die Mengen  $K_i := \overline{f^{-1}(B_i)}$ . Zerlege  $I^n$  in kleine Würfel und betrachte eine Kollektion solcher, die in  $K_2$  enthalten sind und  $K_1$  überdecken. Mit einer weiteren Schicht von Würfeln und einer stückweise linearen Abschneidefunktion zu einer Unterteilung der Würfel in Polyeder  $\eta$  mit  $\eta|_{K_1} = 1$  und  $\eta|_{\mathbb{C}_{K_2}} = 0$  schreiben wir  $f = \eta f + (1 - \eta)f$ . Den Teil  $\eta f$  homotopieren wir nun mit derselben Unterteilung wie bei  $\eta$  zu einer stückweise linearen Funktion. Man kann nun  $K = K_1$  wählen. Der Rest ist als Übung zu überprüfen.  $\square$

**Lemma 12.24** (Zelluläre Approximation von Paaren). *Jede Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von CW-Paaren kann in der Klasse dieser Abbildungen  $((X, A) \rightarrow (Y, B))$  zu einer zellulären Abbildung deformiert werden.*

*Beweis.* Deformiere zunächst die Einschränkung  $f: A \rightarrow B$  in eine zelluläre Abbildung, erweitere dann die Homotopie zu einer Homotopie auf  $X$  und deformiere schließlich das Ergebnis zu einer zellulären Abbildung, ohne es auf  $A$  noch weiter abzuändern.

Man könnte die Deformation sogar so durchführen, dass  $f$  auf allen Subkomplexen, auf denen  $f$  bereits zellulär ist, konstant bleibt.  $\square$

Als Korollar zur zellulären Approximation erhalten wir:

**Korollar 12.25.** *Sei  $(X, A)$  ein CW-Paar. Nehme an, dass alle Zellen in  $X \setminus A$  eine Dimension strikt größer als  $n$  haben. Dann ist  $(X, A)$  ein  $n$ -zusammenhängendes Paar.*

*Insbesondere ist das Paar  $(X, X^n)$  ein  $n$ -zusammenhängendes Paar. Somit induziert die Inklusion  $X^n \hookrightarrow X$  im Falle  $i < n$  Isomorphismen für  $\pi_i$  und eine surjektive Abbildung für  $\pi_n$ .*

*Beweis.* Sei  $i \leq n$ . Nach zellulärer Approximation ist  $(D^i, \partial D^i) \rightarrow (X, A)$  relativ zu  $\partial D^i$  homotop zu einer Abbildung mit Bild in  $A$ . Somit ist  $(X, A)$  ein  $n$ -zusammenhängendes Paar.

Die lange exakte Homotopiesequenz für Paare liefert für  $i \leq n$

$$\pi_{i+1}(X, X^n, x_0) \longrightarrow \pi_i(X^n, x_0) \longrightarrow \pi_i(X, x_0) \longrightarrow \pi_i(X, X^n, x_0) \cong 0.$$

Im Falle  $i < n$  gilt außerdem  $\pi_{i+1}(X, X^n, x_0) \cong 0$ . Somit folgt die Behauptung.  $\square$

**12.5. CW-Approximation.** Ohne Beweis halten wir für später das folgende Resultat fest.

**Lemma 12.26.** *Sei  $(X, A)$  ein  $n$ -zusammenhängendes CW-Paar. Dann gibt es ein CW-Paar  $(Z, A)$  mit  $(Z, A) \simeq (X, A)$  relativ zu  $A$ , so dass alle Zellen in  $Z \setminus A$  mindestens Dimension  $n + 1$  haben.*

## 12.6. Ausschneidungen für Homotopiegruppen.

**Theorem 12.27** (Ausschneidungssatz für Homotopiegruppen). *Sei  $X$  ein CW-Komplex, der aus zwei Unterkomplexen  $A$  und  $B$  mit  $C = A \cap B$  besteht. Sei  $C$*

zusammenhängend und gelte  $C \neq \emptyset$ . Sei  $(A, C)$   $m$ -zusammenhängend und  $(B, C)$   $n$ -zusammenhängend,  $m, n \geq 0$ . Dann ist die von der Inklusionsabbildung induzierte Abbildung

$$\pi_i(A, C) \rightarrow \pi_i(X, B)$$

für  $i < m + n$  ein Isomorphismus und für  $i = m + n$  surjektiv.

**Korollar 12.28** (Freudenthalscher Suspensionsatz). Die „Suspensionsabbildung“

$$\pi_i(\mathbb{S}^n) \rightarrow \pi_{i+1}(\mathbb{S}^{n+1}),$$

$$[f: \mathbb{S}^i \rightarrow \mathbb{S}^n] \mapsto [Sf: S\mathbb{S}^i \simeq \mathbb{S}^{i+1} \rightarrow S\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^{n+1}],$$

ist für  $i < 2n - 1$  ein Isomorphismus und für  $i = 2n - 1$  surjektiv.

Dies gilt auch für beliebige Suspensionen und induzierte Abbildungen  $\pi_i(X) \rightarrow \pi_{i+1}(SX)$ , falls  $X$  ein  $(n - 1)$ -zusammenhängender CW-Komplex ist.

*Beweis.* Die Formulierung mit  $X$  ist eine Verallgemeinerung, da  $\mathbb{S}^n$  und  $S\mathbb{S}^n$  CW-Komplexe sind. Außerdem ist jede Sphäre  $\mathbb{S}^n$  ein  $(n - 1)$ -zusammenhängender topologischer Raum: Benutze Glättungen und den Satz von Sard oder zelluläre Approximation.

Wir zerlegen die Suspension  $SX$  in zwei Kegeln  $C_+X$  und  $C_-X$ , die sich in einer Kopie von  $X$  schneiden. Sämtliche Homotopiegruppen von Kegeln verschwinden für  $n \geq 0$ , da  $C_+X$  kontrahierbar ist. Somit erhalten wir aus den langen exakten Homotopiesequenzen für Paare

$$0 \cong \pi_{i+1}(C_+X) \longrightarrow \pi_{i+1}(C_+X, X) \xrightarrow{\partial} \pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(C_+X) \cong 0$$

und

$$0 \cong \pi_{i+1}(C_-X) \longrightarrow \pi_{i+1}(SX) \longrightarrow \pi_{i+1}(SX, C_-X) \longrightarrow \pi_i(C_-X) \cong 0.$$

Betrachte

$$\pi_i(X) \cong \pi_{i+1}(C_+X, X) \rightarrow \pi_{i+1}(SX, C_-X) \cong \pi_{i+1}(SX),$$

wobei die mittlere Abbildung von der Inklusion  $(C_+X, X) \hookrightarrow (SX, C_-X)$  induziert ist und die beiden Isomorphismen am Rand aus den obigen beiden exakten Sequenzen stammen. Die Verkettung dieser Abbildungen ist gerade die Suspensionsabbildung; um dies zu sehen benutze man die Kegelstruktur.

Aus der langen exakten Homotopiesequenz für das Paar  $(C_\pm X, X)$  (vergleiche die erste Sequenz dieses Beweises) erhalten wir, dass  $(C_\pm X, X)$  genau dann  $n$ -zusammenhängend ist, wenn  $X$  ein  $(n - 1)$ -zusammenhängender Raum ist ( $i = 0$  bzw. ist hier unproblematisch, da ein Kegel  $C_\pm X$  stets wegzusammenhängend ist.). Nach Theorem 12.27 ist damit  $\pi_{i+1}(C_+X, X) \rightarrow \pi_{i+1}(SX, C_-X)$  für  $i + 1 < 2n$  ein Isomorphismus und für  $i + 1 = 2n$  surjektiv (Beachte die Indexverschiebung um eins gegenüber Theorem 12.27.).  $\square$

**Korollar 12.29.** Es gilt  $\pi_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  für alle  $n \geq 1$ . Die Identität ist ein Erzeuger dieser Gruppe. Insbesondere ist also der Abbildungsgrad  $\pi_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  ein Isomorphismus. Somit sind zwei Abbildungen  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  genau dann homotop, wenn ihr Abbildungsgrad übereinstimmt.

*Beweis.* Betrachte die Folge von Suspensionsabbildungen

$$\pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_2(\mathbb{S}^2) \longrightarrow \pi_3(\mathbb{S}^3) \longrightarrow \dots$$

Nach dem Suspensionssatz von Freudenthal ist die erste Abbildung surjektiv und alle weiteren sind Isomorphismen. Da  $\pi_1(\mathbb{S}^1)$  von der Identität erzeugt ist, aufgrund der Surjektivität aller dieser Abbildungen und nach Definition der Suspensionsabbildung sind auch alle weiteren Gruppen von der Identität erzeugt. Es gilt  $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ . Wir müssen also lediglich noch den Fall ausschließen, dass  $\pi_2(\mathbb{S}^2) \cong \pi_3(\mathbb{S}^3) \cong \dots$  endliche zyklische Gruppen sind. Dies ist jedoch ausgeschlossen, da wir bereits Abbildungen  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  mit beliebigem Abbildungsgrad in  $\mathbb{Z}$  kennen und der Abbildungsgrad eine Homotopieinvariante ist. Somit kennen wir unendlich viele nicht homotope Abbildungen,  $\pi_n(\mathbb{S}^n)$  kann also keine endliche Gruppe sein.

Der Abbildungsgrad  $\pi_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  ist surjektiv (frühere Resultate, benutze alternativ die Suspensionen von Abbildungen  $\mathbb{S}^1 \ni z \mapsto z^k \in \mathbb{S}^1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , die alle nach dem Freudenthalschen Suspensionssatz Abbildungsgrad  $k$  haben). Eine surjektive Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  ist aber auch injektiv. Somit ist der Abbildungsgrad ein Isomorphismus.  $\square$

*Beweis von Theorem 12.27. Fall 1:* Nehme an, dass  $A$  aus  $C$  durch Anheften von Zellen  $e_\alpha^{m+1}$  und  $B$  aus  $C$  durch das Anheften einer Zelle  $e^{n+1}$  entstanden seien. Zur **Surjektivität** von  $\pi_i(A, C) \rightarrow \pi_i(X, B)$ : Sei  $f: (I^i, \partial I^i, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$  vorgegeben. Da  $f$  kompakt ist, trifft es nur endlich viele der Zellen  $e_\alpha^{m+1}$  und  $e^{n+1}$ . Nach Lemma 12.23 ist  $f$  durch Abbildungen  $(I^i, \partial I^i, J^{i-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$  zu einer Abbildung, ohne Einschränkung wieder mit  $f$  bezeichnet, homotop, zu der es Simples  $\Delta_\alpha^{m+1} \subset e_\alpha^{m+1}$  und  $\Delta^{n+1} \subset e^{n+1}$  gibt, so dass  $f^{-1}(\Delta_\alpha^{m+1})$  und  $f^{-1}(\Delta^{n+1})$  endliche Vereinigungen von konvexen Polyedern sind und auf jedem dieser konvexen Polyeder ist  $f$  affin linear. Wir sagen, eine solche affin lineare Abbildung sei surjektiv, wenn ihre Fortsetzung  $\mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  bzw.  $\mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}^n$  surjektiv sei (oder wenn das Differential surjektiv ist). Durch Verkleinerung der Simples  $\Delta_\alpha^{m+1}$  und  $\Delta^{n+1}$ , so dass sie die Bilder der nicht surjektiven affin linearen Abbildungen vermeiden, können wir annehmen, dass alle diese affin linearen Abbildungen surjektiv sind.

**Behauptung:** Ist  $i \leq m+n$ , so gibt es Punkte  $p_\alpha \in \Delta_\alpha^{m+1}$  und  $q \in \Delta^{n+1}$  sowie eine Abbildung  $\varphi: I^{i-1} \rightarrow [0, 1)$ , so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $f^{-1}(q)$  liegt unterhalb von  $\text{graph } \varphi \subset I^{i-1} \times I = I^i$ .
- (ii) Für jedes  $\alpha$  liegt  $f^{-1}(p_\alpha)$  oberhalb von  $\text{graph } \varphi$ .
- (iii) Es gilt  $\varphi|_{\partial I^{i-1}} = 0$ .

*Beweis der Behauptung.* Sei  $q \in \Delta^{n+1}$  beliebig. Dann ist  $f^{-1}(q)$  eine endliche Vereinigung von konvexen Polyedern der Dimension  $\leq i-n-1$ , denn  $f^{-1}(\Delta^{n+1})$  ist eine endliche Vereinigung von Polyedern und auf jedem dieser Polyeder ist  $f$  die Einschränkung einer surjektiven linearen Abbildung  $\mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ .

Wir wollen die Punkte  $p_\alpha \in \Delta_\alpha^{m+1}$  so wählen, dass  $f^{-1}(q)$  und  $f^{-1}(p_\alpha)$  unter der Projektion  $\pi: I^i \rightarrow i^{i-1}$  auf die ersten  $(i-1)$ -Komponenten diskunkte Bilder haben. Dies ist äquivalent zur Forderung, dass  $f^{-1}(p_\alpha)$  für jedes  $\alpha$  disjunkt zu  $T := \pi^{-1}(\pi(f^{-1}(q)))$  ist. Da  $f^{-1}(q)$  eine endliche Vereinigung konvexer Polyeder der Dimension  $\leq i-n-1$  ist, ist  $T$  eine endliche Vereinigung von Polyedern der Dimension  $\leq i-n$ . Lineare Abbildungen erhöhen die Dimension nicht. Somit ist  $f(T) \cap \Delta_\alpha^{m+1}$  in einer endlichen Vereinigung konvexer Polyeder der Dimension  $\leq i-n$  enthalten. Gilt also  $m+1 > i-n$ , so gibt es einen Punkt  $p_\alpha \in \Delta_\alpha^{m+1} \setminus f(T)$ . Wir erhalten also  $f^{-1}(p_\alpha) \cap T = \emptyset$  für  $i \leq m+n$ . Somit gibt es eine Umgebung  $U$  von  $\pi(f^{-1}(q))$  in  $I^{n-1}$ , die für alle  $\alpha$  zu  $\pi(f^{-1}(p_\alpha))$  disjunkt ist. Die Abbildung  $f: (I^i, \partial I^i, J^{i-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$  bildet den „nicht unteren Rand“ nach  $x_0$  ab. Somit

„hält“ die in  $I^n$  kompakte Menge  $f^{-1}(q)$  von dem „nicht unteren Rand“ einen positiven Abstand. Somit gibt es eine Funktion  $\varphi: I^{i-1} \rightarrow [0, 1)$  mit kompaktem Träger in  $U$ , so dass  $f^{-1}(q)$  unterhalb von  $\text{graph } \varphi$  liegt. Dies zeigt die Behauptung.  $\square$

Setze  $P := \bigcup_{\alpha} \{p_{\alpha}\}$  und  $Q := \{q\}$ . Sei  $f_t$  eine Homotopie, die die Menge unter  $\text{graph } \varphi$  herausschneidet, indem sie auf die Menge oberhalb von  $\text{graph}(t\varphi)$  für  $0 \leq t \leq 1$  einschränkt und vertikal reparametrisiert. Dies ist eine Homotopie durch Abbildungen  $(I^i, \partial I^i, J^{i-1}) \rightarrow (X, X \setminus P, x_0)$ . Nach der bewiesenen Behauptung sind  $f_t(I^{i-1})$  und  $P$  für alle  $t$  disjunkt und  $f_1(I^i)$  sowie  $Q$  sind ebenfalls disjunkt.

Da  $B$  ein Deformationsretrakt von  $X \setminus P$  ist (deformiere in den Zellen  $e_{\alpha}^{m+1}$  von  $p_{\alpha}$  weg, erhalten wir  $\pi_i(X, B) \cong \pi_i(X, X \setminus P)$  (kleine Übung). Deformieren wir ebenso von  $p_{\alpha}$  und  $q$  weg, so sehen wir dass  $A$  ein Deformationsretrakt von  $X \setminus Q$  und, unter derselben Deformationsretraktion  $C$  ein Deformationsretrakt von  $X \setminus (P \cup Q)$  ist. Auch hier folgt (kleine Übung)  $\pi_i(A, C) \cong \pi_i(X \setminus Q, X \setminus (P \cup Q))$ .

Vermöge  $(X, B) \hookrightarrow (X, X \setminus P)$  betrachten wir nun  $[f] \in \pi_i(X, B)$  als Element in der isomorphen Gruppe  $\pi_i(X, X \setminus P)$ . In  $\pi_i(X, X \setminus P)$  gilt  $[f] = [f_1]$ . Nach Konstruktion ist  $f_1: (I^i, \partial I^i, J^{i-1}) \rightarrow (X \setminus Q, X \setminus (P \cup Q))$ . Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(A, C) & \longrightarrow & \pi_i(X, B) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \pi_i(X \setminus Q, X \setminus (P \cup Q)) & \longrightarrow & \pi_i(X, X \setminus P). \end{array}$$

Dabei sind alle horizontalen Abbildungen von Inklusionen induziert. Zu  $[f]$  rechts oben haben wir rechts unten ein  $[f_1] = [f]$  gefunden, wobei  $[f_1]$  ein Bild von links unten ist. Sei  $[f_2] \in \pi_i(A, C)$  das Urbild von  $[f_1]$ . Da alle Pfeile von Deformationsretraktionen oder Inklusionen stammen, kommutiert das Diagramm.  $[f_2]$  wird also horizontal auf  $[f]$  abgebildet. Dies zeigt die Surjektivität für  $i \leq m + n$ .

Zur **Injektivität**: Seien  $f_0, f_1: (I^i, \partial I^i, J^{n-1}) \rightarrow (A, C, x_0)$  zwei Vertreter von Elementen in  $\pi_i(A, X, x_0)$  mit gleichem Bild in  $\pi_i(X, B, x_0)$ . Somit finden wir eine Homotopie  $F: (I^i, \partial I^i, J^{n-1}) \times [0, 1] \rightarrow (X, B, x_0)$  von  $f_0$  nach  $f_1$  für die Gruppe  $\pi_i(X, B, x_0)$ . Wir gehen ähnlich wie beim Beweis der Surjektivität vor. Wieder benutzen wir Lemma 12.23 für eine erste Deformation von  $F$ . Wiederum konstruieren wir eine trennende Funktion  $\varphi: I^{i-1} \times I \rightarrow [0, 1)$ , die  $F^{-1}(q)$  wie oben von den Punkten  $F^{-1}(p_{\alpha})$  trennt. Damit können wir wiederum  $F^{-1}(q)$  aus dem Definitionsbereich von  $F$  heraushomotopieren. Somit ist die Homotopie für die Gruppe  $\pi_i(A, C, x_0)$  zulässig und wir sehen, dass  $f_0$  und  $f_1$  in dieser Gruppe dasselbe Element darstellen. Bei dieser Konstruktion haben wir nun statt mit  $I^i$  oben mit  $I^i \times I$  gearbeitet. Somit wird die Einschränkung  $i \leq m + n$  an die Dimensionen von oben zur Einschränkung  $i + 1 \leq m + n$  oder  $i < m + n$ . Die Injektivität folgt in diesem Fall.

(Der Beweis bis hierher genügt für die obige Berechnung von  $\pi_n(\mathbb{S}^n)$ .)

**Fall 2:** Sei  $A$  wie oben aus  $C$  durch Ankleben von  $(m+1)$ -Zellen entstanden. Nehme an, dass  $B$  durch Ankleben von Zellen der Dimension  $\geq n + 1$  aus  $C$  entstanden sei. Zur Surjektivität von  $\pi_i(A, C) \rightarrow \pi_i(X, B)$ : Sei  $f: (I^i, \partial I^i, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$ , ein Vertreter für ein Element in  $\pi_i(X, B)$ , gegeben. In  $f$  ist kompakt, trifft also nur endlich viele Zellen. Wir wenden also den Fall 1 wiederholt an und können die Abbildung  $f$  nacheinander von den Zellen in  $B \setminus C$  wegdrücken. Wir starten dabei mit den Zellen der höchsten Dimension. Beachte dazu, dass die obige Behauptung

auch noch funktioniert, wenn wir  $n$  vergrößern. Der Injektivitätsbeweis funktioniert ähnlich unter Verwendung einer Homotopie  $F: (I^i, \partial I^i, J^{i-1}) \times I \rightarrow (X, B, x_0)$ , die wir nacheinander von den Zellen in  $B \setminus C$  wegdrücken.

**Fall 3:** Sei nun  $B$  wie in Fall 2 und  $A$  aus  $C$  durch Ankleben von Zellen der Dimension  $\geq m + 1$  entstanden. Nehme ohne Einschränkung an, dass alle Zellen in  $A \setminus C$  eine Dimension  $\leq m + n + 1$  haben, da sie sonst aufgrund der zellulären Approximation keinen Einfluss auf die Homotopiegruppen  $\pi_i$  für  $i \leq m + n$  haben. („+1“ kommt hier wieder vom Homotopieparameter.) Sei  $A_k \subset A$  die Vereinigung von  $C$  mit allen Zellen der Dimension  $\leq k$ . Setze  $X_k := A_k \cup B$ . Wir zeigen die Behauptung nun für die Abbildungen  $\pi_i(A_k, C) \rightarrow \pi_i(X_k, B)$  per Induktion nach  $k$ . Der Induktionsanfang  $k = m + 1$  ist gerade unser Fall 2. Induktionsschritt: Betrachte die Tripel  $(A_k, A_{k-1}, C)$  und  $(X_k, X_{k-1}, B)$ . Die Inklusionsabbildung liefert das folgende kommutative Diagramm, wobei die Zeilen gerade die langen exakten Homotopiesequenzen für Tripel sind:

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_{i+1}(A_k, A_{k+1}) & \rightarrow & \pi_i(A_{k-1}, C) & \rightarrow & \pi_i(A_k, C) & \rightarrow & \pi_i(A_k, A_{k-1}) & \rightarrow & \pi_{i-1}(A_{k-1}, C) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{i+1}(X_k, X_{k+1}) & \rightarrow & \pi_i(X_{k-1}, C) & \rightarrow & \pi_i(X_k, C) & \rightarrow & \pi_i(X_k, X_{k-1}) & \rightarrow & \pi_{i-1}(X_{k-1}, C). \end{array}$$

Die Paare  $(A_k, A_{k-1})$  und  $(X_k, X_{k-1})$  sind  $(k - 1)$ -zusammenhängend und es gilt  $k - 1 \geq m + 1$ , da wir  $k = m + 1$  bereits im Induktionsanfang behandelt haben. Also ist  $k \geq m + 2$  und für  $i < m + n < k + n$ , was  $i + 1 < k + n$  impliziert, erhalten wir, dass der erste und der vierte vertikale Pfeil Isomorphismen sind. Nach Induktionsannahme sind der zweite und der fünfte vertikale Pfeil für  $i < m + n$  Isomorphismen, denn  $(A_k, C)$  ist  $m$ -zusammenhängend und  $(B, C)$  ist  $n$ -zusammenhängend. Also ist auch die Abbildung in der Mitte nach Fünferlemma ein Isomorphismus.

Ist  $i = m + n$ , so ist die zweite (vertikale) Abbildung nach Induktion surjektiv. Der vierte Pfeil ist ein Isomorphismus (Begründung wie beim ersten Pfeil für  $i < m + n$ ; wir benötigen die Surjektivität). Per Induktion ist der fünfte Pfeil ein Isomorphismus, insbesondere also injektiv. Nach Fünferlemma ist somit der mittlere Pfeil surjektiv.

Im Falle  $i = 2$  stehen rechts keine Gruppen mehr und die Gruppen brauchen nicht abelsch zu sein. Eine kleine Modifikation des Fünferlemma ist aber anwendbar (Übung).

Ist  $i = 1$ , so unterscheiden wir für  $\pi_1(A, C) \rightarrow \pi_1(X, B)$  zwei Fälle. Für  $m \geq 1$  sind beide Ausdrücke trivial, da wir  $A$  aus  $C$  durch Ankleben von Zellen der Dimension  $\geq 2$  erhalten haben und da Wege in  $B \setminus C$  höchstens enden können. Ist  $m = 0$ , so ist  $n \geq 1$  und zelluläre Approximation liefert, dass sich die Wege aus  $B \setminus C$  heraushomotopieren lassen.

**Fall 4:** Seien  $C, A, B, X$  wie in der Behauptung des Theorems. Nach Lemma 12.26 ist  $(A, C)$  homotopieäquivalent zu einem Paar  $(A', C)$  wie im Fall 3 und die Homotopieäquivalenz ist auf  $C$  konstant. Ein ebensolches Paar  $(B', C)$  gibt es zu  $(B, C)$ . Da beide Homotopieäquivalenzen auf  $C$  konstant sind, erhalten wir eine Homotopieäquivalenz  $A \cup B \simeq A' \cup B'$ . Somit ist dieser Fall auf Fall 3 zurückgeführt und das Theorem folgt.  $\square$

Die folgende Proposition liefert einen Zusammenhang zwischen relativen Homotopiegruppen und absoluten Homotopiegruppen des Quotientenraumes, wie wir ihn in ähnlicher Form auch für Homologiegruppen kennen.

**Proposition 12.30.** Sei  $(X, A)$  ein  $r$ -zusammenhängendes CW-Paar,  $A$  ein  $s$ -zusammenhängender Raum und gelte  $r, s \geq 0$ . Dann ist die von der Quotientenabbildung  $X \rightarrow X/A$  induzierte Abbildung

$$\pi_i(X, A) \rightarrow \pi_i(X/A)$$

für  $i \leq r + s$  ein Isomorphismus und für  $i = r + s + 1$  eine Surjektion.

*Beweis.* Sei  $X \cup CA$  der Komplex, der entsteht, wenn wir den Kegel  $CA$  längs  $A \subset X$  an  $X$  ankleben.  $CA$  ist ein zusammenziehbarer Unterkomplex von  $X \cup CA$ . Somit ist  $X \cup CA \rightarrow (X \cup CA)/CA = X/A$  eine Homotopieäquivalenz. Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \pi_i(X, A) & \longrightarrow & \pi_i(X \cup CA, CA) & \longrightarrow & \pi_i(X \cup CA/CA) = \pi_i(X/A). \\ & & \uparrow \cong & \nearrow \cong & \\ & & \pi_i(X \cup CA) & & \end{array}$$

Kommutativität und Wohldefiniertheit sind klar. Der vertikale Isomorphismus im Diagramm stammt dabei aus der langen exakten Homotopiesequenz für Paare

$$0 \cong \pi_i(CA) \rightarrow \pi_i(X \cup CA) \rightarrow \pi_i(X \cup CA, CA) \rightarrow \pi_{i-1}(CA) \cong 0.$$

Betrachte nun die erste Abbildung. Die exakte Sequenz für das Paar  $(A, CA)$  lautet

$$\pi_{s+1}(A) \rightarrow \pi_{s+1}(CA) \rightarrow \pi_{s+1}(CA, A) \rightarrow \pi_s(A).$$

Ist  $A$  ein  $s$ -zusammenhängender Raum, so liefert diese Sequenz, dass an der letzten Stelle und an der zweiten Stelle, da  $CA$  ein Kegel ist, Nullen stehen. Somit ist  $\pi_{s+1}(CA, A) \cong 0$ . Dieses Argument funktioniert auch für  $s, s-1, \dots$ . Somit ist  $(CA, A)$  ein  $(s+1)$ -zusammenhängendes Paar.

Nach Voraussetzung ist  $(X, A)$  ein  $r$ -zusammenhängendes Paar. Somit ist

$$\pi_i(X, A) \rightarrow \pi_i(X \cup CA, CA)$$

für  $i < r + (s + 1)$ , also für  $i \leq r + 1$ , ein Isomorphismus und für  $i = r + s + 1$  eine Surjektion. Die Behauptung ergibt sich nun aus dem obigen kommutativen Diagramm.  $\square$

**12.7. Der Satz von Hurewicz.** Einen Zusammenhang zwischen Homologiegruppen und Homotopiegruppen liefert der Satz von Hurewicz. Mit seiner Hilfe kann man induktiv die niedrigste nichttriviale Homotopiegruppe ( $n \geq 2$ ) aus der Kenntnis der Homologiegruppen bestimmen.

**Theorem 12.31 (Hurewicz).** Sei  $X$  ein  $(n-1)$ -zusammenhängender topologischer Raum,  $n \geq 2$ . Dann ist  $\tilde{H}_i(X) \cong 0$  für  $i < n$  und  $\pi_n(X) \cong H_n(X)$ .

Ist  $(X, A)$  ein  $(n-1)$ -zusammenhängendes Paar mit  $n \geq 2$ ,  $A \neq \emptyset$  und ist  $A$  einfach zusammenhängend, so gilt  $H_i(X, A) \cong 0$  für alle  $i < n$  und  $\pi_n(X, A) \cong H_n(X, A)$ .

*Ohne Beweis.*  $\square$



## ANHANG A. TOPOLOGISCHE GRUNDLAGEN

Wir wiederholen einige wichtige Grundbegriffe aus der Topologie.

Seien  $X, Y$  topologische Räume. Setze  $I := [0, 1]$ .

**Definition A.1** (Homotopie). Seien  $X, Y$  topologische Räume.

- (i) Eine **Homotopie** ist eine Familie  $(\varphi_t)_{t \in I}$  von Abbildungen  $\varphi_t : X \rightarrow Y$ , so dass die Abbildung  $\Phi : X \times I \rightarrow Y$ , definiert durch  $\Phi(x, t) := \varphi_t(x)$ , stetig ist.
- (ii) Zwei Abbildungen  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen heißen **homotop**, wenn es eine Homotopie  $(g_t)_{t \in I}$  mit  $g_t : X \rightarrow Y$ ,  $g_0 = f_0$  und  $g_1 = f_1$  gibt. Wir schreiben  $f_0 \simeq f_1$ .
- (iii) Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen heißt **Homotopieäquivalenz**, wenn es eine stetige Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gibt, so dass  $f \circ g \simeq \mathbf{1}_Y$  und  $g \circ f \simeq \mathbf{1}_X$  gelten.
- (iv) Zwei topologische Räume  $X$  und  $Y$  haben den gleichen **Homotopietyp** oder sind bis auf Homotopie äquivalent oder sind **homotopieäquivalent**, wenn es eine Homotopieäquivalenz zwischen ihnen gibt. Wir schreiben  $X \simeq Y$ .

**Definition A.2** (Retrakte). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ .

- (i) Dann ist  $A$  ein **Retrakt** von  $X$ , wenn es eine stetige Abbildung  $r : X \rightarrow A$  (**Retraktion**) gibt, so dass  $r|_A = \mathbf{1}_A$  ist.
- (ii) Dann ist  $A$  ein (strenger) **Deformationsretrakt** von  $X$ , wenn es eine Familie  $(f_t)_{t \in I}$  von Abbildungen  $f_t : X \rightarrow X$  gibt, so dass  $f_0 = \mathbf{1}_X$ ,  $f_1(X) = A$  und  $f_t|_A = \mathbf{1}_A$  für alle  $t \in I$  gelten und dass weiterhin  $X \times I \ni (x, t) \mapsto f_t(x)$  stetig ist.

**Beispiele A.3.**

- (i)  $\partial B_1((-1, 0)) \cup \partial B_1((1, 0))$  ist ein Retrakt und ein Deformationsretrakt von  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ .
- (ii) Die Menge  $\partial B_1((1, 0))$  ist ein Retrakt, aber kein Deformationsretrakt von  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ .

Die Tatsache, dass es sich nicht um einen Deformationsretrakt handelt ist zwar anschaulich klar, ein Beweis benötigt aber Betrachtungen über Fundamentalgruppen.

- (iii) Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit mit Tubenumgebung  $U$ . Dann ist  $M$  ein Deformationsretrakt von  $U$ .

**Lemma A.4.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $A \subset X$ .

- (i) Ist  $A$  ein Deformationsretrakt von  $X$ , so ist  $A$  ein Retrakt von  $X$ .
- (ii) Ist  $A$  ein Deformationsretrakt von  $X$ , so sind  $A$  und  $X$  homotopieäquivalent.

*Beweis.*

- (i) Wähle  $r = f_1$ .
- (ii) Benutze die Abbildung  $f_1 : X \rightarrow A$  und die Inklusion  $i : A \rightarrow X$ . Es gilt  $f_1 \circ i = \text{id}_A$ . Die Homotopie  $f_t$  zeigt, dass  $i \circ f_1 \simeq \text{id}_X$  gilt.  $\square$

**Bemerkung A.5.** Ein wichtiges Beispiel für homotope Abbildungen sind homotope Wege. Ein Weg ist eine stetige Abbildung von  $[0, 1]$  in einen topologischen Raum. Ein geschlossener Weg ist eine stetige Abbildung  $f$  von  $[0, 1]$  in einen topologischen Raum mit  $f(0) = f(1)$  oder, äquivalent dazu, eine Abbildung von  $S^1$  in einen topologischen Raum.

- (i) **Frei homotope geschlossene Wege:** Sei  $X$  ein topologischer Raum und seien  $\alpha, \beta: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  geschlossene Wege. Dann ist  $\alpha$  (frei) homotop zu  $\beta$ , falls die Abbildungen  $\alpha$  und  $\beta$  homotop zueinander sind.
- (ii) **Wege mit festen Endpunkten:** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $x_0, x_1 \in X$ . Seien  $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X$  stetige Abbildungen mit  $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$  und  $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$ . Dann heißt  $\alpha$  homotop zu  $\beta$ , wenn es eine stetige Abbildung  $\Phi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\Phi(\cdot, 0) = \alpha$ ,  $\Phi(\cdot, 1) = \beta$ ,  $\Phi(0, t) = x_0$  und  $\Phi(1, t) = x_1$  für alle  $t \in I$  gibt.
- (iii) **Geschlossene Wege mit festen Endpunkten:** Wie bei festen Endpunkten, falls  $x_0 = x_1$  ist.

Homotope Wege mit festen Endpunkten sind Beispiel für relative Homotopien:

**Definition A.6.**

- (i) Eine Homotopie  $\varphi_t: X \rightarrow Y$  heißt **relativ** zu einer Menge  $A \subset X$ , wenn  $\varphi_t(a)$  für beliebiges aber festes  $a \in A$  unabhängig von  $t \in I$  ist. (Einen Spezialfall davon haben wir bereits beim Deformationsretrakt kennen gelernt. Dort hatten wir gefordert, dass  $f_t|_A = \mathbf{1}_A$  für alle  $t \in I$  gilt.)
- (ii) Sei  $\varphi_t: X \rightarrow Y$  eine Homotopie und seien  $A \subset X$  und  $B \subset Y$ . Falls  $\varphi_t(A) \subset B$  für alle  $t \in I$  gilt, so sprechen wir von einer Homotopie von Paaren  $\varphi_t: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ . Im Spezialfall, dass  $A = \{x_0\}$  und  $B = \{y_0\}$  gelten, sprechen wir von einer Homotopie von punktierten Räumen und schreiben  $\varphi_t: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ .
- (iii) Entsprechend heißen punktierte Räume  $(X, x_0)$  und  $(Y, y_0)$  **homotopieäquivalent**, wenn es stetige Abbildungen  $\varphi: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  und  $\psi: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  gibt, so dass  $\varphi \circ \psi \simeq \mathbf{1}_Y$  und  $\psi \circ \varphi \simeq \mathbf{1}_X$  gelten, wobei „ $\simeq$ “ sich auf Homotopien punktierter Räume bezieht. Die Abbildungen  $\varphi$  und  $\psi$  heißen dann **Homotopieinverse** voneinander. Wir schreiben  $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$ .

**Definition A.7** (Finaltopologie, Quotiententopologie). Sei  $Y$  eine Menge und seien  $(X_i, \mathcal{O}_i)$ ,  $i \in I$ , topologische Räume. Seien  $f_i: X_i \rightarrow Y$  Abbildungen. Dann existiert eine feinste Topologie auf  $Y$ , die Finaltopologie, so dass alle  $f_i$  stetig werden, nämlich  $\mathcal{O} := \{A \subset Y : f_i^{-1}(A) \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I\}$ .

**Spezialfall Quotientenraum:** Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Sei  $\bar{x}$  die Äquivalenzklasse von  $x$  und  $\bar{X} := \{\bar{x} : x \in X\}$ . Definiere die Projektion  $p: X \rightarrow \bar{X}$  durch  $x \mapsto \bar{x}$ . Die zugehörige Finaltopologie heißt Quotiententopologie.  $U \subset \bar{X}$  ist genau dann offen, wenn  $p^{-1}(U) \subset X$  offen ist.

**Definition A.8** (Zusammenkleben von Räumen). Seien  $X$  und  $Y$  disjunkte topologische Räume,  $A \subset X$  eine abgeschlossene Teilmenge und  $f: A \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Wir definieren auf  $X \cup Y$  eine Äquivalenzrelation  $\sim$  durch

$$z_1 \sim z_2 : \iff \begin{cases} (z_1, z_2 \in A & \text{und } f(z_1) = f(z_2)) \text{ oder} \\ (z_1 \in A, z_2 \in f(A) & \text{und } f(z_1) = z_2) \text{ oder} \\ (z_2 \in A, z_1 \in f(A) & \text{und } f(z_2) = z_1) \text{ oder} \\ (z_1 = z_2). \end{cases}$$

Den Faktorraum  $(X \cup Y)/\sim$  bezeichnen wir mit  $Y \cup_f X$ .  $Y \cup_f X$  heißt der durch Zusammenkleben von  $X$  mit  $Y$  mittels  $f$  entstandene Raum.

**Bemerkung A.9.** Insbesondere werden beim Zusammenkleben von  $X \cup Y$  zu  $Y \cup_f X$  die Punkte aus  $f(A)$  mit allen ihren Urbildern identifiziert.

**Beispiele A.10.**

- (i) Sei  $X = [0, 1]$ ,  $A = \{0\} \cup \{1\}$ ,  $Y = [2, 3]$  und  $f(0) = 2$ ,  $f(1) = 3$ . Dann ist  $X \cup_f Y$  homöomorph zu  $\mathbb{S}^1$ .
- (ii) Sei  $X = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A = \partial B_1(0)$ ,  $Y = \{p\}$  eine einpunktige Menge und sei  $f(x) = p$  für alle  $x \in A$ . Dann ist  $Y \cup_f X$  homöomorph zu  $\mathbb{S}^n$ .

**Definition A.11** (Ankleben von Zellen). Definiere  $D^n := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$  als die abgeschlossene  $n$ -dimensionale Einheitskugel,  $e^n := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$  als die offene  $n$ -dimensionale Einheitskugel und  $\mathbb{S}^{n-1} := \partial B_1(0) \equiv D^n \setminus \dot{D}^n$  als die  $(n-1)$ -dimensionale Sphäre. Wir nennen auch  $D^n$  eine  $n$ -dimensionale Kugel,  $e^n$  eine  $n$ -dimensionale Zelle und  $\mathbb{S}^n$  eine  $n$ -dimensionale Sphäre.

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Wir sagen, dass  $X \cup_f D^n$  (oder ein dazu homöomorpher Raum) durch Ankleben (oder Anheften) einer  $n$ -Zelle mittels  $f$  entstanden sei. Man schreibt auch laxerweise  $X \cup_f e^n$  statt  $X \cup_f D^n$ .

**Bemerkung A.12.** Sei  $p : X \cup D^n \rightarrow X \cup_f D^n$  die kanonische Projektion. Dann ist  $p|_{e^n} : e^n \rightarrow p(e^n)$  ein Homöomorphismus. Dies erklärt, warum man vom Anheften/Ankleben einer  $n$ -Zelle spricht.

**Beispiele A.13.**

- (i) Sei  $X = D^n$  und  $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow D^n$  die kanonische Inklusionsabbildung (in einen zweiten  $n$ -Ball). Dann ist  $X \cup_f D^n$  homöomorph zu einer  $n$ -dimensionalen Sphäre.
- (ii) Sei  $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $A := \{(x, y) \in X : x = 0 \vee x = 1\}$ ,  $Y := [0, 1]$ . Sei  $f : A \rightarrow Y$  durch  $f(0, y) := y$  und  $f(1, y) := 1 - y$  definiert. Dann ist  $M := Y \cup_f X$  homöomorph zu dem (abgeschlossenen) Möbiusband.

Der Rand  $\partial M = M \setminus \dot{M}$  des Möbiusbandes ist homöomorph zu  $\mathbb{S}^1$ . Somit lässt sich an  $M$  eine 2-Zelle mittels einer Abbildung  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \partial M$  injektiv ankleben. Wir können für  $g$  einen Homöomorphismus wählen. Wir erhalten einen neuen Raum. (Dieser ist homöomorph zu  $\mathbb{R}P^2$ .)

Wir können auch mehrere Zellen gleichzeitig ankleben.

**Definition A.14.** Seien  $D^n \times \{i\}$ ,  $i \in I$ ,  $n$ -Bälle und  $f_i : \mathbb{S}^{n-1} \times \{i\} \rightarrow X$  stetige Abbildungen der dazugehörigen  $(n-1)$ -Sphären in einen topologischen Raum  $X$ .  $\mathbb{S}_I^{n-1} = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{S}^{n-1} \times \{i\})$  ist ein Unterraum von  $D_I^n := \bigcup_{i \in I} (D^n \times \{i\})$ . Wir erhalten eine stetige Abbildung  $f : \mathbb{S}_I^{n-1} \rightarrow X$  durch die Definition  $f(x, i) := f_i(x)$ . Man sagt, dass  $X' := X \cup_f D_I^n$  durch Ankleben der  $n$ -Zellen  $e^n \times \{i\}$ ,  $i \in I$ , an  $X$  entstanden sei.

CW-Komplexe wurden von J. H. C. Whitehead eingeführt. Sie werden induktiv definiert. (CW steht für "closure-finite weak topology".)

**Definition A.15** (endliche CW-Komplexe). Ein nulldimensionaler CW-Komplex ist eine endliche Menge von Punkten, die mit der diskreten Topologie versehen ist.

Ein  $n$ -dimensionaler CW-Komplex ist ein Raum der Form  $X \cup_f e_I^n$ , wobei  $f$  stetig,  $X$  ein  $k$ -dimensionaler CW-Komplex mit  $k < n$  und  $e_I^n = \bigcup_{i \in I} (e^n \times \{i\})$ ,  $|I| < \infty$ , die topologische Summe von  $n$ -Zellen mit  $n \geq 1$  ist.

Die Menge aller Punkte in einem CW-Komplex, die bereits in einem  $k$ -dimensionalen CW-Komplex enthalten sind heißt  $k$ -Skelett oder  $k$ -Gerüst.

Für unendliche CW-Komplexe verwendet man die folgende Definition.

**Definition A.16** (CW-Komplex). Ein CW-Komplex  $X$  ist ein Hausdorffraum  $X$  mit einer (disjunkten) Zerlegung  $\mathcal{E}$  in Zellen, so dass

- (i) es zu jeder  $n$ -Zelle  $e$  eine stetige Abbildung  $\Phi_e: \bar{e} \rightarrow X$  gibt, die  $e$  homöomorph auf  $e$  und  $\partial e$  in die Vereinigung der maximal  $(n-1)$ -dimensionalen Zellen abbildet. Die Abbildungen  $\Phi_e$  bezeichnet man auch als charakteristische Abbildungen.
- (ii)  $\bar{e}$  (oder genauer  $\Phi_e(\bar{e})$ ) für jedes  $e \in \mathcal{E}$  nur endlich viele andere Zellen in  $\mathcal{E}$  trifft (Hüllenendlichkeit).
- (iii)  $A \subset X$  genau dann abgeschlossen ist, wenn  $A \cap \bar{e}$  (genauer  $A \cap \Phi_e(\bar{e})$ ) für jede Zelle  $e \in \mathcal{E}$  abgeschlossen ist (schwache Topologie).

**Beispiele A.17.**

- (i)  $\mathbb{S}^2$  ist homöomorph zu einem zweidimensionalen CW-Komplex. Man klebt zunächst eine 1-Zelle  $e^1$  an einen Punkt und erhält einen zu  $\mathbb{S}^1$  homöomorphen Raum. Durch Ankleben von zwei 2-Zellen  $e_1^2$  und  $e_2^2$  an den entstandenen Raum erhält man einen zu  $\mathbb{S}^2$  homöomorphen Raum.
- (ii) Man erhält auch einen zu einer  $\mathbb{S}^2$  homöomorphen CW-Komplex, indem man eine 2-Zelle an einen Punkt klebt.
- (iii) Klebt man eine  $n$ -Zelle an einen Punkt, so erhält man einen  $n$ -dimensionalen CW-Komplex homöomorph zu  $\mathbb{S}^n$ .

**Definition A.18** (Kegel).

- (i) Sei  $X$  ein topologischer Raum. Wir definieren den Kegel über  $X$  als  $CX := (X \times [0, 1]) / (X \times \{0\})$ .
- (ii) Sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig. Dann ist  $C_f$ , der Abbildungskegel von  $f$  als  $Y \cup_f CX$  definiert. („Wir kleben den Kegel über  $X$  mit Hilfe von  $f$  in den Raum  $Y$ .“ Hier betrachten wir die Abbildung  $f$  als auf  $X \times \{1\} \subset CX$  definiert.)

#### LITERATUR

1. Klaus Deimling, *Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade*, Springer-Verlag, Berlin, 1974, Hochschultext.
2. Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/>.

OLIVER C. SCHNÜRER, FREIE UNIVERSITÄT BERLIN, ARNIMALLEE 6, 14195 BERLIN, GERMANY

*Email address:* `Oliver.Schnuerer@math.fu-berlin.de`