DIFFERENTIALGEOMETRIE I

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung Differentialgeometrie I an der Universität Konstanz, entstanden aus dem früheren Manuskript zur Elementaren Differentialgeometrie: Wintersemester 2017/18.

Inhaltsverzeichnis

In der Differentialgeometrie geht es um Mannigfaltigkeiten und deren Krümmung. Wir orientieren uns an [7, 12], benutzen aber auch [14].

1. Isometrien des $\mathbb{R}^n$

Definition 1.1. Eine Abbildung $f\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ zwischen zwei metrischen Räumen (X_i, d_i) heißt Isometrie, falls

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$$

für alle $x, y \in X_1$ gilt und f surjektiv ist.

Lemma 1.2. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann bildet die Menge der Isometrien $f\colon (X, d) \to (X, d)$ bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe.*

Beweis. Isometrien sind injektiv, also auch bijektiv und daher invertierbar mit bijektiver Inversen. Seien f, g Isometrien. Dann folgt aus $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ auch $d(x, y) = d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$. Daher ist f^{-1} ebenfalls eine Isometrie. Es gilt

$$d(f \circ g(x), f \circ g(y)) = d(g(x), g(y)) = d(x, y),$$

jeweils für alle $x, y \in X$. Die Bijektivität von f und g überträgt sich auf die Komposition $f \circ g$. Die Identität $x \mapsto x$ ist das neutrale Element. $\square$

Date: 31. Januar 2018.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 53-01.

Theorem 1.3. *Die Isometrien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ des $\mathbb{R}^n$ sind genau die Abbildungen der Form*

$$f(x) = Ax + b$$

mit $A \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Gelte $f(x) = Ax + b$. Dann rechnet man direkt nach, dass es sich um eine Isometrie handelt.

„$\Longleftarrow$“: Sei f eine beliebige Isometrie. Durch Addition eines konstanten Vektors in $\mathbb{R}^n$ dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $f(0) = 0$ gilt. Wir erhalten

$$|f(x)| = d(f(x), 0) = d(f(x), f(0)) = d(x, 0) = |x|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da f eine Isometrie ist, gilt $|f(x) - f(y)| = |x - y|$. Aufgrund der Polarisationsformel (oder durch direktes Ausmultiplizieren der quadrierten Normen) erhalten wir

$$\begin{aligned} 2\langle f(x), f(y)\rangle &= |f(x)|^2 + |f(y)|^2 - |f(x) - f(y)|^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2 = 2\langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

Somit erhält f auch das Skalarprodukt. Sei $(e_i)_{1\le i\le n}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Wir erhalten $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Dies besagt, dass auch $(f(e_i))_{1\le i\le n}$ eine Orthonormalbasis ist. Daher gilt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x), f(e_i)\rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x^i f(e_i).$$

Somit ist f eine lineare Abbildung. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass eine lineare Abbildung, die eine Orthonormalbasis auf eine andere Orthonormalbasis abbildet, durch eine orthogonale Matrix dargestellt wird. $\square$

Definition 1.4. Die Isometrien $f(x) = Sx + b$, $S \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ heißen (Euklidische) Bewegungen.

Die Isometrie $f(x) = Sx + b$ heißt orientierungserhaltend oder eigentliche Bewegung, falls $\det S = 1$ für die orthogonale Matrix S gilt.

Definition 1.5. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann heißt

$$\sphericalangle(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y\rangle}{|x| \cdot |y|} \in [0, \pi]$$

der Winkel zwischen x und y.

2. Kurven im $\mathbb{R}^n$

2.1. Kurven, Bogenlänge und Umparametrisierung.

Definition 2.1.

(i) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung $\alpha \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \equiv \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$, heißt parametrisierte Kurve der Klasse C^k im $\mathbb{R}^n$.

(ii) Eine C^1-Kurve α heißt regulär, falls $\alpha'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt.

(iii) Eine C^k-Kurve $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt C^k-geschlossen, falls

$$\alpha^{(l)}(a) = \alpha^{(l)}(b)$$

für alle $0 \le l \le k$ gilt.

(iv) Eine Kurve α heißt stückweise von der Klasse C^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \le i \le N$, mit $I = [a_0, a_N]$ und $\alpha|_{[a_i, a_{i+1}]} \in C^k$ für alle $0 \le i \le N - 1$ gibt.

(v) Ist $\alpha\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-geschlossene Kurve, so stellen wir die Kurve auch als Abbildung

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}\colon \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{R}^n,\\ e^{i\varphi} &\mapsto \alpha(\varphi)\end{aligned}$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ dar.

Definition 2.2 (Bogenlänge)**.** Sei $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stückweise C^1-Kurve. Dann ist

$$L(\alpha) := \int\limits_a^b |\alpha'(t)|\, dt$$

die Bogenlänge der Kurve α, wobei die Integration jeweils einzeln über Intervalle, auf denen α von der Klasse C^1 ist, ausgeführt wird.

Definition 2.3. Seien $\alpha_i\colon I_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, parametrisierte Kurven. Dann heißt α_2 Umparametrisierung von α_1, falls es eine Bijektion $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ mit $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in I_2$ (also einen Diffeomorphismus) gibt, so dass

$$\alpha_2 = \alpha_1 \circ \varphi$$

gilt.

φ heißt Parametertransformation. Sie heißt richtungstreu, falls $\varphi' > 0$ gilt und richtungsumkehrend, wenn $\varphi' < 0$ gilt.

Zur Umparametrisierung von Kurven der Klasse C^k verwenden wir Parametertransformationen der Klasse C^k.

Lemma 2.4. *Auf der Menge aller parametrisierten Kurven in $\mathbb{R}^n$ ist $\sim$ mit $\alpha \sim \beta$, falls β eine Umparametrisierung von α ist, eine Äquivalenzrelation.*

Beweisidee. Beachte dazu insbesondere, dass die Inverse einer Parametertranformation wieder eine Parametertransformation ist und dass die Verknüpfung von zwei Parametertransformationen (bei geeigneten Definitionsbereichen) ebenfalls eine Parametertransformation ist. □

Lemma 2.5. *Sei α_2 eine Umparametrisierung von α_1, $\alpha_2 = \alpha_1 \circ \varphi$.*

(i) Dann gilt $L(\alpha_1) = L(\alpha_2)$.

(ii) Der normierte Tangentialvektor $\frac{\alpha_i'}{|\alpha_i'|}$ ist bei einer orientierungserhaltenden Parametertransformation invariant, d. h. es gilt

$$\frac{\alpha_2'}{|\alpha_2'|} = \frac{\alpha_1'}{|\alpha_1'|} \circ \varphi.$$

(iii) Ist α_1 regulär, so auch α_2.

Beweis.

(i) Sei α_i auf $I_i = [a_i, b_i]$ definiert. Dann erhalten wir mit Hilfe der Transformationsformel für Integrale

$$L(\alpha_2) = \int\limits_{a_2}^{b_2} |\alpha_2'(t)|\, dt = \int\limits_{a_2}^{b_2} |\alpha_1'(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)|\, dt = \int\limits_{a_1}^{b_1} |\alpha_1'(\tau)|\, d\tau = L(\alpha_1).$$

Ist $\varphi' < 0$, so wird der Faktor $\frac{|\varphi'|}{\varphi'} = -1$ aufgrund der Integraltransformation durch Vertauschen der Integrationsgrenzen wieder kompensiert.

(ii) Es gilt

$$\frac{\alpha_2'(t)}{|\alpha_2'(t)|} = \frac{\frac{d}{dt}\alpha_1(\varphi(t))}{\left|\frac{d}{dt}\alpha_1(\varphi(t))\right|} = \frac{\alpha_1'(\varphi(t))}{|\alpha_1'(\varphi(t))} \cdot \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}.$$

(iii) Dies folgt ebenfalls aus der Kettenregel $\alpha_2'(\varphi(t)) = \alpha_1'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. $\square$

Definition 2.6. Eine C^1-Kurve $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt nach der Bogenlänge parametrisiert, falls $|\alpha'(t)| = 1$ für alle $t \in I$ gilt.

Bemerkung 2.7. Ist $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ nach der Bogenlänge parametrisiert, so folgt $L(\alpha) = b - a$.

Theorem 2.8. *Sei $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^k-Kurve, $k \geq 1$. Dann gibt es eine (orientierungserhaltende) Parametertransformation $\varphi \in C^k(J, I)$, so dass $\alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.*

Beweis. Definiere die Bogenlängenfunktion $\sigma\colon I \to \mathbb{R}$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ durch

$$\sigma(t) := \int\limits_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau$$

und setze $J := \sigma(I)$. Wegen $\sigma'(t) = |\alpha'(t)| > 0$ ist $\sigma \in C^k(I, J)$ invertierbar. Setze $\varphi(s) := \sigma^{-1}(s)$. Wir erhalten aus $\varphi(\sigma(\tau)) = \tau$ zunächst $\varphi'(\sigma(\tau))\sigma'(\tau) = 1$ und $\varphi'(s) = \frac{1}{\sigma'(\varphi(s))}$. Somit gilt

$$\left|\frac{d}{ds}\alpha(\varphi(s))\right| = |\alpha'(\varphi(s))| \cdot \frac{1}{\sigma'(\varphi(s))} = 1$$

und wir erhalten die Behauptung.

Es ist üblich, s als Parameter für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve zu verwenden. $\square$

Bemerkung 2.9. Sind α_i, $i = 1, 2$, beide nach der Bogenlänge parametrisiert und gelte $\alpha_2(t) = \alpha_1(\varphi(t))$, dann folgt

$$1 = |\alpha_2'(t)| = |\alpha_1'(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)| = |\varphi'(t)|$$

und daher ist $\varphi(t) = t_0 \pm t$. Die Parametrisierung nach der Bogenlänge ist also bis auf eine Isometrie von $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.

2.2. **Die isoperimetrische Ungleichung.**

Theorem 2.10 (Isoperimetrische Ungleichung)**.** *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und sei ∂G das Bild einer nach der Bogenlänge parametrisierten stückweisen C^1-Kurve $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$. Sei $\mathcal{A} := |G|$ der Flächeninhalt von G und L die (Bogen-)Länge von α. Dann gilt*

$$\mathcal{A} \leq \frac{1}{4\pi} L^2$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn G ein Ball ist.

Lemma 2.11. *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und sei ∂G das Bild einer stückweisen C^1-Kurve $\alpha : [0, a] \to \mathbb{R}^2$. Sei $\alpha|_{[0,a)}$ injektiv und gelte $\alpha(0) = \alpha(a)$. Sei $\alpha(t) = (x(t), y(t))^T$. Dann gilt $|G| = \int\limits_0^a x(t)y'(t)\, dt$.*

Beweis. Sei ν die äußere Normale an G. Nehme an, dass G links der Kurve liegt und dass diese nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Dann sind $T = \alpha' = (x', y')^T$ und $\nu = (y', -x')^T$. Nach dem Divergenzsatz gilt

$$2|G| = \int\limits_G 2 = \int\limits_G \operatorname{div}(x, y)^T = \int\limits_{\partial G} \left\langle \nu, (x, y)^T \right\rangle = \int\limits_0^a (xy' - yx')(s)\, ds.$$

Da α eine geschlossene Kurve ist, sehen wir mit partieller Integration, dass beide Summanden denselben Beitrag liefern. Aufgrund der Integraltranformationsformel gilt die Behauptung auch, wenn α nicht nach der Bogenlänge parametrisiert ist. $\square$

Beweis von 2.10. Sei $x(t)$ ohne Einschränkung in $t = 0$ minimal und in $t = t_0$ maximal. Sei $(x(t), \bar{y}(t))$ eine Parametrisierung eines Kreises vom Radius r, ohne Einschränkung $B_r(0)$, der nach orthogonaler Projektion auf die x-Achse dasselbe Bild wie die Kurve α hat. Es gilt

$$\mathcal{A} + \pi r^2 = \int\limits_0^L xy' - \bar{y}x'\, ds = \int\limits_0^L \left\langle \begin{pmatrix} x \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \right\rangle ds$$

$$\le \int\limits_0^L \underbrace{\sqrt{x^2 + \bar{y}^2}}_{=r,\text{ da }(x,\bar{y})\in\partial B_r(0)} \cdot \underbrace{\sqrt{x'^2 + y'^2}}_{=|\alpha'|=1} ds = Lr. \tag{2.1}$$

Somit ist

$$2\sqrt{A} \cdot \sqrt{\pi r^2} \le \mathcal{A} + \pi r^2 \le Lr \tag{2.2}$$

und die isoperimetrische Ungleichung folgt.

Gilt überall Gleichheit, so folgt aus der ersten Ungleichung in (2.2) $A = \pi r^2$. r hängt damit insbesondere nicht von der Richtung ab, in die wir die Kurve projizieren. Aus (2.1) folgt $(xy' - \bar{y}x')^2 = (x^2 + \bar{y}^2)(x'^2 + y'^2)$, also auch (direktes Ausmultiplizieren oder: drehe einen Vektor um 90° und benutze die Orthogonalität) $(xx' + \bar{y}y')^2 = 0$. Aus dieser Gleichung folgen die ersten beiden Gleichheitszeichen in

$$\frac{x}{y'} = -\frac{\bar{y}}{x'} = \pm\frac{\sqrt{x^2 + \bar{y}^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \pm r.$$

(Falls $y' = 0$ ist, folgt $x = 0$ und die nächste Gleichung gilt trotzdem.) Also gilt $x = \pm ry'$. Da r unabhängig von Drehungen des Koordinatensystems ist, folgt ebenso $y = \pm rx'$. Also ist $x^2 + y^2 = r^2(x'^2 + y'^2) = r^2$. α durchläuft also einen Kreis. □

3. Krümmung von Kurven

3.1. Definition der Krümmung von Kurven in der Ebene.

Definition 3.1. Sei $\alpha \in C^k\left(I, \mathbb{R}^2\right)$, $k \ge 1$, regulär. Wir setzen $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt $J^2 = -\mathbb{1}$ und $\langle Jv, w\rangle = \det(v, w)$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$. Identifizieren wir einen Vektor $z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $z := a + ib \subset \mathbb{C}$, so ist bezüglich dieser Identifizierung $Jz = iz$.

Definiere den Tangentialvektor von α durch $\tau(t) := \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$. Dann ist ν mit $\nu(t) := J\tau(t)$ in $C^{k-1}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ und $\tau(t), \nu(t)$ ist ein positiv orientiertes (normiertes) 2-Bein längs α, d. h. $\tau(t)$ ist ein positives Vielfaches von $\alpha'(t)$, $|\tau(t)| = 1$, $|\nu(t)| = 1$ und $\det(\tau(t), \nu(t)) = 1$. ν heißt Normale (Einheitsnormale) an α. Somit steht ν senkrecht auf τ: $\langle\tau(t), \nu(t)\rangle = 0$. (Sie ist eindeutig bestimmt.)

Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann definieren wir die (orientierte) Krümmung $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ von α durch

$$\kappa(s) := \langle\alpha''(s), \nu(s)\rangle.$$

Ist α nicht nach der Bogenlänge parametrisiert, so definieren wir die Krümmung von α durch

$$\kappa_\alpha := \kappa_{\alpha\circ\varphi} \circ \varphi^{-1},$$

wobei φ eine orientierungserhaltende C^2-Parametertransformation ist, so dass $\alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Den Beweis, dass die Krümmung einer nicht nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve wohldefiniert ist, lassen wir als Übungsaufgabe.

Lemma 3.2. *Sei $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2-Kurve. Dann gilt*
$$\kappa(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^3}.$$
Ist α ein Graph, also von der Form $\alpha(x) = (x, u(x))$ mit $u \in C^2(I, \mathbb{R})$, so gilt
$$\kappa(x) = \frac{u''(x)}{(1 + (u'(x))^2)^{3/2}}.$$

Beweis. Sei $\alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert und gelte $\varphi' > 0$. Wir leiten zunächst Formeln für die Ableitungen von φ her:
$$\begin{aligned}
1 &= |(\alpha \circ \varphi)'(s)| = |\alpha'|_{\varphi(s)}| \cdot \varphi'(s),\\
\varphi'(s) &= \frac{1}{|\alpha'(\varphi(s))|},\\
\varphi''(s) &= -\frac{1}{|\alpha'(\varphi(s))|^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|\alpha'(\varphi(s))|} \cdot 2 \cdot \langle \alpha'(\varphi(s)), \alpha''(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \rangle\\
&= -\frac{1}{|\alpha'(\varphi(s))|^4} \langle \alpha'(\varphi(s)), \alpha''(\varphi(s)) \rangle,\\
\kappa_\alpha(t) &= \langle (\alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s))', J\alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \rangle|_{s=\varphi^{-1}(t)}\\
&= \langle \alpha''(\varphi(s)) \cdot (\varphi'(s))^2 + \alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi''(s), J\alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \rangle|_{s=\varphi^{-1}(t)}\\
&= \left\langle \alpha''(t) \cdot \left(\varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right)\right)^2 - \frac{\langle \tau_\alpha(t), \alpha''(t) \rangle \tau_\alpha(t)}{|\alpha'(t)|^2}, J\alpha'(t) \cdot \varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right) \right\rangle\\
&= \frac{1}{|\alpha'(t)|^2} \langle \alpha''(t) - \langle \alpha''(t), \tau_\alpha(t) \rangle \tau_\alpha(t), J\tau_\alpha(t) \rangle\\
&= \frac{\det(\tau_\alpha(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^2} = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^3}.
\end{aligned}$$
Im graphischen Fall erhalten wir aus $\alpha(x) = (x, u(x))^T$ für die Ableitungen $\alpha'(x) = (1, u'(x))^T$ und $\alpha''(x) = (0, u''(x))^T$. Mit $|\alpha'(x)| = \sqrt{1 + (u'(x))^2}$ folgt die Behauptung. ☐

Bemerkung 3.3. Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Sei $s_0 \in \overset{\circ}{I} = \operatorname{int} I$. Definiere die beiden Halbebenen
$$E^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \langle x - \alpha(s_0), \nu(s_0) \rangle > 0\right\}$$
und
$$E^- = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \langle x - \alpha(s_0), \nu(s_0) \rangle < 0\right\}.$$
Setze $h(s) := \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), \nu(s_0) \rangle$. Dann sind $h(s) > 0$ und $\alpha(s) \in E^+$ sowie $h(s) < 0$ und $\alpha(s) \in E^-$ jeweils äquivalent. Es gilt $h(s_0) = 0$, $h'(s_0) = \langle \alpha'(s_0), \nu(s_0) \rangle = 0$ und $h''(s_0) = \langle \alpha''(s_0), \nu(s_0) \rangle = \kappa(s_0)$. Nach Taylor erhalten wir $h(s) = \frac{1}{2}\kappa(s_0)(s - s_0)^2 + o(|s - s_0|^2)$. Somit erhalten wir im Falle $\kappa(s_0) > 0$, dass $\alpha(s) \in E^+$ für $s \neq s_0$ nahe bei s_0 gilt (Linkskurve). Eine entsprechende Aussage gilt für $\kappa(s_0) < 0$ und $\alpha(s) \in E^-$.

Lemma 3.4. *Sei $F(x) = Sx + a$ mit $S \in O(2)$ und $a \in \mathbb{R}^2$ eine starre Bewegung. Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Setze $\tilde{\alpha} := F \circ \alpha$. Dann gelten*
$$\tilde{\tau} = S\tau, \quad \tilde{\nu} = \det S \cdot S\nu, \quad \textit{und} \quad \tilde{\kappa} = \det S \cdot \kappa.$$

Beweis. Wegen $|\tilde{\alpha}'| = |S\alpha'| = |\alpha'| = 1$ ist $\tilde{\alpha}$ ebenfalls nach der Bogenlänge parametrisiert. Es gilt $\tilde{\tau} = \frac{S\alpha'}{|\tilde{\alpha}'|} = S\alpha' = S\tau$. Weiterhin gilt $\langle \tilde{\alpha}', S\nu\rangle = \langle S\alpha', S\nu\rangle = \langle \alpha', \nu\rangle = 0$, $|S\nu| = |\nu| = 1$ sowie $\det(\tilde{\alpha}', S\nu) = \det(S\alpha', S\nu) = \det S\cdot\det(\alpha', \nu) = \det S$. Somit ist $\tilde{\nu} = \det S \cdot S\nu$ die gesuchte Normale längs $F \circ \alpha$. Schließlich gilt

$$\tilde{\kappa} = \langle \tilde{\alpha}'', \tilde{\nu}\rangle = \det S \cdot \langle S\alpha'', S\nu\rangle = \det S \cdot \kappa. \qquad \square$$

Das nachfolgende Lemma erklärt die geometrische Bedeutung der Krümmung einer Kurve.

Lemma 3.5 (Schmiegekreis)**.** *Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ regulär, ohne Einschränkung nach Lemma 3.4 und Umparametrisierung (Satz über implizite Funktionen) lokal sogar von der Form $\alpha(x) = (x, u(x))$. Sei $x_0 \in I$.*

(i) Ist $\kappa(x_0) = 0$, so ist α bis zu zweiter Ordnung asymptotisch zu der Geraden $\beta(x) = (x, u(x_0) + (x - x_0) \cdot u'(x_0))$, d. h. es gilt $|\alpha(x) - \beta(x)| = o(|x - x_0|^2)$ oder $|u(x) - u(x_0) + (x - x_0) \cdot u'(x_0)| = o(|x - x_0|^2)$.

(ii) Ist $\kappa(x_0) \neq 0$, so ist α bis zu zweiter Ordnung asymptotisch zu einem Kreis β mit Mittelpunkt $(x_0, u(x_0))^T + \frac{1}{\kappa(x_0)} \frac{(-u',1)^T}{\sqrt{1+|u'|^2}}(x_0)$ und Radius $\frac{1}{\kappa(x_0)}$, d. h. es gelten in Graphendarstellung

$$\beta(x) = (x, h(x))^T$$

mit

$$\begin{aligned} h(x) = & -\operatorname{sign}(\kappa(x_0))\sqrt{\frac{1}{\kappa(x_0)^2} - \left|x - x_0 + \frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0)\cdot\sqrt{1+(u'(x_0))^2}}\right|^2} \\ & + u(x_0) + \frac{1}{\kappa(x_0)\cdot\sqrt{1+(u'(x_0))^2}} \end{aligned}$$

und

$$|\alpha(x) - \beta(x)| = o(|x - x_0|^2)$$

oder

$$|u(x) - h(x)| = o(|x - x_0|^2).$$

Sind $\alpha \circ \varphi$ und $\beta \circ \psi$ nach orientierungserhaltenden Parametertransformationen φ bzw. ψ nach der Bogenlänge parametrisiert und ist $\varphi(s_0) = x_0 = \psi(s_0)$, so gilt ebenfalls $|\alpha \circ \varphi(s) - \beta \circ \psi(s)| = o(|s - s_0|^2)$.

Beweis.

(i) Folgt direkt nach Taylor.

(ii) Es gilt mit $\kappa(x) = \frac{u''(x)}{(1+(u'(x))^2)^{3/2}}$

$$\begin{aligned} h(x_0) = & \underbrace{-\frac{\operatorname{sign}\kappa(x_0)}{|\kappa(x_0)|}}_{=\frac{-1}{\kappa(x_0)}}\sqrt{1 - \frac{(u'(x_0))^2}{1+(u'(x_0))^2}} + u(x_0) + \frac{1}{\kappa(x_0)\cdot\sqrt{1+(u'(x_0))^2}} \\ = & \, u(x_0), \\ h'(x) = & -\frac{1}{2}\operatorname{sign}(\kappa(x_0))\frac{-2}{\sqrt{\cdots}}\left(x - x_0 + \frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0)\cdot\sqrt{1+(u'(x_0))}}\right), \\ h'(x_0) = & \frac{\operatorname{sign}(\kappa(x_0))}{\sqrt{\cdots}} \cdot \frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0)\cdot\sqrt{1+(u'(x_0))^2}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{|\kappa(x_0)| \cdot \operatorname{sign}(\kappa(x_0))}_{=\kappa(x_0)} \cdot \sqrt{1+(u'(x_0))^2} \cdot \frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1+(u'(x_0))^2}} \\
&= u'(x_0),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h''(x_0) &= \frac{\operatorname{sign}(\kappa(x_0))}{(\sqrt{\cdots})^3} \cdot \left(\frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1+(u'(x_0))^2}} \right)^2 + \frac{\operatorname{sign}(\kappa(x_0))}{\sqrt{\cdots}} \\
&= \operatorname{sign}(\kappa(x_0)) \cdot |\kappa(x_0)|^3 \cdot \left(1+(u'(x_0))^2\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1+(u'(x_0))^2}} \right)^2 \\
&\qquad + \operatorname{sign}(\kappa(x_0)) \cdot |\kappa(x_0)| \cdot \sqrt{1+(u'(x_0))^2} \\
&= \kappa(x_0) \cdot \left(1+(u'(x_0))^2\right)^{3/2} = u''(x_0).
\end{aligned}
$$

Die Behauptung folgt nun ebenfalls nach Taylor.

Wir halten fest, dass $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$, $\alpha'(x_0) = \beta'(x_0)$ und $\alpha''(x_0) = \beta''(x_0)$ gelten.

Es gilt $1 = |(\alpha \circ \varphi)'(s)| = |\alpha'(\varphi(s))| \cdot \varphi'(s) = |\beta'(\psi(s))| \cdot \psi'(s)$ und daher insbesondere $\varphi'(s_0) = \psi'(s_0)$. Nochmaliges Differenzieren liefert

$$0 = \frac{\langle \alpha'(\varphi(s)), \alpha''(\varphi(s)) \rangle}{|\alpha'(\varphi(s))|} (\varphi'(s))^2 + |\alpha'(\varphi(s))| \cdot \varphi''(s).$$

Da aber $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$, $\alpha'(x_0) = \beta'(x_0) \neq 0$ und $\alpha''(x_0) = \beta''(x_0)$ gelten, folgt auch $\varphi''(s_0) = \psi''(s_0)$. Somit folgt auch die letzte Behauptung mit Taylor. $\square$

Lemma 3.6. *Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann gelten für $\tau = \alpha'$ und $\nu = J\tau$ die Gleichungen*

$$
\begin{aligned}
\tau' &= \kappa\nu, \\
\nu' &= -\kappa\tau
\end{aligned}
$$

oder

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \tau \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Beweis. Aus $\langle \tau(s), \tau(s) \rangle = 1$ folgt durch Differenzieren $0 = 2\langle \tau(s), \tau'(s) \rangle$. Damit und nach Definition der Krümmung ($\kappa(s) = \langle \alpha''(s), \nu \rangle$) sowie $\tau(s) = \alpha'(s)$ folgt die erste Gleichheit. Differenzieren von $0 = \langle \tau, \nu \rangle$ liefert $\kappa = \langle \tau', \nu \rangle = -\langle \tau, \nu' \rangle$. Aus $|\nu| = 1$ folgt wie oben, dass $\langle \nu', \nu \rangle = 0$ gilt. Die Behauptung folgt. $\square$

3.2. **Krümmung von Raumkurven.**

Definition 3.7. Sei $\alpha \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann definieren wir die Krümmung $\kappa(s) \in [0, \infty)$ von α im Punkt s durch

$$\kappa(s) := |\alpha''(s)|.$$

Beispiele 3.8.

(i) Die Kurve $\alpha(s) = r\left(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r}\right)$, $r > 0$, ist ein nach der Bogenlänge parametrisierter Kreis. Es gilt

$$\kappa(s) = \frac{1}{r}$$

für alle s.

(ii) Eine Gerade $\alpha(s) = x_0 + s \cdot e$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ hat überall die Krümmung Null.

(iii) Seien $r, a \in \mathbb{R}$ und $L > 0$ noch zu wählen. Dann ist die Schraubenlinie

$$\alpha(t) = \left(r \cos \frac{t}{L}, r \sin \frac{t}{L}, a\frac{t}{L}\right)$$

wegen $|\alpha'(t)| = \sqrt{r^2 + a^2}\frac{1}{L}$ genau für $L = \sqrt{r^2 + a^2}$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Somit ist

$$\kappa(t) = \frac{r}{r^2 + a^2}$$

für alle t.

Definition 3.9. Sei $\alpha \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ regulär. Eine Familie $(v_i)_{1 \le i \le n}$ von Funktionen $v_i \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ heißt ein längs α begleitendes n-Bein, falls

$$v_1(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \quad \text{und} \quad \langle v_i(t), v_j(t)\rangle = \delta_{ij}$$

für alle $1 \le i, j \le n$ und alle $t \in I$ gelten.

Man vergleiche das folgende Resultat mit dem Satz der Linearen Algebra, dass jede differenzierbare Familie $A(t)$ orthogonaler Matrizen mit $A(0) = \mathbb{1}$ eine schiefsymmetrische Ableitung $\dot{A}(0)$ besitzt.

Lemma 3.10. *Seien $v_i \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $1 \le i \le n$, und $t_0 \in I$ beliebig. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.*

(i) $\langle v_i(t), v_j(t)\rangle = \delta_{ij}$ für alle $t \in I$ und alle $1 \le i, j \le n$.

(ii) Es gibt eine t-abhängige Matrix $A = (a_{ij}) \in C^0(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ mit $A = -A^T$, also $a_{ij}(t) = -a_{ji}(t)$ für alle $1 \le i, j \le n$,

$$v_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \quad \textit{für} \quad 1 \le i \le n \quad \textit{und} \quad \langle v_i(t_0), v_j(t_0)\rangle = \delta_{ij}.$$

Beweis.
„(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Da die Vektoren v_i eine Orthonormalbasis bilden, lässt sich jeder Vektor (und damit insbesondere auch v_i') hiermit darstellen. Es gilt $v_i' = \sum\limits_{j=1}^n a_{ij} v_j$ mit $a_{ij} = \langle v_i', v_j\rangle$. Wir erhalten

$$a_{ji} = \langle v_j', v_i\rangle = \underbrace{\langle v_j, v_i\rangle'}_{=0} - \langle v_j, v_i'\rangle = -a_{ij}.$$

„(ii) $\Longrightarrow$ (i)“: Definiere $g_{ij} := \langle v_i, v_j\rangle$. Dann gelten $g_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$ und

$$\begin{aligned} g_{ij}' = \langle v_i', v_j\rangle + \langle v_i, v_j'\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ik} v_k, v_j \right\rangle + \left\langle v_i, \sum_{k=1}^n a_{jk} v_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} g_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{jk} g_{ik}. \end{aligned}$$

Damit lösen die Funktionen $(g_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ ein lineares System von n^2 gewöhnlichen Differentialgleichungen. Da a_{ij} schiefsymmetrisch ist, löst δ_{ij} dieses System ebenfalls,

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}\delta_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{jk}\delta_{ik} = a_{ij} + a_{ji} = 0 = \delta_{ij}'.$$

Der Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen liefert nun $g_{ij}(t) = \delta_{ij}$. $\square$

Definition 3.11. Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\kappa(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Dann heißt α Frenetkurve. T, N, B mit $T, N, B \colon I \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ heißt Frenet-Dreibein zu α und ist durch

$$T := \alpha' \quad \text{(Tangentenvektor)},$$
$$N := \frac{\alpha''}{|\alpha''|} \quad \text{(Hauptnormalenvektor)}$$

und

$$B := T \times N \equiv \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} N^1 \\ N^2 \\ N^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^2N^3 - T^2N^1 \\ T^3N^1 - T^1N^3 \\ T^1N^2 - T^2N^1 \end{pmatrix} \quad \text{(Binormalenvektor)}$$

definiert. Dabei heißt „$\times$“: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit der angegebenen Definition Kreuzprodukt. Wir definieren die Torsion von α, $\tau \colon I \to \mathbb{R}$, durch

$$\tau(s) := \langle N'(s), B(s) \rangle.$$

Lemma 3.12 (Frenetgleichungen)**.** *Sei $\alpha \in C^3\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Frenetkurve mit Frenet-Dreibein T, N, B. Dann gilt*

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Beweis. Nach Lemma 3.10 wissen wir, dass die Matrix schiefsymmetrisch sein muss. Nun gilt $T = \alpha'$ und $T'' = \alpha'' = \kappa N$ nach Definition von κ und N. Weiterhin nach Definition gilt $\tau = \langle N', B \rangle$. Somit ist die Matrix eindeutig bestimmt. $\square$

Theorem 3.13. *Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert.*
(i) Ist $\kappa \equiv 0$, so ist $\alpha(I)$ Teilmenge einer Geraden.
(ii) Ist $\alpha \in C^3$ und eine Frenetkurve mit $\tau \equiv 0$, so liegt $\alpha(I)$ in einer Ebene.

Beweis.
(i) Aus $\kappa \equiv 0$ erhalten wir $\alpha'' \equiv 0$. Integrieren liefert $\alpha(s) = p + sv$ für $p, v \in \mathbb{R}^3$.
(ii) Nach Annahme und den Frenetgleichungen erhalten wir $B' \equiv 0$. Also gilt $B(s) \equiv b$ für ein $b \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Mit $\alpha' = T \perp B$ erhalten wir $\langle \alpha(s), b \rangle' = \langle \alpha'(s), b \rangle \equiv 0$. Somit ist $\langle \alpha(s), b \rangle$ konstant und wir schließen $\alpha(I) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \langle x, b \rangle = a\}$ für ein $a \in \mathbb{R}$. $\square$

Theorem 3.14. *Seien $k \in C^1(I)$ mit $k > 0$ und $\omega \in C^0(I)$ gegeben. Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha \in C^3\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ mit Krümmung $\kappa = k$ und Torsion $\tau = \omega$. Bis auf eine orientierungserhaltende Euklidische Bewegung ist α eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei T, N, B eine C^1-Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

mit gegebenen Anfangswerten $T(s_0) = e_1$, $N(s_0) = e_2$ und $B(s_0) = e_3$. Diese existiert nach Picard-Lindelöf. Nach Lemma 3.10 bilden diese Vektoren für jedes

s eine Orthonormalbasis. Setze $\alpha(s) := \int\limits_{s_0}^{s} T(\sigma)\,d\sigma$. Dann ist $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$, da $T \in C^1$ ist und ist nach der Bogenlänge parametrisiert. Wir erhalten $\alpha' = T$ und $\alpha'' = T' = kN$. Damit folgt $k = \kappa$ und N ist die Hauptnormale an α. Wegen $k, N \in C^1$ erhalten wir $\alpha \in C^3$. Es gilt $\det(T, N, B) = 1$. Zunächst ist dies für $s = s_0$ klar und folgt dann allgemein aufgrund der Stetigkeit und dass die drei Vektoren stets eine Orthonormalbasis bilden. Somit ist B der Binormalenvektor an die Kurve α. Wegen $\tau = \langle N', B\rangle = \omega$ ist die Torsion wie angegeben.

Zur Eindeutigkeit: Nach einer Euklidischen Bewegung dürfen wir annehmen, dass eine beliebige Lösung β mit $\tilde{T}$, $\tilde{N}$ und $\tilde{B}$ in s_0

$$T = \tilde{T}, \quad N = \tilde{N}, \quad \text{und} \quad B = \tilde{B}$$

erfüllt. Aufgrund der Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen gilt dann überall $(T, N, B) = \left(\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\right)$. Nach Integration sehen wir, dass $\beta(s) - \alpha(s) = \beta(s_0) - \alpha(s_0)$ konstant ist. Somit stimmen α und β bis auf eine Euklidische Bewegung überein. □

4. Hyperflächen

4.1. **Induzierte Metriken.** Wir betrachten Hyperflächen (zunächst) als Abbildungen. Alternativ kann man Hyperflächen auch als Teilmengen betrachten. Dies ist jedoch technisch aufwändiger.

Definition 4.1.

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $X \in C^k\left(\Omega, \mathbb{R}^l\right)$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\cup\{\infty\}$, heißt eine (regulär parametrisierte) n-dimensionale Hyperfläche oder n-dimensionale Immersion der Klasse C^k, falls $\operatorname{rang} DX(x) = n$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Wir schreiben auch dX für DX. Die Bedingung an den Rang heißt, dass die Vektoren
$$\frac{\partial X}{\partial x^1}(x), \ldots, \frac{\partial X}{\partial x^n}(x)$$
für alle $x \in \Omega$ linear unabhängig sind.

(ii) Ist $l = n + 1$, so heißt $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ Hyperfläche.
Ist $n = 2$, so heißt $X : \Omega \to \mathbb{R}^l$ Fläche.

(iii) Eine Immersion heißt Einbettung, falls $X : \Omega \to X(\Omega)$ ein Homöomorphismus ist, wobei wir auf $X(\Omega)$ die Unterraumtopologie verwenden. (In der Topologie verlangt bei einer Einbettung lediglich, dass $X : \Omega \to X(\Omega)$ ein Homöomorphismus ist.)

(iv) Der Unterraum
$$\operatorname{im} DX(x) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^1}(x), \ldots, \frac{\partial X}{\partial x^n}(x) \right\rangle$$
heißt Tangentialraum von X im Punkt x. Wir schreiben T_xM. Der affine Unterraum $X(x)+\operatorname{im} DX(x)$ heißt affiner Tangentialraum. Wir sprechen auch von Tangentialebenen oder, genauer, Tangentialhyperebenen.

(v) Betrachte ab jetzt nur noch Hyperflächen, also Abbildungen $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Eine stetige Funktion $\nu : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt Einheitsnormale an die Hyperfläche längs X, falls $|\nu(x)| = 1$ und $\nu(x) \perp \operatorname{im} DX(x)$ für alle $x \in \Omega$ gelten.

(vi) Ist $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine immersierte Fläche und Ω zusammenhängend, so gibt es genau zwei Einheitsnormalen längs X, nämlich
$$\nu^{\pm} : \Omega \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \nu^{\pm}(x) := \pm\frac{X_1(x) \times X_2(x)}{|X_1(x) \times X_2(x)|},$$

wobei wir die Abkürzungen $X_i(x) := \frac{\partial X}{\partial x^i}(x)$ verwendet haben. (Bis auf die explizite Formel gilt dies auch für Hyperflächen in beliebiger Dimension.)

Beispiel 4.2 (Graphen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u \in C^k$. Dann ist der Graph von u, $\operatorname{graph} u$, das Bild der parametrisierten Hyperfläche

$$\begin{aligned} X\colon \Omega &\to \mathbb{R}^{n+1}, \\ X(x) &= (x, u(x))^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es gilt $DX(x) = (X_1, \ldots, X_n) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ Du \end{pmatrix}$. Die Bedingung $\operatorname{rang} DX(x) = n$ ist offensichtlicherweise für jede C^1-Funktion u erfüllt. Eine Normale ist durch $\nu(x) = \frac{(Du,-1)^T}{\sqrt{1+|Du|^2}}$ gegeben. Bei Graphen wollen wir stets die „untere“ Normale, d. h. die Normale mit $\langle \nu, e_3 \rangle < 0$, verwenden. Beachte: Dies ist genau die umgekehrte Wahl des Vorzeichens verglichen mit ebenen graphischen Kurven. Die Unterschiede sind historisch bedingt.

Beispiel 4.3 (Rotationsflächen)**.** Sei $\alpha\colon (a,b) \to \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 = 0 \text{ und } x^1 > 0\right\}$ eine reguläre Kurve in der „rechten“ Halbebene der $x^1 - x^3$-Ebene. Schreibe

$$\alpha(t) = (r(t), 0, h(t))^T.$$

Durch Rotation um die x^3-Achse erhalten wir eine immersierte Hyperfläche

$$X\colon (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

mit

$$X(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Übung: Überprüfe, dass dies eine immersierte Fläche ist und bestimme eine Normale.

Beispiele 4.4.
(i) Die Kurve $\mathbb{R} \ni t \mapsto (1+e^t)(\cos t, \sin t)^T \in \mathbb{R}^2$ ist eine Einbettung.
(ii) Die Kurve $\gamma\colon (-\infty, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1,t)^T & t < 0, \\ (\cos t, \sin t)^T & t \ge 0 \end{cases}$$

ist eine injektive Immersion, jedoch keine Einbettung.

Bemerkung 4.5. Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Immersion. Sei $x_1 \in \Omega$. Dann haben wir den Tangentialraum $T_{x_1}M$ definiert. Naiv könnte man daran denken, mit $y := X(x)$ diesen Tangentialraum als T_yM zu bezeichnen und als $\operatorname{im} DX\left(X^{-1}y\right)$ zu definieren. Ist X jedoch nicht mehr injektiv, so mag es $x_1, x_2 \in X^{-1}(\{y\})$ mit $\operatorname{im} DX(x_1) \neq \operatorname{im} DX(x_2)$ geben.

Definition 4.6 (Erste Fundamentalform)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ eine reguläre Hyperfläche. Dann heißt die Bilinearform

$$g(x)\langle u, v\rangle := \langle DX(x)\langle v\rangle, DX(x)\langle u\rangle\rangle$$

für $x \in \Omega$ und $u, v \in \mathbb{R}^n$ die erste Fundamentalform von X. Die Schreibweise $u \mapsto DX(x)\langle u\rangle$ soll auf die Linearität der Abbildung hinweisen.

$$g \in C^0\left(\Omega, L^2\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}\right)\right)$$

ist eine stetige Abbildung von Ω in den Raum der bilinearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Bezüglich der Standardbasis ist g durch die Koeffizienten(funktionen)

$$\begin{aligned} &g_{ij} \colon \Omega \to \mathbb{R}, \\ &g_{ij}(x) := \langle X_i(x), X_j(x) \rangle \equiv \langle dX(x)\langle e_i \rangle, dX(x)\langle e_j \rangle \rangle \end{aligned}$$

für $1 \le i,j \le n$ gegeben. Die zugehörige Matrix $G = (g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ sei $G \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und ist durch $G(x) := dX(x)^T dX(X)$ gegeben. Wir werden später auch g für diese Matrix schreiben.

Bezeichnen wir Komponenten von X im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit kleinen griechischen Indices und partielle Ableitungen mit kleinen lateinischen Indices, so erhalten wir

$$g_{ij} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} X_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta \equiv \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right\rangle.$$

Bemerkung 4.7.

(i) Für jedes $x \in \Omega$ ist $g(x)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

a) $g(x)$ ist symmetrisch:

$$g(x)\langle u,v \rangle = \langle dX(x)\langle u \rangle, dX(x)\langle v \rangle \rangle = \langle dX(x)\langle v \rangle, dX(x)\langle u \rangle \rangle = g(x)\langle v,u \rangle.$$

Daher ist auch die Matrix $G = (g_{ij})$ symmetrisch: $g_{ij} = g_{ji}$ für alle $1 \le i,j \le n$.

b) $g(x)$ ist bilinear: Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2, u \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(x)\langle \lambda v_1 + \mu v_2, u \rangle &= \langle dX(x)\langle \lambda v_1 + \mu v_2 \rangle, dX(x)\langle u \rangle \rangle \\ &= \langle \lambda dX(x)\langle v_1 \rangle + \mu dX(x)\langle v_2 \rangle, dX(x)\langle u \rangle \rangle \\ &= \lambda \langle dX(x)\langle v_1 \rangle, dX(x)\langle u \rangle \rangle + \mu \langle dX(x)\langle v_2 \rangle, dX(x)\langle u \rangle \rangle \\ &= \lambda g(x)\langle v_1, u \rangle + \mu g(x)\langle v_2, u \rangle. \end{aligned}$$

Da $g(x)$ symmetrisch ist, ist es auch in der zweiten Komponente linear.

c) $g(x)$ ist positiv definit: Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$g(x)\langle v,v \rangle = \langle dX(x)\langle v \rangle, dX(x)\langle v \rangle \rangle = |dX(x)\langle v \rangle|^2 \ge 0.$$

Im Falle von Gleichheit folgt aus der Dimensionsformel $\dim \ker dX(x) = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{im} dX(x) = 0$. Also ist $dX(x)$ injektiv und es folgt $v = 0$.

(ii) Die Abbildung $dX(x) \colon (\mathbb{R}^n, g(x)) \to (\operatorname{im} dX(x), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}})$ ist eine Isometrie zwischen Euklidischen Vektorräumen. Es gilt nämlich

$$|dX(x)\langle v \rangle|^2_{\mathbb{R}^3} = g(x)\langle v,v \rangle = \|v\|^2_{g(x)}.$$

(iii) Seien $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann erfüllt der Winkel zwischen den Vektoren $dX(x)\langle u \rangle$ und $dX(x)\langle v \rangle$ aufgrund der Isometrieeigenschaft

$$\begin{aligned} \sphericalangle(dX(x)\langle u \rangle, dX(x)\langle v \rangle) &= \arccos \frac{\langle dX(x)\langle u \rangle, dX(x)\langle v \rangle \rangle}{|dX(x)\langle u \rangle| \cdot |dX(x)\langle v \rangle|} \\ &= \arccos \frac{g(x)\langle u,v \rangle}{\|u\|_{g(x)} \cdot \|v\|_{g(x)}} =: \sphericalangle_{g(x)}(u,v). \end{aligned}$$

(iv) Ein Skalarprodukt, das von $x \in \Omega$ abhängt, heißt Riemannsche Metrik auf Ω. Ist klar, an welchem $x \in \Omega$ das Skalarprodukt $g(x)\langle \cdot, \cdot \rangle$ ausgewertet wird, schreibt man häufig $g(u,v)$ statt $g(x)\langle u,v \rangle$.

(v) Statt von der ersten Fundamentalform sprechen wir häufiger von der (induzierten) Metrik, die aber etwas anderes als die Metrik $d(\cdot,\cdot)$ eines metrischen Raumes ist.

Lemma 4.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ eine reguläre Hyperfläche. Sei $\alpha : [a,b] \to \Omega$ eine C^1-Kurve. Dann ist die Metrik die eindeutig definierte stetige symmetrische $n \times n$-Matrix (genauer: Tensor), so dass*

$$L(X \circ \alpha) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\alpha(t))(\alpha'(t))^i(\alpha'(t))^j}\, dt$$

für alle solchen Kurven gilt.

Bemerkung 4.9 (Einsteinsche Summenkonvention)**.** Wir wollen die Einsteinsche Summenkonvention verwenden. D. h. wir summieren über doppelt auftretende Indices (einmal „oben" und einmal „unten") und zwar von 1 bis n für lateinische Indices (da $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) und von 1 bis $n+1$ für griechische Indices (da im $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$). Wir summieren nicht (nochmals), wenn bereits explizit Summen ($\sum$) dastehen. Wir schreiben $\delta = (\delta_{\alpha\beta})_{1\le\alpha,\beta\le n+1}$ für das Euklidische Skalarprodukt. Beispiele:

$$g_{ij}V^iW^j = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}V^iW^j \text{ oder } g_{ij} = X_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1} X_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta = \langle X_i, X_j\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

Beweis von Lemma 4.8. Setze $\gamma := X \circ \alpha$. Dann gilt nach Definition und Kettenregel

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b |DX(\alpha(t))\langle\alpha'(t)\rangle|\, dt = \int_a^b \left|X_i(\alpha(t))(\alpha')^i(t)\right|\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{(\alpha')^i(t)X_i^\beta(\alpha(t))\delta_{\beta\gamma}X_j^\gamma(\alpha(t))(\alpha')^j(t)}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{(\alpha')^i(t)g_{ij}(\alpha(t))(\alpha')^j(t)}\, dt. \end{aligned}$$

Dies gilt für alle Kurven, insbesondere auch für solche mit $\alpha' \in \{e_i, e_j, e_i + e_j, e_i - e_j\}$. Wegen der Stetigkeit von g und der Polarisationsformel charakterisiert das die Metrik g. ☐

Beispiel 4.10 (Erste Fundamentalform von Graphen)**.** Sei X mit $X(x) = (x, u(x))$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, ein Graph. Dann erhalten wir $X_i(x) = (e_i, u_i(x))$ und $g_{ij}(x) = \delta_{ij} + u_i(x)u_j(x)$, also

$$(g_{ij})_{1\le i,j\le 2} = \begin{pmatrix} 1+u_1^2 & u_1u_2 & \dots & u_1u_n \\ u_1u_2 & 1+u_2^2 & \dots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1u_n & u_2u_n & \dots & 1+u_n^2 \end{pmatrix}.$$

Ist $\gamma\colon I \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve, so folgt

$$L(X \circ \gamma) = \int_I \sqrt{\sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} + u_i|_{\gamma(t)}u_j|_{\gamma(t)})\gamma'^i(t)\gamma'^j(t)}\, dt.$$

Bemerkung 4.11. Um den Flächeninhalt zu definieren, leiten wir zunächst einen Ausdruck für den Flächeninhalt von Parallelogrammen her. Seien $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

beliebig. Dann hat das von ihnen aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= |u| \cdot \underbrace{\left| v - \left\langle v, \frac{u}{|u|} \right\rangle \frac{u}{|u|} \right|}_{=\text{Höhe}} \\ &= \sqrt{\left\langle v|u| - \langle v, u\rangle \frac{1}{|u|} u, v|u| - \langle v, u\rangle \frac{1}{|u|} u \right\rangle} \\ &= \sqrt{|v|^2|u|^2 - 2\langle u, v\rangle^2 + \langle u, v\rangle^2} \\ &= \sqrt{|v|^2|u|^2 - \langle u, v\rangle^2}.\end{aligned}$$

Damit das Flächenelement nach Integration für affin lineare Funktionen auf rechteckigen Gebieten den für Parallelogramme bekannten Wert ergibt, setzen wir für $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$

$$\begin{aligned}d\mathcal{A} :&= \mathcal{A}(X_1, X_2)\, dx^1 dx^2 = \sqrt{|X_1|^2|X_2|^2 - \langle X_1, X_2\rangle^2}\, dx \\ &= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, dx = \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\, dx.\end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass der vermöge $\int\limits_\Omega d\mathcal{A}$ definierte Flächeninhalt für injektive Immersionen $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit dem zweidimensionalen Hausdorffmaß $\mathcal{H}^2(\operatorname{im} X)$ übereinstimmt. Entsprechendes gilt in n Dimensionen.

Definition 4.12. Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Immersion. Dann definieren wir den Flächeninhalt von X als

$$\mathcal{A}(X) := \int\limits_\Omega \sqrt{\det(g_{ij})} =: \mathcal{A}_g(\Omega).$$

Für eine messbare Teilmenge $E \subset \Omega$ definieren wir

$$\mathcal{A}(E) := \int\limits_E \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

Beispiel 4.13. Sei X mit $X(x) = (x, u(x))$, $x \in \Omega$, ein Graph. Dann gilt $\det(g_{ij}) = \det(\delta_{ij} + u_i u_j) = 1 + |Du|^2$. Somit erhalten wir

$$A(X) = \int\limits_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}.$$

Definition 4.14. Seien $\Omega, \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^k-Hyperfläche, $k \geq 1$. Dann heißt $\hat{X}\colon \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^{n+1}$ Umparametrisierung von X, falls es einen C^k-Diffeomorphismus $\varphi\colon \hat{\Omega} \to \Omega$ mit

$$\hat{X} = X \circ \varphi$$

gibt.

Der Diffeomorphismus φ ist i. a. nicht eindeutig bestimmt, wenn X nicht bereits injektiv ist. Z. B. stimmen $X(t, \vartheta) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, t)^T$, $(t, \vartheta) \in \mathbb{R}^2$, und $X \circ \varphi_k$ mit $\varphi_k(t, \vartheta) := (t, \vartheta + 2\pi k)^T$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ überein.

Bemerkung 4.15. Auf der Menge der parametrisierten C^k-Hyperflächen ist die Relation

$$X \sim \hat{X} \quad :\Longleftrightarrow \quad \hat{X} \text{ ist eine Umparametrisierung von } X$$

eine Äquivalenzrelation.

Theorem 4.16 (Transformationsverhalten der Metrik)**.** *Sei $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ eine reguläre Hyperfläche.*

(i) *Sei $\varphi\colon \hat\Omega \to \Omega$ ein Diffeomorphismus, also $\hat X := X \circ \varphi$ eine Umparametrisierung von X. Dann gilt für die zugehörigen Metriken*

$$\hat g(x)\langle v, w\rangle = g(\varphi(x))\langle d\varphi\langle v\rangle, d\varphi\langle w\rangle\rangle$$

oder, jeweils äquivalent dazu, mit $G = (g_{ij})$ und $\varphi^k_i = \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i}$

$$\hat G = (d\varphi)^T (G \circ \varphi)(d\varphi) \quad \text{oder} \quad \hat g_{ij}(x) = \sum_{k,l=1}^{2} g_{kl} \circ \varphi(x)\varphi^k_i(x)\varphi^l_j(x) \equiv g_{kl}\varphi^k_i\varphi^l_j.$$

(ii) *Ist $B\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Euklidische Bewegung und $\hat X = B \circ X$, so gilt $\hat g = g$.*

Beweis.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}\hat g(v, w) &= \langle d(X\circ\varphi)\langle v\rangle, d(X\circ\varphi)\langle w\rangle\rangle = \langle (dX)|_\varphi d\varphi\langle v\rangle, (dX)|_\varphi d\varphi\langle w\rangle\rangle \\ &= g|_\varphi\langle (d\varphi)\langle v\rangle, (d\varphi)\langle w\rangle\rangle.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\hat g_{ij} = \hat g(e_i, e_j) = g|_\varphi\langle (d\varphi)\langle e_i\rangle, (d\varphi)\langle e_j\rangle\rangle = g|_\varphi\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = \sum_{k,l=1}^{2} g_{kl}|_\varphi \varphi^k_i\varphi^k_j.$$

Direkt können wir die Formel für die Metrik $\hat G$ auch wie folgt herleiten:

$$\begin{aligned}\hat G &= (d(X\circ\varphi))^T d(X\circ\varphi) = (dX|_\varphi d\varphi)^T dX|_\varphi d\varphi \\ &= d\varphi^T \left((dX|_\varphi)^T (dX|_\varphi)\right) d\varphi = d\varphi^T((dX)^T(dX))|_\varphi d\varphi = d\varphi^T G|_\varphi d\varphi.\end{aligned}$$

(ii) Wir stellen B in der Form $Bx = Sx + a$ mit $S \in O(3)$ und $a \in \mathbb{R}^3$ dar. Dann gilt $dB(x)\langle y\rangle = Sy$. Also folgt

$$\begin{aligned}\hat g(x)\langle v, w\rangle &= \langle d(B\circ X)(x)\langle v\rangle, d(B\circ X)(x)\langle w\rangle\rangle \\ &= \langle SdX(x)\langle v\rangle, SdX(X)\langle w\rangle\rangle = \langle dX(x)\langle v\rangle, dX(x)\langle w\rangle\rangle \\ &= g(x)\langle v, w\rangle.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.17. Man überlege sich, wie sich die Inverse der Metrik transformiert. Übung.

Nun wollen wir herleiten, dass Bogenlänge, Winkel und Flächeninhalt von der Wahl der speziellen Parametrisierung unabhängig sind. Beachte, dass wir dazu lediglich das Transformationsverhalten der Metrik und nicht die Abbildung X benutzen werden.

Korollar 4.18. *Sei $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ eine reguläre Hyperfläche. Sei $\varphi \in C^1\big(\hat\Omega, \Omega\big)$ ein Diffeomorphismus und $\hat X = X \circ \varphi$ eine Umparametrisierung von X. Wir bezeichnen die induzierten Metriken von X und $\hat X$ mit g bzw. $\hat g$. Dann gelten die folgenden Beziehungen für Länge, Winkel und Flächeninhalt:*

(i) *$L_g(\varphi\circ\gamma) = L_{\hat g}(\gamma)$ für alle C^1-Kurven $\gamma\colon I \to \hat\Omega$.*

(ii) *$\sphericalangle_{g(\varphi(x))}(d\varphi(x)\langle v\rangle, d\varphi(x)\langle w\rangle) = \sphericalangle_{\hat g(x)}(v, w)$ für alle $x \in \hat\Omega$ und alle $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

(iii) *$\mathcal{A}_g(\varphi(E)) = \mathcal{A}_{\hat g}(E)$ für alle messbaren Teilmengen $E \subset \hat\Omega$.*

Beweis. Nach Theorem 4.16 gilt $g(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v\rangle, d\varphi(x)\langle w\rangle\rangle = \hat g\langle v, w\rangle$. Somit ist

$$\|d\varphi(x)\langle v\rangle\|_{g(\varphi(x))} = \|v\|_{\hat g(x)} \quad \text{und} \quad \sphericalangle_{g(\varphi(x))}(d\varphi(x)\langle v\rangle, d\varphi(x)\langle w\rangle) = \sphericalangle_{\hat g(x)}(v, w).$$

Nach Kettenregel gilt $(\varphi \circ \gamma)'(t) = d\varphi|_{\gamma(t)}\gamma'(t)$. Somit erhalten wir

$$L_g(\varphi \circ \gamma) = \int_I \|d\varphi|_{\gamma(t)}\gamma'(t)\|_{g(\varphi(\gamma(t)))}\, dt = \int_I \|\gamma'(t)\|_{\hat{g}(\gamma(t))}\, dt = L_{\hat{g}}(\gamma).$$

Schließlich erhalten wir aus dem Transformationsverhalten der Metrik, der Transformationsformel für Integrale und der Determinantenmultiplikationsformel

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_g(\varphi(E)) &= \int_{\varphi(E)} \sqrt{\det G} = \int_E \sqrt{\det G \circ \varphi} \cdot |\det d\varphi| \\ &= \int_E \sqrt{\det((d\varphi)^T (G \circ \varphi) d\varphi)} = \mathcal{A}_{\hat{g}}(E).\end{aligned}$$ □

Es gibt folgende spezielle Umparametrisierungen:

Definition 4.19. Eine Hyperfläche $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ heißt

(i) längentreu parametrisiert, falls

$$L(X \circ \gamma) = L_{\mathbb{R}^n}(\gamma)$$

für alle Kurven $\gamma\colon I \to \Omega$ gilt.

(ii) flächentreu parametrisiert, falls

$$\mathcal{A}(X|_V) = \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(V) = |V|$$

für alle messbaren Mengen $V \subset \Omega$ gilt.

(iii) winkeltreu oder konform parametrisiert, falls

$$\sphericalangle(dX(x)\langle v\rangle, dX(x)\langle w\rangle) = \sphericalangle_{\mathbb{R}^n}(v, w)$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.

Bemerkung 4.20.

(i) Im allgemeinen gibt es zu einer Abbildung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ keine längentreue Umparametrisierung. In höheren Dimensionen funktionier dies umso weniger. Ein Gegenbeispiel ist jede Parametrisierung einer offenen Teilmenge von $\mathbb{S}^2$. Dies benötigt jedoch etwas Theorie (Theorema egregium). Anschaulich bedeuted dies, dass man flaches Papier nur mit größeren Eingriffen (Falze, Reißen) in Kugelform bringen kann.

(ii) Konforme Parametrisierungen gibt es für Flächen $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, im allgemeinen aber nicht für höherdimensionale Hyperflächen. Die Existenz einer solchen Parametrisierung erfordert jedoch Kenntnisse über partielle Differentialgleichungen.

(iii) Flächentreue Parametrisierungen kann man durch das Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen finden.

Lemma 4.21. *Sei $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ eine Fäche mit Metrik $G = (g_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Dann gilt*

(i) X ist genau dann längentreu, wenn $G = (\delta_{ij})$ gilt.

(ii) X ist genau dann flächentreu, wenn $\det G = 1$ gilt.

(iii) X ist genau dann winkeltreu oder konform parametrisiert, wenn es eine Funktion $\lambda\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ mit $G = \lambda^2(\delta_{ij})$ gibt.

(iv) Insbesondere ist also X genau dann längentreu, wenn X flächentreu und winkeltreu ist.

Beweis.

(i) „$\Longleftarrow$": Gilt $g_{ij} = \delta_{ij}$, so so erhalten wir aus Lemma 4.8 $L(X \circ \gamma) = L_g(\gamma) = L_{\mathbb{R}^2}(\gamma)$.
„$\Longrightarrow$": Sei X längentreu. Seien $x_0 \in \Omega$ und $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Betrachte die Kurve $\gamma(t) = x_0 + tv$. Da X längentreu ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}\sqrt{g(x_0)\langle v, v\rangle} &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \sqrt{g(x_0 + tv)\langle v, v\rangle}\, dt = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} L_g \left(\gamma|_{[0,\varepsilon]}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} L_{\mathbb{R}^n} \left(\gamma|_{[0,\varepsilon]}\right) = |v|.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Polarisationsformel erhalten wir $g_{ij} = \delta_{ij}$.

(ii) „$\Longleftarrow$": Dies folgt direkt aus Definition 4.12, da $\det(g_{ij}) = 1$ gilt.
„$\Longrightarrow$": Sei wiederum $x_0 \in \Omega$ beliebig und $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon\}$ der übliche Euklidische Ball. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sqrt{\det G(x_0)} &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\omega_n \varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x_0)} \sqrt{\det G} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\omega_n \varepsilon^n} \mathcal{A}\left(X|_{B_\varepsilon(x_0)}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\omega_n \varepsilon^n} \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(B_\varepsilon(x_0)) = 1.\end{aligned}$$

(iii) „$\Longleftarrow$": Dies folgt nach Bemerkung 4.7 (iii), da sich die zusätzlichen Faktoren λ gerade kürzen.
„$\Longrightarrow$": Wir benutzen nochmals Bemerkung 4.7 (iii) und erhalten

$$\begin{aligned}g_{12} &= g(e_1, e_2) = \|e_1\|_g \cdot \|e_2\|_g \cdot \cos \sphericalangle(dX\langle e_1\rangle, dX\langle e_2\rangle) \\ &= \|e_1\|_g \cdot \|e_2\|_g \cdot \cos \sphericalangle_{\mathbb{R}^n}(e_1, e_2) = 0\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}g_{11} - g_{22} &= g(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = \|e_1 + e_2\|_g \cdot \|e_1 - e_2\|_g \cdot \cos \sphericalangle_g(e_1 + e_2, e_1 - e_2) \\ &= \|e_1 + e_2\|_g \cdot \|e_1 - e_2\|_t \cdot \cos \sphericalangle_{\mathbb{R}^n}(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = 0.\end{aligned}$$

Entsprechende Rechnungen liefern für beliebige $i \neq j$ die Gleichungen $g_{ij} = 0$ und $g_{ii} = g_{jj}$. Mit $\lambda = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{g_{ii}}$, i beliebig, erhalten wir also die gewünschte Darstellung.

(iv) Ist klar. □

Korollar 4.22. *Sei $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$. Wir wollen angeben, welche Gleichung ein Diffeomorphismus $\varphi\colon \hat{\Omega} \to \Omega$ erfüllen muss, damit wir eine spezielle Parametrisierung für $\hat{X}$ erhalten:*

(i) $\hat{G} = (d\varphi)^T (G \circ \varphi) d\varphi = 1$ *für eine längentreue Parametrisierung,*
(ii) $\det \hat{G} = (\det G) \circ \varphi \cdot (\det d\varphi)^2 = 1$ *für eine flächentreue Parametrisierung und*
(iii) $\hat{G} = (d\varphi)^T (G \circ \varphi) d\varphi \in \mathbb{R}_+ \cdot \mathbb{1}$ *für eine winkeltreue Parametrisierung.*

Theorem 4.23 (Existenz flächentreuer Parameter)**.** ⋆ *Sei $X \in C^\infty\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ eine reguläre Fläche und $x_0 \in \Omega$. Dann gibt es eine Umgebung U von x_0 und einen Diffeomorphismus $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \Omega$ mit $\varphi(x_0) = x_0$, so dass $X \circ \varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ flächentreu parametrisiert ist.*

Beweis. Nehme ohne Einschränkung $x_0 = 0$ an. Wir machen für φ den Ansatz

$$\varphi\left(x^1, x^2\right) = \left(x^1, \psi\left(x^1, x^2\right)\right) \quad \text{mit } \psi(0,0) = 0.$$

Es folgt $d\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix}$. Wir haben in Korollar 4.22 gesehen, dass $X \circ \varphi$ genau dann flächentreu ist, wenn $\det(G \circ \varphi) \cdot (\det d\varphi)^2 = 1$ gilt. Es genügt also, eine glatte

Lösung ψ des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\det G(x^1,\psi(x^1,x^2))}} \quad \text{mit} \quad \psi(x^1,0)=0$$

zu finden. Eine solche Lösung existiert nach Picard-Lindelöf für ein $\varepsilon > 0$ in $B_\varepsilon(0)$ und hängt glatt von $x \in B_\varepsilon(0)$ ab. (Dieses Argument funktioniert auch für $X \in C^2$.) $\square$

5. Krümmung von Hyperflächen

5.1. Zweite Fundamentalform und Weingartenabbildung.

Definition 5.1. Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ regulär mit einer Einheitsnormalen $\nu\colon \Omega \to \mathbb{S}^n$ längs X. Dann heißt A mit

$$A(x)\langle v,w\rangle := -\left\langle d^2X(x)\langle v,w\rangle, \nu\right\rangle$$

für $x \in \Omega$ und $v,w \in \mathbb{R}^n$ zweite Fundamentalform von X bezüglich ν. Wie die Metrik ist auch die zweite Fundamentalform $A \in C^0\left(\Omega, L^2\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n;\mathbb{R}\right)\right)$ eine stetige Abbildung von Ω in den Raum der bilinearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ hat $A = (h_{ij})_{1\le i,j\le n}$ die Koeffizienten

$$h_{ij}(x) = -\langle X_{,ij}(x), \nu(x)\rangle$$

für $1 \le i,j \le n$, wobei $X_{,ij} := \frac{\partial X}{\partial x^i x^j}$ mit dem Komma darauf hinweist, dass es sich um partielle Ableitungen handelt. (Solange noch keine Verwechslungsgefahr mit kovarianten Ableitungen besteht, könnten wir auch X_{ij} schreiben.)

Beispiel 5.2. Sei $X(x) = (x, u(x))^T$, $x \in \Omega$ ein Graph. Dann gilt

$$\nu = \frac{(\nabla u, -1)^T}{\sqrt{1+|Du|^2}} \quad \text{und} \quad g_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j.$$

Die zweite Fundamentalform ist wegen $X_{,ij} = (0, u_{,ij})^T$ durch $A = (h_{ij})$ mit

$$h_{ij} = -\langle X_{,ij}, \nu\rangle = \frac{u_{,ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}}$$

gegeben.

Das folgende Lemma ist eigentlich ein Resultat der Linearen Algebra.

Lemma 5.3. *Sei $g(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt und $B(\cdot,\cdot)$ mit Matrixdarstellung (b_{ij}) eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit*

$$B(v,w) = g(v, Sw) \quad \text{für alle } v,w \in \mathbb{R}^n.$$

Ist B symmetrisch, so ist S bezüglich $g(\cdot,\cdot)$ selbstadjungiert, d. h. es gilt

$$g(Sv,w) = g(v,Sw) \quad \text{für alle } v,w \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Sei $\left(g^{ij}\right)$ die inverse Matrix zu (g_{ij}), d. h. gelte $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$ für alle $1 \le i,k \le n$. Wir definieren $S = \left(S^i_j\right)_{1\le i,j\le n}$ durch $S^j_l := g^{jk}b_{kl}$ für $j,l = 1,\ldots,n$.

Wir rechnen die behauptete Gleichheit für Elemente der Standardbasis nach. Es gilt $Se_l = S^j_l e_j$ und daher folgt

$$g(e_i, Se_l) = g_{ij}S^j_l = g_{ij}g^{jk}b_{kl} = \delta^k_i b_{kl} = b_{il}.$$

Die Eindeutigkeit von S ist einfach einzusehen. Ist B symmetrisch, so folgt direkt, dass S selbstadjungiert ist. $\square$

Definition 5.4. Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ eine Hyperfläche mit Normale ν längs X. Sei $A = (h_{ij})$ die zweite Fundamentalform von X. Dann heißt die eindeutig bestimmte Abbildung $S(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$A(x)\langle v, w\rangle = g(x)\langle v, Sw\rangle \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n$$

Weingartenabbildung von X. Bezüglich der Standardbasis hat sie die Matrixdarstellung

$$S(x)e_k = S^i_k(x)e_i \quad \text{mit} \quad S^i_k(x) = g^{ij}(x)h_{jk}(x).$$

Die Weingartenabbildung $S(x)$ ist für alle $x \in \Omega$ bezüglich $g(x)$ selbstadjungiert.

Bemerkung 5.5. Im Allgemeinen ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ keine Orthogonalbasis bezüglich der Metrik $g(x)$ und die Matrix von S bezüglich der Standardbasis ist nicht symmetrisch.

Bemerkung 5.6 (Heben und Senken von Indices)**.** Für die Weingartenabbildung S ist die Matrixschreibweise $S = \left(h^i_j\right)_{1\le i,j\le n}$ mit $h^i_j = g^{ik}h_{kj}$ üblich. Man sagt, ein Index sei mit Hilfe der Metrik gehoben. Umgekehrt gilt $h_{ij} = h^k_i g_{kj} = h_{li}g^{lk}g_{kj} = h_{li}\delta^l_j = h_{ij}$, wobei die Reihenfolge der Indices bei h_{ij}, g_{ij} und g^{ij} keine Rolle spielt, da diese symmetrisch sind. Auch bei anderen Größen (genauer: Tensoren) kann man Indices mit Hilfe der Metrik und ihrer Inversen heben und senken.

Beispiele für das Heben und Senken von Indices mit dem später noch zu definierenden Riemannschen Krümmungstensor R_{ijkl} sind

$$R_{ijkl}g^{km} = R_{ij}{}^m{}_l \quad \text{oder} \quad R_{ij}{}^m{}_l g_{mk} = R_{ijkl}.$$

Das Senken von Indices ist aus der linearen Algebra bekannt. Für einen Endomorphismus A und eine Bilinearform B definiert $B(\cdot, A\cdot)$ eine Bilinearform. Wir bezeichnen auch die zugehörigen Matrizen mit denselben Buchstaben: $A = (a^i_j)_{1\le i,j\le n}$ und $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Beachte dabei zunächst, dass die Indices beim Endomorphismus oben und unten stehen, da er aus einem Vektor $x = (x^j)_{1\le j\le n}$ (mit oben stehendem Index j) wieder einen Vektor $a^i_j x^j$ (mit oben stehendem Index i) macht. Bei der Bilinearform stehen die Indices dagegen unten, da sie aus einem Vektor eine Form $b_{ij}x^j$ macht. Dabei ist eine Form ein Element aus dem Dualraum, also ein Objekt mit unten stehendem Index, das, auf einen weiteren Vektor angewandt, eine Zahl, d. h. eine Körperelement, liefert. In Koordinaten wird aus $B(\cdot, A\cdot)$ also $b_{ij}a^j_k$ bzw. aus $B(y, Ax)$ der Ausdruck $y^i b_{ij} a^j_k x^k$.

Theorem 5.7 (Weingartengleichung)**.** *Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ regulär mit zweiter Fundamentalform $A = (h_{ij})$ und Weingartenabbildung $S = \left(h^i_j\right)$ bezüglich der Normalen ν. Dann gilt*

$$D\nu = dX \cdot S \quad \textit{und} \quad A(v, w) = \langle D\nu\langle v\rangle, dX\langle w\rangle\rangle$$

bzw. in Koordinaten

$$\nu_i \equiv \frac{\partial \nu}{\partial x^i} = h^k_i X_k \quad \textit{oder} \quad \nu^\alpha_i = h^k_i X^\alpha_k \quad \textit{und} \quad h_{ij} = \langle \nu_i, X_j\rangle = \nu^\alpha_i \delta_{\alpha\beta} X^\beta_j.$$

Zur Wiederholung nochmals zur Einsteinschen Summenkonvention: Dabei haben wir die Komponenten der Vektoren ν und X, beide im $\mathbb{R}^{n+1}$, mit griechischen Indices und die Euklidische Metrik des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $\delta_{\alpha\beta}$ bezeichnet. Die Einsteinsche Summenkonvention erfordert hier also eine Summation über mehrfache griechische Indices von 1 bis $n+1$, während mehrfache lateinische Indices von 1 bis n summiert werden. Es ist üblich, lateinische Indices für Größen im Definitionsgebiet und griechische Indices für Größen im Zielraum zu verwenden. Ausgeschrieben mit

Summenzeichen bedeutet also die letzte Gleichheit

$$h_{ij} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1} \nu_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta.$$

In dieser Notation wird $G = (DX)^T DX$ zu

$$g_{ij} = X_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta$$

und aus $0 = \langle dX\langle V\rangle, \nu\rangle$ für alle $V \in \mathbb{R}^n$ wird

$$0 = \nu^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_i^\beta V^i.$$

Diese Formel gilt auch ohne V^i. Die Definition der zweiten Fundamentalform wird zu

$$h_{ij} := -X^\alpha_{,ij} \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta$$

und die Transformationsformel für die Metrik zu $\hat{X} = X \circ \varphi$ wird zu

$$\hat{g}_{ij} = g_{kl} \varphi_i^k \varphi_j^l.$$

Beide Schreibweisen haben Vorteile; so erleichtern weniger Indices die Übersicht, wird es jedoch komplizierter, gibt es in Indexnotation weniger mögliche Missverständnisse und die Indexnotation ist bei Rechnungen meist einfacher zu handhaben. Es ist ratsam, beide Notationen zu beherrschen.

Beweis. Aus $\langle \nu, \nu\rangle = 1$ folgt $0 = \frac{\partial}{\partial x^i}\langle \nu, \nu\rangle = 2\langle \nu, \nu_i\rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned}\langle \nu_j, X_k\rangle &= \frac{\partial}{\partial x^j} \underbrace{\langle \nu, X_k\rangle}_{=0} - \langle \nu, X_{,jk}\rangle = h_{jk} = A(e_j, e_k)\\ &= g(Se_j, e_k) = \langle dX \cdot Se_j, dXe_k\rangle.\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\langle D\nu\langle v\rangle, \nu\rangle = 0$, aus der zweiten $\langle D\nu\langle v\rangle, dX\langle w\rangle\rangle = \langle dX \cdot S\langle v\rangle, dX\langle w\rangle\rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. Die erste Behauptung folgt, da die erste dieser beiden Gleichungen gerade das Skalarprodukt der behaupteten Gleichheit mit ν und die zweite das Skalarprodukt mit $dX\langle w\rangle$ liefert, die Gleichung also beim Test mit einer Orthonormalbasis stimmt.

Zur zweiten Behauptung: Es gilt aufgrund der ersten Behauptung

$$A(v, w) = g(Sv, w) = \langle dX \cdot Sv, dX\langle w\rangle\rangle = \langle D\nu\langle v\rangle, dX\langle w\rangle\rangle.$$

Daraus liest man auch direkt die Formeln in Koordinaten ab.

Wir leiten sie noch einmal unabhängig davon in Koordinatenschreibweise her: Es gilt $1 = \nu^\alpha \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta$. Differenzieren nach x^i liefert $0 = 2\nu_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta$. Jeder Vektor in $\mathbb{R}^3$ lässt sich in der Form $a^k X_k + b\nu$ darstellen. Also gibt es Funktionen a_i^k und b_i mit $\nu_i = a_i^k X_k + b_i \nu$. Wir setzen dies in die obige Gleichung ein und erhalten $0 = \nu_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta = a_i^k X_k^\alpha \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta + b_i \nu^\alpha \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta = 0 + b_i$. Also gilt $\nu_i = a_i^k X_k$. Wir differenzieren $0 = \nu^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\alpha$, $j = 1, \ldots, n$, setzen die Gleichung für ν_i ein und erhalten

$$0 = \nu_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta + \nu^\alpha \delta_{\alpha\beta} X^\beta_{,ji} = a_i^k X_k^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta - h_{ij} = a_i^k g_{kj} - h_{ij}.$$

Wir multiplizieren dies mit g^{jl} und erhalten $a_i^l = a_i^k \delta_k^l = a_i^k g_{kj} g^{jl} = h_{ij} g^{jl} = h_i^l$. Somit gilt $\nu_i = h_i^l X_l$ oder $\nu_i^\alpha = h_i^l X_l^\alpha$.

Weiterhin gilt

$$\nu_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta = h_i^k X_k^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta = h_{il} g^{lk} g_{kj} = h_{il} \delta_j^l = h_{ij}.$$

□

Theorem 5.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend. Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ mit Normale ν und zweiter Fundamentalform A. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $X(\Omega)$ liegt in einer Hyperebene,

(ii) $A \equiv 0$ *und*
(iii) ν *ist konstant.*

Beweis.
„(i)$\Longrightarrow$(ii)“: Liegt $X(\Omega)$ in einer affinen Hyperebene $p + E$, so bilden $X_1, \ldots, X_n$ eine Basis von E und ν ist ein Normalenvektor von E. Da auch $X_{,ij}$ in E liegt, folgt $h_{ij} = -\langle X_{,ij}, \nu\rangle = 0$.

„(ii)$\Longrightarrow$(iii)“: Aus $A = (h_{ij}) \equiv 0$ folgt $S = \left(h^i_j\right) = 0$. Somit ist $D\nu = DX \cdot S = 0$ aufgrund der Weingartengleichung. Da Ω zusammenhängend ist, ist ν konstant.

„(iii)$\Longrightarrow$(i)“: Ist ν konstant, so folgt $D\langle X, \nu\rangle = \langle DX, \nu\rangle + \langle X, D\nu\rangle = 0$. Somit ist $\langle X, \nu\rangle$ konstant. Da ν konstant ist, besagt dies, dass $X(x)$ in einer Hyperebene liegt. $\square$

Theorem 5.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ und $R > 0$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) $X(\Omega)$ *liegt in einer Späre vom Radius R und*
(ii) $A = \pm\frac{1}{R}G$ *bzw.* $S = \pm\frac{1}{R}\mathbb{1}$ *oder, in Koordinaten,* $h_{ij} = \pm\frac{1}{R}g_{ij}$ *bzw.* $h^i_j = \pm\frac{1}{R}\delta^i_j$.

Weiterhin ist die Existenz eines $p \in \mathbb{R}^{n+1}$, so dass in jedem Punkt $X - p$ ein Vielfaches von ν ist, äquivalent zur Tatsache, dass $X(\Omega)$ in einer Späre von nicht spezifiziertem Radius um p liegt.

Beweis.
„(i)$\Longrightarrow$(ii)“: Sei $m \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig. Definiere $f(x) := \frac{1}{2}|X(x) - m|^2$. Dann gilt

$$f_i = \langle X - m, X_i\rangle \quad \text{und} \quad f_{,ij} = \langle X - m, X_{,ij}\rangle + g_{ij}.$$

Sei nun m der Mittelpunkt der Sphäre und $X(\Omega)$ in der Sphäre enthalten. Dann ist f konstant. Wir schließen also, dass $X - m \perp \operatorname{im} dX$ gilt. Somit ist $X - m$ ein Vielfaches von ν. (Dies zeigt die Richtung „$\Longleftarrow$“ für die letzte Behauptung.) Da die Sphäre den Radius R hat, gilt $|X - m| = R$ und wegen $|\nu| = 1$ folgt $X - m = \pm R\nu$. Somit erhalten wir

$$0 = f_{,ij} = \langle \pm R\nu, X_{,ij}\rangle + g_{ij} = \mp R h_{ij} + g_{ij}.$$

„(ii)$\Longrightarrow$(i)“: Setze $\rho := X \pm R\nu$. Dann folgt nach Voraussetzung mit Hilfe der Weingartengleichung

$$\rho_j = X_j \pm R\nu_j = X_j \pm R h^k_j X_k = X_j \pm R\left(\pm\frac{1}{R}\delta^k_j\right) X_k = 0.$$

Also ist $\rho \in \mathbb{R}^{n+1}$ konstant und aus $X = \rho \mp R\nu$ folgt, dass $\operatorname{im} X$ in einer Sphäre vom Radius R um ρ enthalten ist.

„$\Longleftarrow$“: Siehe oben.

„$\Longrightarrow$“: Gelte $X - p = r(x)\nu$. Sei ohne Einschränkung $p = 0$. Setze $f := |X - r_0\nu|^2$ für $r_0 := r(q)$ für ein festes $q \in \Omega$. Es gilt

$$f_i = 2\langle X_i - r_0\nu_i, X - r_0\nu\rangle = 2\langle X_i - r_0 h^k_i X_k, (r(x) - r_0)\nu\rangle = 0$$

für $x \in \Omega$. Somit ist $f \equiv 0$ und die Behauptung folgt. $\square$

Theorem 5.10 (Transformationsverhalten der zweiten Fundamentalform)**.**
Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ eine Hyperfläche mit zweiter Fundamentalform A (bezüglich der Normalen ν).

(i) Ist $\varphi\colon \hat\Omega \to \Omega$ ein C^2-Diffeomorphismus und $\hat X := X \circ \varphi$, so gilt für die zweite Fundamentalform $\hat A = \left(\hat h_{ij}\right)$ von $\hat X$ bezüglich $\hat\nu = \nu \circ \varphi$

$$\hat A(v, w) = A|_\varphi(d\varphi\langle v\rangle, d\varphi\langle w\rangle) \quad \textit{bzw.} \quad \hat h_{ij} = h_{kl}\varphi^k_i \varphi^l_j$$

und für die Weingartenabbildung

$$\hat{S} = (d\varphi)^{-1} S|_\varphi d\varphi \quad \textit{bzw.} \quad \hat{h}^i_j = (\varphi^{-1})^i_k h^k_l \varphi^l_j.$$

(ii) *Sei $\hat{X} = QX + a$ mit $Q \in O(n+1)$ und $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Hyperfläche verknüpft mit einer Euklidischen Bewegung. Dann gilt $\hat{A} = A$ und $\hat{S} = S$ bezüglich der Normalen $\hat{\nu} = Q\nu$.*

Beweis. Wir führen den Beweis in Koordinaten.

(i) Nach Ketten- und Produktregel erhalten wir $\hat{X}_i = X_k \varphi^k_i$ und

$$\hat{X}_{,ij} = X_{,kl}\varphi^k_i\varphi^l_j + X_k\varphi^k_{,ij}.$$

Die Definition der zweiten Fundamentalform liefert

$$\hat{h}_{ij} = -\left\langle \hat{X}_{,ij}, \hat{\nu}\right\rangle = -\varphi^k_i\varphi^l_j\langle X_{,kl}, \nu\rangle = h_{kl}\varphi^k_i\varphi^l_j.$$

Aus $\hat{g}_{ij} = g_{kl}\varphi^k_i\varphi^l_j$ erhalten wir $\hat{g}^{ij} = g^{kl}(\varphi^{-1})^i_k(\varphi^{-1})^j_l$. Somit folgt

$$\hat{h}^i_j = \hat{g}^{ik}\hat{h}_{kj} = (\varphi^{-1})^i_r g^{rs}(\varphi^{-1})^k_s \cdot \varphi^a_k h_{ab}\varphi^b_j = (\varphi^{-1})^i_r g^{rs} h_{sb}\varphi^b_j = (\varphi^{-1})^i_r h^r_b \varphi^b_j.$$

(ii) Es gilt $\hat{X}_{,ij} = QX_{,ij}$. Wir erhalten

$$\hat{h}_{ij} = -\left\langle \hat{X}_{,ij}, \hat{\nu}\right\rangle = -\langle QX_{,ij}, Q\nu\rangle = -\langle X_{,ij}, \nu\rangle = h_{ij}.$$

Da wir in Theorem 4.16 bereits gesehen haben, dass $\hat{g}_{ij} = g_{ij}$ gilt, erhalten wir $\hat{h}^i_j = \hat{g}^{ik}\hat{h}_{kj} = g^{ik}h_{kj} = h^i_j$. □

5.2. **Hauptkrümmungen und Krümmungsfunktionen.**

Definition 5.11. Seien g, A symmetrische Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n$. Dann heißt $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ Eigenvektor von A bezüglich g zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, falls

$$\lambda g(\cdot, v) = A(\cdot, v)$$

oder, äquivalent dazu, $\lambda g(w, v) = A(w, v)$ für alle $w \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Definition 5.12 (Hauptkrümmungen)**.** Sei X eine C^2-Hyperfläche mit Metrik g und zweiter Fundamentalform $A = (h_{ij})$. Dann heißen die Eigenwerte der zweiten Fundamentalform $A(x)$ bezüglich $g(x)$ Hauptkrümmungen von X in x.

In Koordinaten ist λ eine Hauptkrümmung, wenn es ein $\xi \neq 0$ mit

$$\lambda g_{ij}\xi^j = h_{ij}\xi^j$$

gibt.

Bemerkung 5.13 (Wohldefiniertheit)**.** Die Hauptkrümmungen sind auf den Äquivalenzklassen von C^2-Hyperflächen mit C^2-Umparametrisierungen wohldefiniert: Wir bemerken dazu zunächst, dass für einen Diffeomorphismus φ aus $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}$ aufgrund der Kettenregel $\varphi^b_j|_{\varphi^{-1}}(\varphi^{-1})^j_k = \delta^b_k$ folgt, wobei die oberen Indices für Komponenten der Abbildungen und die unteren für partielle Ableitungen stehen. Sei $\hat{X} = X \circ \varphi$. Aus $\lambda g_{ij}\xi^j = h_{ij}\xi^j$ folgt mit $\hat{\xi}^k := (\varphi^{-1})^k_i \xi^i$ nämlich

$$\lambda\hat{g}_{ij}\hat{\xi}^j = \lambda\varphi^a_i g_{ab}\varphi^b_j(\varphi^{-1})^j_k\xi^k = \lambda\varphi^a_i g_{ab}\xi^b = \varphi^a_i h_{ab}\xi^b = \varphi^a_i h_{ab}\varphi^b_j(\varphi^{-1})^j_k\xi^k = \hat{h}_{ij}\hat{\xi}^j,$$

da die Metrik und die zweite Fundamentalform dasselbe Transformationsverhalten haben.

Bemerkung 5.14. Sei $E\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Euklidische Transformation mit $Ex = Ax + b$ mit $A \in O(n+1)$ und $b \in \mathbb{R}^{n+1}$. Sei X eine C^2-Hyperfläche. Definiere $\tilde{X} := E \circ X$. Dann stimmen Metrik und zweite Fundamentalform von X und $\tilde{X}$ überein.

Beweis. Seien $A = (a^\alpha_\beta)_{1\le\alpha,\beta\le n+1}$ und $b = (b^\alpha)_{1\le\alpha\le n+1}$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^\alpha &= a^\alpha_\beta X^\beta + b\alpha,\\
\tilde{X}^\alpha_i &= a^\alpha_\beta X^\beta_i,\\
\tilde{X}^\alpha_{,ij} &= a^\alpha_\beta X^\beta_{,ij},\\
\tilde{\nu}^\alpha &= a^\alpha_\beta \nu^\beta,\\
\tilde{g}_{ij} &= \tilde{X}^\beta \delta_{\beta\gamma} \tilde{X}^\beta_j = X^\alpha_i a^\beta_\alpha \delta_{\beta\gamma} a^\gamma_\varepsilon X^\varepsilon_j = X^\alpha_i \delta_{\alpha\varepsilon} X^\varepsilon_j = g_{ij},\\
\tilde{h}_{ij} &= -\tilde{X}^\beta_{,ij} \delta_{\beta\gamma} \tilde{\nu}^\gamma = -X^\alpha_{,ij} a^\alpha_\beta \delta_{\beta\gamma} a^\gamma_\varepsilon \nu^\varepsilon = -X^\alpha_{,ij} \delta_{\beta\varepsilon} \nu^\varepsilon = h_{ij}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass a^α_β orthogonal ist, dass also $a^\beta_\alpha \delta_{\beta\gamma} a^\gamma_\varepsilon = \delta_{\alpha\varepsilon}$ gilt. Dies benutzt man auch, um die Eigenschaften der Normalen $\tilde{\nu}$ zu überprüfen. □

Lemma 5.15. *Sei X eine n-dimensionale C^2-Hyperfläche mit Metrik g und zweiter Fundamentalform A. Dann besitzt A bezüglich g gerade n bezüglich g orthogonale Eigenvektoren und n zugehörige (nicht notwendigerweise verschiedene) Hauptkrümmungen.*

Beweis. Wir wollen mit A und g auch die bezüglich der Standardbasis zugehörigen Matrizen bezeichnen. Da g und g^{-1} symmetrisch und positiv definit sind, gibt es Quadratwurzeln $\sqrt{g}$ und $\sqrt{g^{-1}}$. (Versuchen Sie nicht, das in konsistenter Weise mit oberen und unteren Indices aufzuschreiben.) Da $\sqrt{g^{-1}}A\sqrt{g^{-1}}$ symmetrisch ist, gibt es n bezüglich des Standardskalarproduktes orthogonale Eigenvektoren. Sei

$$\sqrt{g^{-1}}A\sqrt{g^{-1}}\hat{\xi} = \lambda\hat{\xi}.$$

Setze $\xi := \sqrt{g^{-1}}\hat{\xi}$. Dann gilt $\hat{\xi} = \sqrt{g}\xi$. Es folgt

$$A\xi = \lambda\sqrt{g}\sqrt{g}\xi = \lambda g\xi.$$

Mit $\hat{\zeta} = \sqrt{g}\zeta$ erhalten wir

$$\left\langle \hat{\xi}, \hat{\zeta} \right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \xi, \zeta\rangle_g.$$

Somit folgt die Behauptung. □

Lemma 5.16. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Hyperfläche. Sei $\mu > 0$. Definiere $\hat{X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch $\hat{X}(p) := \mu \cdot X(p)$. Dann gilt für die (angeordneten) Hauptkrümmungen $\hat{\lambda}_i = \frac{1}{\mu}\lambda_i$ für $1 \le i \le n$.*

Beweis. Übung. Untersuche bei der Herleitung auch das Skalierungsverhalten der Metrik und der zweiten Fundamentalform. □

Definition 5.17 (Konvexität)**.** Eine Hyperfläche heißt (lokal) konvex, falls $h_{ij} \succcurlyeq 0$ gilt und strikt (lokal) konvex, falls $h_{ij} \succ 0$ gilt.

Bemerkung 5.18.

(i) Lokale Konvexität bzw. strikte lokale Konvexität sind äquivalent zu $\lambda_i \ge 0$ bzw. $\lambda_i > 0$ für alle $1 \le i \le n$.

(ii) Die Kurve $X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $x \mapsto (x, x^4)$ ist lokal konvex, aber nicht strikt lokal konvex, da die Krümmung im Ursprung verschwindet.

Dies scheint nicht zur Tatsache zu passen, dass die Menge $K := \{(x,y) \subset \mathbb{R}^2\colon y \ge x^4\}$ in dem Sinne strikt konvex ist, dass für alle $p, q \in K$ und alle $\lambda \in (0,1)$ der Punkt $\lambda p + (1-\lambda)q$ im Inneren von K liegt, die obige Definition ist jedoch in der Differentialgeometrie geeigneter.

Definition 5.19. Symmetrische Funktionen der Hauptkrümmungen (λ_i) sind wohldefiniert. Dies gilt insbesondere für die elementarsymmetrischen Funktionen

$$S_k((\lambda_i)_{1\le i\le n}) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \lambda_{i_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_{i_n}.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} H &:= S_1((\lambda_i)_{1\le i\le n}) = \lambda_1+\ldots+\lambda_n = \operatorname{tr}\left(\sqrt{g^{-1}}A\sqrt{g^{-1}}\right) = \operatorname{tr}\left(g^{-1}A\right)\\ &= h^i_i = h_{ij}g^{ij},\\ K &:= S_n((\lambda_i)) = \lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n = \det\left(\sqrt{g^{-1}}A\sqrt{g^{-1}}\right)\\ &= \det A\cdot\left(\det\sqrt{g^{-1}}\right)^2 = \det A\cdot\det\left(g^{-1}\right) = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}} \end{aligned}$$

und

$$|A|^2 := \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \overset{\text{Übung}}{=\!=\!=} h_{ij}g^{jk}h_{kl}g^{li}.$$

H heißt mittlere Krümmung, K Gaußkrümmung und $|A| = \sqrt{|A|^2}$ Norm der zweiten Fundamentalform.

Bemerkung 5.20. Wählt man $-\nu$ statt ν als Normale, so ändert sich das Vorzeichen von h_{ij} und H, das von $|A|^2$, S_2, S_4, … bleibt unverändert.

Lemma 5.21 (Min-Max Charakterisierung der Hauptkrümmungen)**.** *Sei X eine n-dimensionale C^2-Hyperfläche mit Metrik $g=(g_{ij})$ und zweiter Fundamentalform $A=(h_{ij})$. Dann gilt für die angeordneten Hauptkrümmungen λ_i mit $\lambda_1\le\ldots\le\lambda_n$*

$$\lambda_i = \min_{\substack{V\subset\mathbb{R}^n\\ \dim V=i}} \max_{0\ne\xi\in V} \frac{h_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ij}\xi^i\xi^j} \equiv \min_{\substack{V\subset\mathbb{R}^n\\ \dim V=i}} \max_{0\ne\xi\in V} \frac{A(\xi,\xi)}{g(\xi,\xi)}.$$

Insbesondere folgt $\lambda_1 = \min\limits_{0\ne\xi\in\mathbb{R}^n} \frac{h_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ij}\xi^i\xi^j}$ und $\lambda_n = \max\limits_{0\ne\xi\in\mathbb{R}^n} \frac{h_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ij}\xi^i\xi^j}$.

Beweis. Übung. □

Korollar 5.22. *Sei $X\colon\Omega\to\mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale C^2-Hyperfläche mit nach ihrer Größe sortierten Hauptkrümmungen $\lambda_1(x)\le\ldots\le\lambda_n(x)$ in $x\in\Omega$. Dann ist $\Omega\ni x\mapsto\lambda_i(x)$ für jedes $1\le i\le n$ stetig.*

Beweis. Übung. □

Beispiel 5.23 (Hauptkrümmungen von Graphen)**.**
Für Graphen gelten $h_{ij} = \frac{u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}}$ und $g_{ij} = \delta_{ij}+u_iu_j$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} g^{ij} &= \delta^{ij} - \frac{u^iu^j}{1+|Du|^2},\\ H = h^i_i = g^{ij}h_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}\left(\delta^{ij}u_{ij} - \frac{u_{ij}u^iu^j}{1+|Du|^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}\left(\Delta u - \frac{D^2u\langle\nabla u,\nabla u\rangle}{1+|Du|^2}\right) \end{aligned}$$

und nach etwa zwei Zwischenschritten

$$= \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)$$

mit

$$\operatorname{div}(\xi) \equiv \operatorname{div}\left(\left(\xi^i\right)\right) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} \quad \text{und} \quad \nabla u = \left(u^i\right)_{1\le i\le n} = \left(\delta^{ij} u_j\right)_{1\le i\le n}.$$

Für die Gaußkrümmung gilt

$$K = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}} = \frac{\det u_{ij}}{(1+|Du|^2)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{1+|Du|^2} = \frac{\det D^2 u}{(1+|Du|^2)^{\frac{n+2}{2}}}.$$

Wir betrachten nun speziell rotationssymmetrische Graphen. Sei

$$X(x) = (x, u(x))^T \equiv (x, \varphi(|x|))^T,$$

$x \in \Omega$, $\Omega = B_R(0) \setminus B_\rho(0)$, $0 \le \rho < R \le \infty$, mit $\varphi \in C^2$ und $\varphi'(0) = 0$ falls $\rho = 0$. Ohne die letzte Bedingung wäre $u(x) = \varphi(|x|)$ im Ursprung weder in C^1 noch in C^2. Setze $r := |x|$. Es gilt für $r > 0$

$$\begin{aligned}
u_i(x) &= \varphi'(r) \frac{x_i}{|x|}, \\
u_{ij}(x) &= \varphi'(r) \frac{1}{|x|} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right) + \varphi''(r) \frac{x_i}{|x|} \frac{x_j}{|x|}, \\
|Du|^2 &= (\varphi')^2, \\
g_{ij} &= \delta_{ij} + u_i u_j = \delta_{ij} + (\varphi')^2 \frac{x_i}{|x|} \frac{x_j}{|x|}, \\
h_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{1+(\varphi')^2}} \left(\frac{\varphi'}{|x|} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right) + \varphi'' \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right).
\end{aligned}$$

Eine gemeinsame Basis aus Eigenvektoren von g_{ij} und h_{ij} bezüglich δ_{ij} ist außerhalb des Ursprungs durch $\frac{x}{|x|}$ oder x und eine Basis von $\langle x \rangle^\perp$ gegeben. Für die Eigenwerte bezüglich der Euklidischen Metrik gilt

	x	$\langle x \rangle^\perp$
g_{ij}	$1+(\varphi')^2$	1
h_{ij}	$\frac{\varphi''}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}$	$\frac{\varphi'}{r} \frac{1}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}$

Als Hauptkrümmungen erhalten wir somit einmal $\frac{\varphi''}{(1+(\varphi')^2)^{3/2}}$ und $(n-1)$-mal den Wert $\frac{\varphi'}{r\sqrt{1+(\varphi')^2}}$.

Theorem 5.24 (Lokale Normalform von Hyperflächen)**.** *Sei $\hat{X} \colon \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine reguläre C^k-Hyperfläche mit $k \ge 1$ und Normale $\hat{\nu}$. Dann gibt es zu $x_0 \in \hat{\Omega}$ eine Euklidische Bewegung $B : x \mapsto Qx + a$ mit $Q \in O(n+1)$ und $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ sowie eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\varphi \colon \Omega \to \varphi(\Omega) \subset \hat{\Omega}$ mit $\varphi(0) = x_0$ und ein $u \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$ mit $u(0) = 0$ und $Du(0) = 0$, so dass $X := B \circ \hat{X} \circ \varphi$ folgendes erfüllt:*

(i) $X(x) = (x, f(x))$ für alle $x \in \Omega$,
(ii) $u(x) = \sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{2} \hat{\kappa}_i(x_0) \cdot \left(x^i\right)^2 + o\left(|x|^2\right)$, falls $k \ge 2$ ist,

wobei $\hat{\kappa}_i$ die Hauptkrümmungen von $\hat{X}$ in $x_0 \in \hat{\Omega}$ sind.

Beweis. Seien die Vektoren $\hat{\xi}_i$, $1 \le i \le n$, Eigenvektoren von $\hat{h}_{ij}$ bezüglich $\hat{g}_{ij}$ zu den Eigenwerten $\hat{\kappa}_i$ im Punkt x_0. (Im Falle $\hat{\kappa}_1(x_0) = \hat{\kappa}_2(x_0)$ seien $\hat{\xi}_1$ und $\hat{\xi}_2$ bezüglich $\hat{g}_{ij}$ orthogonal zueinander gewählt und für $k = 1$ wählen wir beliebige bezüglich $\hat{g}_{ij}$ orthogonale Vektoren.) Dann bilden $\hat{\nu}(x_0)$, $d\hat{X}(x_0)\left\langle \hat{\xi}_1 \right\rangle$ und $d\hat{X}(x_0)\left\langle \hat{\xi}_2 \right\rangle$ nach

Lemma 5.15 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^{n+1}$. Somit gibt es eine Euklidische Bewegung B, die $\hat{X}(x_0)$ auf 0, $\hat{\nu}(x_0)$ auf $-e_{n+1}$ und $d\hat{X}(x_0)\left\langle\hat{\xi}_i\right\rangle$ auf $\pm e_i$ (Vorzeichen beliebig), $1 \le i \le n$, abbildet. Sei $\pi_{n+1}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^{n+1}$ auf $\langle e_{n+1}\rangle^\perp$, wobei wir diesen Raum mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Da $\hat{X}$ regulär ist, ist $\pi_{n+1} \circ B \circ \hat{X}\colon \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ ein lokaler Diffeomorphismus von einer Umgebung von x_0 auf eine Umgebung von 0. Definiere nach Einschränkung auf solche Umgebungen $\psi := \left(\pi_{n+1} \circ B \circ \hat{X}|_{\ldots}\right)^{-1}$. Dann hat $Y := B \circ \hat{X} \circ \psi$ die Form $Y(x) = (x, F(x))$. $F(0) = 0$ gilt nach Konstruktion und wegen $B\hat{\nu}(x_0) = -e_{n+1}$ ist $DF(0) = 0$.

Einfacher als nachzurechnen, dass (ii) erfüllt ist, ist nun folgendes Vorgehen: F erfüllt $F(0) = 0$, $DF(0) = 0$ und $D^2F(0)$ ist eine Matrix mit Eigenwerten $\hat{\kappa}_1(x_0)$ und $\hat{\kappa}_2(x_0)$, da weder φ noch B die Hauptkrümmungen verändern und $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ gilt. Durch eine Rotation R in $\mathbb{R}^n$ können wir $D^2(F \circ R)(0)$ auf die gewünschte Diagonalgestalt bringen. Also ist $X := B \circ \hat{X} \circ \varphi$ mit $\varphi := \psi \circ R$ wie gewünscht und $u := F \circ R$ die in (ii) gesuchte Funktion. □

Korollar 5.25. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine reguläre Hyperfläche mit der Normalen ν. Sei $x_0 \in \Omega$. Dann gilt*

(i) Ist $\lambda_i(x_0) > 0$ für alle $1 \le i \le n$, so gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $\langle X(x) - X(x_0), \nu(x_0)\rangle > 0$ für alle $x \in U \setminus \{x_0\}$ oder $\langle X(x) - X(x_0), \nu(x_0)\rangle < 0$ für alle $x \in U \setminus \{x_0\}$, d. h. im X *liegt lokal auf einer Seite der affinen Tangentialhyperebene in x_0.*

(ii) Ist gibt es $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_i(x_0) < 0 < \lambda_j(x_0)$, so gibt es in jeder Umgebung U von x_0 Punkte $x_\pm \in U$ mit

$$\langle X(x_+) - X(x_0), \nu(x_0)\rangle > 0 \quad \text{und} \quad \langle X(x_-) - X(x_0), \nu(x_0)\rangle < 0,$$

d. h. im X *liegt selbst lokal auf beiden Seiten der affinen Tangentialhyperebene in x_0.*

Beweis. Benutze die Normalform für Hyperflächen. □

6. Minimalflächen

6.1. Erste Variation des Flächeninhaltes.

Definition 6.1 (Integration auf Hyperflächen)**.** Sei $X\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^1-Hyperfläche und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Dann definieren wir

$$\int\limits_\Omega f\, d\mathcal{A}_g := \int\limits_\Omega f(x)\sqrt{\det(g_{ij})}\, dx,$$

falls das rechte Integral als Riemann- oder Lebesgueintegral existiert.

$$d\mathcal{A}_g = \sqrt{\det(g_{ij})}$$

heißt das induzierte Flächenelement.

Lemma 6.2. *Die Integration auf Hyperflächen ist unabhängig von der Parametrisierung.*

Beweis. Sei $\hat{X} = X \circ \varphi$ für einen C^1-Diffeomorphismus $\varphi\colon \hat{\Omega} \to \Omega$. Dann folgt aus dem Transformationssatz für Integrale mit $x = \varphi(y)$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sowie

$$\hat{g}_{ij}(y) = g_{kl} \circ \varphi(y)\varphi^k_i(y)\varphi^l_j(y),$$

dass

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\hat\Omega} f\circ\varphi(y)\,dA_{\hat g}(y)\\
=&\int\limits_{\hat\Omega} f\circ\varphi(y)\sqrt{\det\left(\hat g_{ij}\right)(y)}\,dy\\
=&\int\limits_{\Omega} f(x)\sqrt{\det\left((g_{kl})(x)\varphi^k_i(\varphi^{-1}(x))\varphi^l_j(\varphi^{-1}(x))\right)}\cdot\frac{1}{|\det d\varphi(\varphi^{-1}(x))|}\,dx\\
=&\int\limits_{\Omega} f(x)\sqrt{\det(g_{ij})(x)}\,dx=\int\limits_{\Omega} f\,d\mathcal{A}_g.
\end{aligned}
$$

□

Definition 6.3. Sei $X\colon\Omega\to\mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Hyperfläche. Wir definieren den mittleren Krümmungsvektor $\vec H$ durch $\vec H := -H\nu$.

Wir bemerken, dass $\vec H$ unabhängig von der Wahl der Normalen ν definiert ist, da sich bei der Wahl von $-\nu$ statt ν auch das Vorzeichen von h_{ij} ändert. Bei einer Sphäre zeigt er nach innen.

Wir wiederholen ein Lemma aus der linearen Algebra, beweisen es hier aber nur im zweidimensionalen Fall, den wir sehr explizit und daher einfach behandeln können. Im Anhang zu meinem Skript über voll nichtlineare partielle Differentialgleichungen befindet sich ein Beweis in beliebigen Dimensionen.

Lemma 6.4.

(i) Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\det(a_{kl})=\det(a_{kl})a^{ji},$$

falls (a_{ij}) invertierbar ist und a^{ij} die Inverse ist, d. h. wenn $a^{ij}a_{jk}=\delta^i_k$ gilt.

(ii) Sei $(a_{ij}(t))$ differenzierbar von t abhängig mit inverser Matrix $\left(a^{ij}(t)\right)$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}a^{ij}=-a^{ik}a^{lj}\frac{d}{dt}a_{kl}.$$

Die Determinante ist ein Polynom in ihren Einträgen und daher auch im Falle nicht invertierbarer Matrizen differenzierbar.

Beweis.

(i) Wir zeigen die erste Behauptung nur für (2×2)-Matrizen. Es gilt

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det(a_{ij})}\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\det(a_{ij})\cdot\begin{pmatrix}a^{11}&a^{21}\\a^{12}&a^{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{21}\\-a_{12}&a_{11}\end{pmatrix}.$$

Differenziert man $\det(a_{ij})=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, so erhält man gerade die behaupteten Einträge.

(ii) Gelte allgemein $AB=BA=\mathbb{1}$. Dann erhält man durch Differenzieren $\dot AB+A\dot B=0$, also $A\dot B=-\dot AB$ oder $\dot B=-B\dot AB$. Wegen $B=A^{-1}$ folgt die Behauptung. □

Theorem 6.5 (Erste Variation des Flächeninhaltes)**.**

Sei $X\colon\Omega\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\to\mathbb{R}^{n+1}$ von der Klasse C^2.

(i) Sei $X(\cdot,0)\colon\Omega\to\mathbb{R}^{n+1}$ regulär,

(ii) $\mathcal{A}(X(\cdot,0))<\infty$ und

(iii) gebe es eine kompakte Menge $K \subset \Omega$, so dass $X(x,t)$ für $x \in \Omega \setminus K$ von t unabhängig ist.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $X(\cdot,t)\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ für alle $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ regulär ist. Mit $\Phi := \frac{\partial X}{\partial t}$ erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(X(\cdot,t)) = -\int\limits_\Omega \left\langle \vec{H}, \Phi \right\rangle \, d\mathcal{A}_g$$

für $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

Φ oder X heißt Variation von $X(\cdot,0)$.

Beweis. Da für $t = 0$

$$\inf_{x\in K} \inf_{v\in\mathbb{S}^n} |dX(x,t)\langle v\rangle| > 0$$

ist, gilt dies aus Stetigkeitsgründen auch noch für kleine $\varepsilon > 0$ und $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

Nun gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{A}(X(\cdot,t)) &= \int\limits_\Omega \frac{d}{dt}\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx = \int\limits_\Omega \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\det(g_{ij})g^{ij}\dot{g}_{ij}\,dx\\ &= \int\limits_\Omega \frac{1}{2}g^{ij}\cdot 2\left\langle \dot{X}_{,i}, X_j\right\rangle \sqrt{\det(g_{ij})}\,dx = \int\limits_\Omega g^{ij}\left\langle \dot{X}_{,i}, X_j\right\rangle dA_g.\end{aligned}$$

Schreibe nun $\dot{X} = \varphi\nu + \psi^k X_k$ für C^1_c-Funktionen φ und ψ^k mit kompaktem Träger in Ω. Wir erhalten

$$\dot{X}_{,i} = \varphi_i\nu + \varphi h^k_i X_k + \psi^k_i X_k + \psi^k X_{,ki}$$

und hieraus mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{A}(X(\cdot,t)) &= \int\limits_\Omega g^{ij}\left\langle \varphi h^k_i X_k + \psi^k_i X_k + \psi^k X_{,ki}, X_j\right\rangle d\mathcal{A}_g\\ &= \int\limits_\Omega g^{ij}\varphi h^k_i g_{kj} + g^{ij}\psi^k_i g_{kj} + \psi^k g^{ij}\langle X_{,ki}, X_j\rangle\, d\mathcal{A}_g\\ &= \int\limits_\Omega \varphi H + \psi^i_i + \psi^k g^{ij}\langle X_{,ki}, X_j\rangle\, d\mathcal{A}_g\\ &= \int\limits_\Omega -\left\langle \Phi, \vec{H}\right\rangle + \psi^k g^{ij}\langle X_{,ki}, X_j\rangle\, d\mathcal{A}_g + \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\psi^i\right)\sqrt{\det(g_{kl})}\,dx\\ &= \int\limits_\Omega -\left\langle \Phi, \vec{H}\right\rangle + \psi^k g^{ij}\langle X_{,ki}, X_j\rangle\, d\mathcal{A}_g\\ &\qquad - \int\limits_\Omega \psi^i \frac{\det(g_{kl})}{2\sqrt{\det(g_{kl})}}\cdot g^{kl}\cdot 2\langle X_{,ki}, X_l\rangle\,dx\\ &= -\int\limits_\Omega \left\langle \Phi, \vec{H}\right\rangle d\mathcal{A}_g\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Korollar 6.6. *Sei $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche. Sei X eine Variation von Y, d. h. wie in Theorem 6.5 mit $X(\cdot,0) = Y$. Dann sind die Aussagen*

(i) $H(X(\cdot,0)) = 0$ und

(ii) $\frac{d}{dt}\mathcal{A}(X(\cdot,t))\big|_{t=0} = 0$ für alle solchen Variationen X

äquivalent.

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Klar nach Theorem 6.5.

„$\Longleftarrow$“: Nehme an, das $H \not\equiv 0$ gilt. Wähle längs $X(\cdot, 0)$ ein C^2-Vektorfeld $V : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit kompaktem Träger und $\left\langle \vec{H}, V \right\rangle \geq 0$, aber so, dass nicht überall Gleichheit gilt. Setze $X(x,t) := Y(x) + tV$. Dann ist die erste Variation $\frac{d}{dt}\mathcal{A}(X(\cdot,t))\big|_{t=0}$ negativ. Widerspruch. $\square$

Wir wollen $X_{,ij}$ als Linearkombination des Normalenvektors ν und der Tangentialvektoren X_i darstellen. Es gilt das folgende

Lemma 6.7. *Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Hyperfläche. Dann ist*

$$X_{,ij} = \Gamma^k_{ij} X_k - h_{ij}\nu$$

mit $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})$. Setzt man

$$X_{;ij} := X_{,ij} - \Gamma^k_{ij} X_k,$$

so gilt die Gaußsche Formel

$$X_{;ij} = -h_{ij}\nu.$$

Die Größe $X_{;ij}$ wird uns noch als zweite kovariante Ableitung begegnen. Die Ausdrücke Γ^k_{ij} nennt man Christoffelsymbole.

Beweis. Die Gaußsche Formel folgt aus der ersten Behauptung direkt nach Definition.

Es ist klar, dass sich $X_{,ij}$ als eine solche Linearkombination darstellen lässt. Der Faktor vor ν stimmt aufgrund unserer Definition $h_{ij} := -\langle X_{,ij}, \nu\rangle$. Sei also X_l ein beliebiger Tangentialvektor. Wir müssen daher noch nachweisen, dass das Skalarprodukt der Gleichung mit X_l auf beiden Seiten denselben Wert ergibt. Es gilt nach Definition von Γ^k_{ij}

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} 2\langle X_{,ij}, X_l\rangle - 2\Gamma^k_{ij}\langle X_k, X_l\rangle \\
&= 2\langle X_{,ij}, X_l\rangle - 2\tfrac{1}{2} g^{kr}(g_{ir,j} + g_{jr,i} - g_{ij,r}) g_{kl} \\
&= 2\langle X_{,ij}, X_l\rangle - (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}) \\
&= 2\langle X_{,ij}, X_l\rangle - \langle X_{,ij}, X_l\rangle - \langle X_i, X_{,lj}\rangle - \langle X_{,ji}, X_l\rangle - \langle X_j, X_{,li}\rangle \\
&\qquad + \langle X_{,il}, X_j\rangle + \langle X_i, X_{,jl}\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da partielle Ableitungen symmetrisch sind. $\square$

Definition 6.8. Wir nennen eine Hyperfläche mit $H = 0$ oder, äquivalent dazu, $\vec{H} = 0$, eine Minimalfläche.

Bemerkung 6.9. Aufgrund der Normalform für Hyperflächen gibt es für jeden Punkt auf einer Minimalfläche ein κ, so dass sich die Minimalfläche über ihrer Tangentialebene nach geeigneter Drehung lokal als graph u mit

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\kappa x^2 - \frac{1}{2}\kappa y^2 + o\left(|(x,y)|^2\right)$$

darstellen lässt. Somit ist jeder Punkt einer Minimalfläche ein Sattelpunkt.

Bemerkung 6.10. Die Bezeichnung Minimalfläche ist leicht irreführend, weil wir gesehen haben, dass die erste Variation des Flächeninhalts einer Minimalfläche verschwindet. Dies besagt natürlich nicht, dass eine Minimalfläche ein (lokales) Minimum des Flächeninhalts ist.

Wir können die Minimalflächengleichung $H = 0$ oder $\vec{H} = 0$ mit Hilfe des folgenden Operators kurz darstellen.

Definition 6.11 (Laplace-Beltrami Operator)**.** Sei $(g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ eine Riemannsche Metrik auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit inverser Metrik $\left(g^{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$. Dann definieren wir den Laplace-Beltrami Operator $\Delta_g\colon C^2(\Omega) \to C^0(\Omega)$ durch

$$\Delta_g u := \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\, g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}u\right).$$

Lemma 6.12. *Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ eine Hyperfläche mit Metrik g und Normalenvektor ν. Dann gilt*

$$\Delta_g X = \vec{H} = g^{ij}X_{;ij}.$$

Beweis. Wir berechnen mit Lemma 6.7

$$\begin{aligned}
\Delta_g X &= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\cdot g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}X\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}}\frac{1}{2}\frac{\det(g_{kl})}{\sqrt{\det(g_{kl})}}2g^{kl}\langle X_{,ki}, X_l\rangle g^{ij}X_j\\
&\qquad - g^{ik}g^{lj}(\langle X_{,ki}, X_l\rangle + \langle X_k, X_{,li}\rangle)X_j + g^{ij}X_{,ij}\\
&= \underline{g^{kl}\langle X_{,ki}, X_l\rangle g^{ij}X_j} - g^{ik}g^{lj}\langle X_{,ki}, X_l\rangle X_j - \underline{g^{ik}g^{lj}\langle X_k, X_{,li}\rangle X_j}\\
&\qquad + g^{ij}\left(-h_{ij}\nu + \Gamma^k_{ij}X_k\right)\\
&= -H\nu - g^{ik}g^{lj}\langle X_{,ki}, X_l\rangle X_j + \tfrac{1}{2}g^{ij}g^{kl}(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})X_k\\
&= \vec{H} - g^{ik}g^{lj}\langle X_{,ki}, X_l\rangle X_j\\
&\qquad + \tfrac{1}{2}g^{ij}g^{kl}\Big(\langle X_{,ij}, X_l\rangle + \underline{\langle X_i, X_{,lj}\rangle} + \langle X_{,ji}, X_l\rangle + \underline{\langle X_j, X_{,li}\rangle}\\
&\qquad\qquad -\underline{\langle X_{,il}, X_j\rangle} - \underline{\langle X_i, X_{,jl}\rangle}\Big)X_k\\
&= \vec{H} = -H\nu = -g^{ij}h_{ij}\nu = g^{ij}X_{;ij}.
\end{aligned}$$

□

6.2. **Beispiele.**

Beispiele 6.13 (Helikoid, Katenoid und Scherkfläche)**.** Das Helikoid, parametrisiert durch

$$\mathbb{R}^2 \ni (r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi)^T,$$

das Katenoid, parametrisiert durch

$$\mathbb{R}^2 \ni (r,\varphi) \mapsto (\cosh r\cdot\cos\varphi, \cosh r\cdot\sin\varphi, r)^T$$

und die Scherkfläche, als Graph von

$$(0,\pi)^2 \ni (x,y) \mapsto \log\sin x - \log\sin x$$

dargestellt, sind Minimalflächen.

Beweis. Wir werden mit unterschiedlichen Methoden nachrechnen, dass die angebebenen Flächen Minimalflächen sind.

(i) **Helikoid:** Wir erhalten

$$\begin{aligned}
X_r &= (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^T,\\
X_{,rr} &= 0,\\
X_\varphi &= (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 1)^T,\\
X_{,\varphi\varphi} &= (-r\cos\varphi, -r\sin\varphi, 0)^T,\\
g_{rr} &= 1,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_{r\varphi} &= 0,\\
g_{\varphi\varphi} &= 1+r^2,\\
\det g_{ij} &= 1+r^2,\\
\vec{H} &= \Delta_g X\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{1+r^2}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}X\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{1+r^2}\cdot 1\cdot X_r\right)+\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sqrt{1+r^2}}{1+r^2}X_\varphi\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}+\frac{1}{1+r^2}X_{,\varphi\varphi}\\
&= \frac{r}{1+r^2}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}+\frac{1}{1+r^2}\begin{pmatrix}-r\cos\varphi\\ -r\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}=0
\end{aligned}
$$

Somit ist das Helikoid eine Minimalfläche.

(ii) **Katenoid:** Wir erinnern zunächst an

$$
\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\\
\sinh x &= \frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) = \frac{d}{dx}\cosh x = \frac{d^2}{dx^2}\sinh x
\end{aligned}
$$

und

$$
1+\sinh^2 x = 1+\frac{1}{4}\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right) = \cosh^2 x.
$$

Nun gilt

$$
\begin{aligned}
X &= (\cosh r\cdot\cos\varphi, \cosh r\cdot\sin\varphi, r)^T,\\
X_r &= (\sinh r\cos\varphi, \sinh r\sin\varphi, 1)^T,\\
X_{,rr} &= (\cosh r\cos\varphi, \cosh r\sin\varphi, 0)^T,\\
X_\varphi &= (-\cosh r\sin\varphi, \cosh r\cos\varphi, 0)^T,\\
X_{,\varphi\varphi} &= (-\cosh r\cos\varphi, -\cosh r\sin\varphi, 0)^T,\\
X_{,r\varphi} &= (-\sinh r\sin\varphi, \sinh r\cos\varphi, 0)^T,\\
g &= \begin{pmatrix}g_{rr} & g_{r\varphi}\\ g_{r\varphi} & g_{\varphi\varphi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\sinh^2 r & 0\\ 0 & \cosh^2 r\end{pmatrix} = \cosh^2 r\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\\
\nu &= \frac{1}{\text{Normierung}}\begin{pmatrix}\sinh r\cos\varphi\\ \sinh r\sin\varphi\\ 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\cosh r\sin\varphi\\ \cosh r\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\text{Normierung}}\begin{pmatrix}-\cosh r\cos\varphi\\ -\cosh r\sin\varphi\\ \sinh r\cosh r\end{pmatrix} = \frac{1}{\cosh r}\begin{pmatrix}-\cos\varphi\\ -\sin\varphi\\ \sinh r\end{pmatrix},\\
A &= \begin{pmatrix}h_{rr} & h_{r\varphi}\\ h_{r\varphi} & h_{\varphi\varphi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Somit gilt $H=0$ und das Katenoid ist eine Minimalfläche.

Da die Metrik ein Vielfaches der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist, ist das Katenoid konform parametrisiert.

(iii) **Scherkfläche:** Es gilt

$$\begin{aligned}
u &= \log\sin x - \log\sin x,\\
u_x &= \frac{\cos x}{\sin x},\\
u_y &= -\frac{\cos y}{\sin y},\\
u_{xx} &= \frac{-\sin x\sin x - \cos x\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x},\\
u_{xy} &= 0,\\
u_{yy} &= \frac{1}{\sin^2 y},\\
\Delta u - \frac{u_{ij}u^iu_j}{1+|Du|^2} &= u_{xx}+u_{yy} - \frac{u_{xx}u_x^2+u_{yy}u_y^2+2u_{xy}u_xu_y}{1+u_x^2+u_y^2}\\
&= \frac{u_{xx}\left(1+u_y^2\right)+u_{yy}\left(1+u_x^2\right)}{1+u_x^2+u_y^2},\\
u_{xx}\left(1+u_y^2\right) &= -\frac{1}{\sin^2 x}\left(1+\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}\right) = -\frac{1}{\sin^2 x\sin^2 y}.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie erhalten wir $\Delta u - \frac{u_{ij}u^iu^j}{1+|Du|^2} = 0$ und somit $H = 0$. Somit ist auch die Scherkfläche eine Minimalfläche. □

Bemerkung 6.14.

(i) Minimalflächen gehören zu den differentialgeometrischen Themen, die schon seit sehr langer Zeit untersucht werden. Leonhard Euler beschreibt 1744 als erste Minimalfläche nach der Ebene das Katenoid, Jean Baptiste Meusnier 1776 das Helikoid und Heinrich Scherk beschreibt 1834 die nach ihm benannte Fläche.

(ii) Mit Hilfe von Funktionentheorie kann man Minimalflächen darstellen: Weierstraßdarstellung.

(iii) Helikoid und Katenoid lassen sich ineinander deformieren: Ein Filmchen dazu gibt es auf Wikipedia [15].

(iv) Stellt man Kopien der Scherkfläche auf die schwarzen Felder eines unendlichen Schachbrettes, so erhält man eine Fläche, die sich periodisch wiederholt und nirgends aufhört. Solche Hyperflächen werden wir später als vollständig bezeichnen.

(v) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand. Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt. Suchen wir nun eine Hyperfläche, die über Ω als $\operatorname{graph} u$ gegeben ist, die Minimalfläche ist und über $\partial\Omega$ mit $\operatorname{graph}\varphi$ übereinstimmt, so müssen wir dazu die folgende partielle Differentialgleichung mit Randwerten lösen:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = 0 & \text{in } \Omega,\\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dies ist für beliebige glatte Funktionen φ möglich, falls $\partial\Omega$ überall nichtnegative mittlere Krümmung hat, jedoch komplizierter.

7. Niveauflächen, Untermannigfaltigkeiten

Parametrisierte Hyperflächen sind im Allgemeinen nur immersiert und nicht eingebettet. Dafür muss man eine Parametrisierung angeben. Untermannigfaltigkeiten, Niveauflächen oder eingebettete Hyperflächen dürfen sich hingegen nicht selbst durchdringen. Dafür reicht es, die Hyperfläche als Menge anzugeben. Eine Parametrisierung ist nicht nötig.

Beim ersten Lesen empfehlen wir, die folgenden Definitionen und Sätze bis Theorem 7.6 zunächst für den Fall zu betrachten, dass die auftretenden Funktionen linear sind.

Die folgende Definition haben wir nach der Kodimension aufgeteilt.

Definition 7.1 (Niveauflächen)**.**

(i) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ heißt Niveauhyperfläche (oder Niveaufläche) der Klasse C^k für ein $k \geq 1$, falls es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und eine Funktion $f \in C^k(U)$ mit
  (i) $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$ und
  (ii) $df(q) \neq 0$ für alle $q \in U$

  gibt.

(ii) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt Niveaufläche der Klasse C^k der Dimension m und der Kodimension $n - m$ für ein $k \geq 1$, falls es für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f \in C^k(U, \mathbb{R}^{n-m})$ mit
  (i) $M \cap U = f^{-1}\{0_{\mathbb{R}^{n-m}}\}$ und
  (ii) surjektiver Abbildung $Df(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$

  gibt.

Wir werden uns nachfolgend insbesondere mit Niveauhyperflächen beschäftigen und nehmen ab jetzt an, dass die Kodimension stets eins ist, wenn wir dies nicht explizit anders angeben.

Definition 7.2 (Untermannigfaltigkeit)**.** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit $k \geq 0$, falls es für jedes $x_0 \in M$ eine offene Umgebung $U \in \mathcal{U}(x_0)$ und einen C^k-Diffeomorphismus (bzw. Homöomorphismus) $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(x_0) = 0$ und

$$\Phi(M) = \Phi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^{n-m}}\})$$

gibt. $n - m$ heißt Kodimension von M.

Definition 7.3. Eine Untermannigfaltigkeit M heißt geschlossen, falls sie kompakt ist. (Normalerweise fordert man zusätzlich, dass M keinen Rand besitzt, jedoch haben wir bisher nur Untermannigfaltigkeiten ohne Rand definiert.)

Reguläre Hyperflächen sind lokal Untermannigfaltigkeiten. Es gilt sogar

Theorem 7.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine Immersion. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in \Omega$ eine offene Umgebung $U \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $U \subset \Omega$, so dass* $\operatorname{im} X(U)$ *eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$ ist.*

Beweis. Wir ergänzen eine Basis des Tangentialraumes $T_{x_0}M$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^n$: Seien $Y_{n+1}, \ldots, Y_m$ so gewählt, dass

$$\operatorname{im} dX(x_0) \oplus \langle Y_{n+1}, \ldots, Y_m \rangle = \mathbb{R}^m$$

gilt. Definiere die Abbildung

$$\Phi\colon \Omega \times \mathbb{R}^{m-n} \ni (x, y) \mapsto X(x) + \sum_{i=n+1}^{m} y^i Y_i.$$

Nach Konstruktion ist dann $D\Phi(x_0, 0)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ ein Vektorraumisomorphismus. Somit gibt es nach dem Satz von der inversen Abbildung eine Umgebung V von $(x_0, 0)$, so dass $\Phi|_V$ ein Diffeomorphismus ist. Wir definieren $U := V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^{m-n}}\})$. Dann ist $(\Phi|_V)^{-1}$ eine Abbildung, die zeigt, dass $X(U)$ eine Untermannigfaltigkeit ist. $\square$

Beispiel 7.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Dann ist

$$\left\{(x, u(x))^T : x \in \Omega\right\} = \operatorname{graph} u$$

eine n-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+m}$.

Beweis. Zu $p = (x, u(x))^T \in M$ können wir stets $U = \Omega \times \mathbb{R}^m$ und $f \colon U \to \mathbb{R}$ mit

$$f\left(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^{n+m}\right) := \left(x^{n+1}, \ldots, x^{n+m}\right) - u\left(x^1, \ldots, x^n\right)$$

wählen. □

Niveauflächen sind ebenfalls Untermannigfaltigkeiten.

Theorem 7.6. *Sei $M = f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^n}\}) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ eine m-dimensionale Niveaufläche. Dann ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{m+n}$.*

Beweis. Sei $x_0 \in M$. Nach einer Drehung des Koordinatensystems im $\mathbb{R}^{m+n}$ dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto Df(x_0)\langle(0_{\mathbb{R}^m}, y)\rangle \in \mathbb{R}^n$ surjektiv ist. Dann folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass es eine Abbildung $\varphi \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass $M \cap U = \{(x, \varphi(x)) \colon x \in \mathbb{R}^n\} \cap U$ gilt. Benutze nun Bemerkung 7.5. □

Beispiel 7.7. Die Sphäre $\mathbb{S}^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon |x| = 1\right\}$ ist eine n-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$: Wähle $\Omega := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und $f(x) := |x|^2 - 1$ oder $f(x) := |x| - 1$.

Definition 7.8. $\star$

(i) Eine C^k-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt oder kompakte eingebettete Mannigfaltigkeit, falls M kompakt ist.

(ii) Eine m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $k \geq 1$ heißt kompakt oder kompakt immersierte C^k-Mannigfaltigkeit, falls es eine m-dimensionale kompakte eingebettete Mannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{R}^N$, eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^N$ von N und eine C^k-Abbildung $\Phi \colon U \to \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(N) = M$ und

$$\dim d\Phi(x)\langle T_x N\rangle = m$$

gibt.

Bemerkung 7.9. $\star$

(i) Die Sphäre ist ein Beispiel für eine kompakte eingebettete Mannigfaltigkeit, die Figur „8" ein Beispiel für eine kompakte immersierte Mannigfaltigkeit.

(ii) Insbesondere der zweite Teil dieser Definition wird später leichter verständlich und leichter zu definieren, wenn wir abstrakte Mannigfaltigkeiten kennengelernt haben. Dann können wir dies als Einbettungen bzw. Immersionen von kompakten abstrakten Mannigfaltigkeiten definieren.

Definition 7.10. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit. Eine lokale Parametrisierung von M nahe $x_0 \in M$ ist eine C^k-Abbildung $X \colon \Omega \to M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x_0 \in \operatorname{im} X$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, X injektiv ist und $\operatorname{rang} dX(x) = n$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Ω heißt Parametergebiet und $V := X(\Omega) \subset M$ heißt das Kartengebiet von X. Die Abbildung $X^{-1} \colon V \to \Omega$ heißt Karte.

Theorem 7.11 (Existenz und Eigenschaften von Karten)**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ der Klasse C^k mit $k \geq 1$. Dann gelten folgenden Aussagen:*

(i) Zu jedem $p \in M$ gibt es eine lokale Parametrisierung von M nahe p und eine Karte $\varphi \colon V \to \Omega$ mit $p \in V$.

(ii) Ist $X \colon \Omega \to X(\Omega) =: V$ eine lokale Parametrisierung, so ist V relativ offen in M. Die Abbildung $X^{-1} \colon V \to \Omega$ ist stetig und somit ist $X \colon \Omega \to V$ ein Homöomorphismus.

(iii) Seien $\varphi_i\colon V_i \to \Omega_i$, $i = 1, 2$, Karten von M. Dann ist
$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon \varphi_1(V_1 \cap V_2) \to \varphi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$
ein C^k-Diffeomorphismus.

Karten werden später wichtig, wenn wir abstrakte Mannigfaltigkeiten definieren wollen. Das Verhältnis von abstrakten Mannigfaltigkeiten zu Untermannigfaltigkeiten ist mit dem von topologischen Räumen zu Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit induzierter Topologie vergleichbar.

Dieser Satz gilt auch für Untermannigfaltigkeiten höherer Kodimension. Dann ist die Normale wieder geeignet durch Vektoren zu ersetzen, die zusammen mit einer Basis des Tangentialraumes eine Basis bilden. Details: Übung.

Beweis.

(i) Nach dem Satz über implizite Funktionen ist M lokal als Graph darstellbar: Zu $p \in M$ gibt es eine Euklidische Bewegung $B\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $B(p) = 0$, offene Mengen $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $0 \in I \subset \mathbb{R}$ sowie $u \in C^k(\Omega, I)$ mit
$$B(M) \cap (\Omega \times I) = \{(x, u(x))\colon x \in \Omega\}.$$
Insbesondere folgt $u(0) = 0$. Dann ist $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $X(x) := B^{-1}(x, u(x))$ die gesuchte Parametrisierung und es gilt $X(0) = p \in X(\Omega)$.

(ii) V ist relativ offen, da $F(x,t) := X(x)+t\nu(x)$ ein lokaler Diffeomorphismus nahe $t = 0$ ist. (Im Fall $k = 1$ ist $\nu(x)$ im Allgemeinen nicht mehr differenzierbar. Wir können dann jedoch $F(x, t) := X(x) + t\tilde{\nu}(x)$ für eine C^1-Funktion $\tilde{\nu}$ mit $\langle \nu(x), \tilde{\nu}(x)\rangle > 0$ für alle $x \in \Omega$ verwenden.) F^{-1} ist ebenfalls ein lokaler Diffeomorphismus. Somit ist die Einschränkung X^{-1} stetig und die Behauptung folgt.

(iii) Betrachte die lokalen Parametrisierungen $X_1 := \varphi_1^{-1}$ und $X_2 := \varphi_2^{-1}$. Deren Fortsetzungen $\hat{X}_i(x, t) := X_i(x) + t\nu(x)$ sind wiederum lokale Diffeomorphismen (Verfahre für $k = 1$ wie oben.). Dies gilt auch für die Verknüpfung $\hat{X}_2^{-1} \circ \hat{X}_1$ und daher auch für die Einschränkung auf $t = 0$, also für $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$. Da Parametrisierungen und damit auch Karten (globale) Homöomorphismen sind, ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon \varphi_1(V_1 \cap V_2) \to \varphi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ auch ein (globaler) Diffeomorphismus. □

Die folgende Definition liefert für immersierte Flächen X wieder im DX (kleine Übung).

Definition 7.12 (Tangentialebene)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann heißt $V \in \mathbb{R}^{n+1}$ Tangentialvektor in $p \in M$, falls es eine Kurve $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = V$ gibt. Die Menge aller Tangentialvektoren in p bezeichnen wir mit T_pM. Man schreibt auch (p, V) für den Tangentialvektor.

Lemma 7.13. *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und sei $M = f^{-1}(\{0\}) \cap U$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit. Sei $x_0 \in M$. Dann gilt*
$$\langle \nabla f(x_0), V\rangle = 0$$
für alle $V \in T_{x_0}M$, d. h. bis auf die Wahl des Vorzeichens ist $\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ die Normale an M in x_0.

Beweis. Sei $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Kurve mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = V$. Es gilt $f(\gamma(t)) = 0$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Nach Kettenregel folgt $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = 0$, ebenfalls für alle t. Für $t = 0$ erhalten wir die Behauptung. □

Theorem 7.14. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist T_pM ein Unterraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ und es gilt*

(i) $T_pM = \operatorname{im} dX(x)$ *für eine lokale Parametrisierung* $X\colon \Omega \to M$ *mit* $X(x) = p$.
(ii) $T_pM = \ker df(p)$, *falls* $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$ *für eine offene Menge* U *mit* $p \in U$ *und für* $f \in C^1(U)$ *mit* $df \neq 0$ *in* U *gilt.*

Beweis. Sei $X(x) = p$. Die Inklusionen $\operatorname{im} dX(x) \subset T_pM \subset \ker df(p)$ folgen direkt nach Definition. Wegen $\dim \operatorname{im} dX(x) = n$ und $\dim \ker df(p) = n$ gilt jedoch überall Gleichheit. □

Die folgende Bemerkung, Bemerkung 7.15, steht auf einer gesonderten Seite.

Wir wollen nun die zweite Fundamentalform von Untermannigfaltigkeiten ohne Zuhilfenahme einer Parametrisierung bestimmen. Die Wahl des Vorzeichens von ν ist prinzipiell beliebig. Bei dieser Konvention erhalten wir für die Niveauflächendarstellung von schrumpfenden Sphären die äußere Normale.

Lemma 7.16. *Sei* $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ *eine parametrisierte Hyperfläche,* $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *eine Umgebung von* $p = X(x)$ *und* $f \in C^2(U)$ *mit* $f \circ X \equiv 0$ *und* $Df \neq 0$ *nahe* p. *Dann gilt*

$$h(x)\langle v, w\rangle = -\frac{D^2 f(p)\langle DX(x)\langle v\rangle, DX(x)\langle w\rangle\rangle}{|Df(p)|} \quad \textit{bezüglich} \quad \nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \circ X.$$

Beweis. Wir differenzieren $f \circ X \equiv 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= f_l(X(x))X^l_i(x),\\ 0 &= f_{,kl}(X(x))X^k_i(x)X^l_j(x) + f_l(X(x))X^l_{,ij}. \end{aligned}$$

Wir benutzen $\nu(x) = -\frac{\nabla f(X(x))}{|\nabla f(X(x))|}$ und erhalten aus der Definition der zweiten Fundamentalform

$$h_{ij}(x)|Df(X(x))| = -f_{,kl}f(X(x))X^k_i(x)X^l_j(x).$$

Die Behauptung folgt. □

Dies rechtfertigt die folgende Definition.

Definition 7.17. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale C^2-Untermannigfaltigkeit. Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f \in C^2(U)$ mit $Df \neq 0$ in U. Gelte $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$. Dann definieren wir die zweite Fundamentalform $\hat{h}$, $M \cap \Omega \ni p \mapsto L^2(T_pM, T_pM; \mathbb{R})$ und die Weingartenabbildung $\hat{S}$, $M \cap \Omega \ni p \mapsto \operatorname{Hom}(T_pM, T_pM)$, durch

$$\hat{h}(p)\langle v, w\rangle = \left\langle v, \hat{S}(p)w \right\rangle = -\frac{D^2 f(p)\langle v, w\rangle}{|Df(p)|}$$

für $v, w \in T_pM \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Bemerkung 7.18.

(i) Da wir p auf ein Element in $L^2(T_pM, T_pM; \mathbb{R})$ abbilden und somit der Zielraum von p abhängig ist, erfüllt dies nicht die Definition einer Funktion. Dieses Problem lässt sich auf zwei Arten lösen: Man führt Schnitte im Tangentialbündel ein (siehe nachfolgende Vorlesung) oder man betrachtet $\hat{A}$ als Funktion $M \cap \Omega \to L^2\left(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}\right)$ und definiert

$$\hat{A}(p)\langle v, w\rangle := -\frac{D^2 f(p)\langle \pi(x)\langle v\rangle, \pi(x)\langle w\rangle\rangle}{|Df(p)|},$$

wobei $\pi(x)\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^{n+1}$ auf den Tangentialraum $T_{X(x)}M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist, also $\pi(x)\langle v\rangle := v - \langle v, \nu(x)\rangle\nu(x)$.

Wählt man f lokal als signierte Distanzfunktion zu M, so werden wir sehen, dass $D^2 f(\nabla f, \cdot) = 0$ gilt. Somit sind die Projektionen in diesem Falle nicht nötig.

Bemerkung 7.15. Wir stellen nun in einer Tabelle im ersten Teil einige Größen „erster Ordnung“ für eingebettete Hyperflächen und dieselben Größen für parametrisierte Hyperflächen einander gegenüber.
Im zweiten Teil haben wir eine analoge Gegenüberstellung für Größen „zweiter Ordnung“, die wir erst später betrachten werden.

	Parametrisierung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$	Niveaufläche $f^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$	Relation $X(x) = p$
Tangentialraum	$\operatorname{im} dX(x)$	$\ker df(p)$	T_pM
Tangentialvektor	$dX\langle v\rangle$	$V \in T_pM \subset \mathbb{R}^{n+1}$	$dX(x)\langle v\rangle = V$
Normale	$\nu = \pm\frac{X_1\times X_2}{\lvert X_1\times X_2\rvert}$ für $n=2$	$\hat\nu = -\frac{\nabla f}{\lvert\nabla f\rvert}$	$\nu = \pm\hat\nu\circ X$
Metrik	$g(\cdot,\cdot)$	$\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$	$g(x)\langle v,w\rangle = \langle dX(x)\langle v\rangle, dX(x)\langle w\rangle\rangle$
Bogenlänge	$L_g(\gamma)$	$L(\alpha) = L_{\mathbb{R}^{n+1}}(\alpha)$	$L_g(\gamma) = L_{\mathbb{R}^{n+1}}(X\circ\gamma)$
Winkel	$\sphericalangle_g$	$\sphericalangle = \sphericalangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$	$\sphericalangle_g(v,w) = \sphericalangle(dX\langle v\rangle, dX\langle w\rangle)$
Flächeninhalt	$A_g(E)$	$\mathcal{H}^n(E)$	$A_g(E) = \mathcal{H}^n(X(E))$
2. Fundamentalform	$h(x)\langle\cdot,\cdot\rangle = -\langle D^2X(x)\langle\cdot,\cdot\rangle,\nu\rangle$	$\hat h(p)\langle\cdot,\cdot\rangle = -\frac{D^2f(p)\langle\cdot,\cdot\rangle}{\lvert Df(p)\rvert}$	$h(x)\langle v,w\rangle = \hat h(p)\langle dX\langle v\rangle, dX\langle w\rangle\rangle$
Weingartenabbildung	$h(x)\langle v,w\rangle = g(v,Sw)$	$\hat h(p)\langle V,W\rangle = \left\langle X,\hat SY\right\rangle$	$\hat S\cdot dX = dX\cdot S$
Hauptkrümmungen	$Sv_i = \kappa_i v_i$	$\hat SV_i = \kappa_i V_i$	$V_i = dX\langle v_i\rangle$
Weingartengleichung	$D\nu = DX\cdot S$	$D\hat\nu = \hat S$	

Die Notation $\hat{}$ für Größen im Zusammenhang mit Niveauflächen ist eine ad hoc Notation.

(ii) Nach Lemma 7.16 ist $\hat{h}(p)\langle\cdot,\cdot\rangle$ unabhängig von der speziellen Wahl von f definiert.

(iii) Nach Lemma 7.16 folgt
$$\begin{aligned}\langle dX\langle v\rangle, dX\langle Sw\rangle\rangle &= g(v, Sw) = h(v,w) = \hat{h}\langle dX\langle v\rangle, dX\langle w\rangle\rangle \\ &= \left\langle dX\langle v\rangle, \hat{S}\cdot dX\langle w\rangle\right\rangle.\end{aligned}$$
Also folgt
$$\hat{S}\cdot dX = dX\cdot S.$$

Um die Weingartengleichung auch für Niveauflächen formulieren zu können, müssen wir zunächst definieren, wie man eine nur auf einer Untermannigfaltigkeit definierte Funktion ableitet.

Definition 7.19. Sei $M\subset\mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit. Eine Funktion $f\colon M\to\mathbb{R}$ heißt von der Klasse C^1, falls $f\circ X\in C^1(\Omega)$ für jede lokale C^1-Parametrisierung $X\colon\Omega\to W\subset M$ ist. Sei $p=X(x)$. Wir definieren die Ableitung von f durch
$$\begin{aligned}Df(p)\colon T_pM &\to \mathbb{R},\\ Df(p)\langle DX(x)\langle v\rangle\rangle &:= D(f\circ X)(x)\langle v\rangle.\end{aligned}$$

Bemerkung 7.20.

(i) Die Definition von Df benutzt $\operatorname{im} DX(x)=T_pM$, also, dass sich jeder Vektor in T_pM als Bild unter $DX(x)$ schreiben lässt.

(ii) Die Definition ist von der Parametrisierung unabhängig: Sei $\varphi\in C^1\left(\hat{\Omega},\Omega\right)$ ein Diffeomorphismus und $\hat{X}:=X\circ\varphi$. Sei $x=\varphi(y)$. Dann gilt nach Definition einerseits
$$Df(p)\langle DX(x)\langle v\rangle\rangle = D(f\circ X)(x)\langle v\rangle$$
und andererseits
$$Df(p)\left\langle D\hat{X}\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle\right\rangle = D\left(f\circ\hat{X}\right)\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle.$$
Die Relation zwischen v und w ergibt sich aus
$$\begin{aligned}DX(x)\langle v\rangle &= D\hat{X}\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle\\ &= DX\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)\cdot D\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle = DX(x)\cdot D\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle\end{aligned}$$
aufgrund der Injektivität von $DX(\cdot)$ als $D\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle = v$. Also folgt die Wohldefiniertheit mit Hilfe der Kettenregel aus
$$\begin{aligned}D(f\circ X)(x)\langle v\rangle &\overset{!}{=} D\left(f\circ\hat{X}\right)\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle\\ &= D((f\circ X)\circ\varphi)\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle\\ &= D(f\circ X)\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)\cdot D\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle\\ &= D(f\circ X)(x)\langle v\rangle.\end{aligned}$$

(iii) Ist $M=\mathbb{R}^n$, so stimmt diese Definition von Ableitung mit der üblichen Definition überein.

Lemma 7.21. *Es gilt die Weingartengleichung für C^2-Untermannigfaltigkeiten*
$$D\hat{\nu}=\hat{S}.$$

Beweis. Nach Definition und mit $\hat{S}\cdot DX = DX\cdot S$ folgt
$$D\hat{\nu}\cdot DX = D(\hat{\nu}\circ X) = D\nu = DX\cdot S = \hat{S}\cdot DX.$$
Wir erhalten die Behauptung. □

Wir erhalten die restlichen Zeilen in der Tabelle in Bemerkung 7.15.

Lemma 7.22. *Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $Df \neq 0$ auf $f^{-1}(\{0\})$. Setze $M := f^{-1}(\{0\})$. Sei $p \in M$. Dann ist die mittlere Krümmung $\hat{H}$ von M in p durch*

$$\hat{H}(p) = -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)$$

gegeben.

Beweis. Es gilt $\hat{\nu} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Nun ist

$$\begin{aligned}\hat{H} = \hat{h}_i^i = \operatorname{tr}_{T_pM}(D\hat{\nu}) &= -\operatorname{tr}_{T_pM}\left(D\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)\\ &= -\operatorname{tr}_{\mathbb{R}^{n+1}}\left(D\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right) = -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right).\end{aligned}$$

Beachte dabei, dass sich sowohl Spur als auch Divergenz, sofern nicht anders angegeben, auf alle $n+1$ Richtungen und nicht nur auf $T_pM \subset \mathbb{R}^{n+1}$ beziehen. Da $\left|\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right| = 1$ ist, verschwindet jedoch $\left\langle D\frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right\rangle$ und die Behauptung folgt. □

8. Die Distanzfunktion

Häufig ist es nützlich, eine Menge als Niveaufläche einer speziellen Funktion darzustellen, der signierten Distanzfunktion. Beispielsweise impliziert nichtnegative mittlere Krümmung bei geeigneter Vorzeichenwahl $-\Delta d \geq 0$. Dies kann man beispielsweise bei der Konstruktion von Barrieren nutzen.

Bemerkung 8.1 (Generalvoraussetzung)**.** In diesem Kapitel wollen wir stets annehmen, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und von der Klasse C^k mit $k \geq 2$ ist.

Definiere die (signierte) Distanzfunktion $d\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x) := \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) - \operatorname{dist}(x, \Omega),$$

so dass d in Ω positiv ist. In Ω gilt dann auch $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Definiere eine ε-Umgebung des Randes durch

$$(\partial\Omega)_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : |d(x)| < \varepsilon\}.$$

Lemma 8.2. *Gelte Bemerkung 8.1. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass d in $(\partial\Omega)_\varepsilon$ von der Klasse C^k ist.*

Solch eine Umgebung $(\partial\Omega)_\varepsilon$ heißt Tubenumgebung von $\partial\Omega$.

Beweis. Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Dann dürfen wir nach einer Rotation und Verschiebung des Koordinatensystems ohne Einschränkung annehmen, dass $x_0 = 0$ gilt und dass es $\omega\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ in C^k mit $D\omega(0) = 0$ und

$$\Omega \cap B_r(0) = \{(\hat{x}, x^n) : x^n > \omega(\hat{x})\} \cap B_r(0)$$

für ein $r > 0$ gibt. Sei $\rho > 0$, so dass für alle $\hat{x} \in B_\rho^{n-1}(0)$ auch $(\hat{x}, \omega(\hat{x})) \in B_r(0)$ gilt. Dann ist die äußere Normale an Ω für $\hat{x} \in B_\rho(0)$ durch

$$\nu(\hat{x}, \omega(\hat{x})) = \frac{(D\omega(\hat{x}), -1)}{\sqrt{1 + |D\omega(\hat{x})|^2}}$$

gegeben. Setze ν durch $\nu(\hat{x}, x^n) := \nu(\hat{x}, \omega(\hat{x}))$ nach $\mathbb{R}^n$ fort.

Definiere die Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

durch

$$\Phi(\hat{x}, t) = (\hat{x}, \omega(\hat{x})) - t\nu(\hat{x}, \omega(\hat{x})),$$

wobei wir die Formel für ν auch für $x \notin B_\rho(0)$ verwenden. Natürlich interessieren wir uns nur dort für die Abbildung Φ, wo $\operatorname{graph}\omega$ mit $\partial\Omega$ übereinstimmt. Wir können diese Abbildung auch auf ganz $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ durch $\Psi(x, t) := x - t\nu(x)$ definieren. Wir haben sie oben lediglich mit Hilfe von ω lokal in einer Karte dargestellt.

Wir behaupten, dass Φ nahe $(0, 0)$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i}\Phi(\hat{x}, t) &= (e_i, \omega_i) - t\nu_i - t\nu_n\omega_i, \\ \frac{\partial}{\partial x^i}\Phi(\hat{x}, t)\bigg|_{(\hat{x},t)=0} &= (e_i, 0), \\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\hat{x}, t)\bigg|_{(\hat{x},t)=0} &= -\nu(0, 0) = e_n, \end{aligned}$$

also

$$D\Phi(0) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist Φ und daher auch Ψ nach dem Satz über implizite Funktionen ein lokaler Diffeomorphismus. Da $\partial\Omega$ kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte, deren Umgebungen, in denen Ψ (bzw. Φ) ein Diffeomorphismus ist, nach Projektion auf die nicht-t-Komponenten bereits $\partial\Omega$ überdecken. Somit ist Ψ auf $\partial\Omega \times (-\delta, \delta)$ für ein $\delta > 0$ ein lokaler Diffeomorphismus. Wir behaupten, dass (ggf. nach Verkleinerung von $\delta > 0$) Ψ sogar ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Wäre dem nicht so, so wäre die Injektivität verletzt, es gäbe also zu jedem $k \in \mathbb{N}$ auch $(x_k, t_k) \neq (y_k, \tau_k) \in \partial\Omega \times \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ mit $\Psi(x_k, t_k) = \Psi(y_k, \tau_k)$. Nach Übergang zu einer nicht umbenannten Teilfolge dürfen wir $x_k \to x \in \partial\Omega$ annehmen. Wegen $|x_k - \Psi(x_k, t_k)| < \frac{1}{k}$ und $|y_k - \Psi(y_k, t_k)| < \frac{1}{k}$ folgt auch $y_k \to x$. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass Ψ bzw. Φ in einer geeigneten Umgebung von $(x, 0)$ für einen beliebigen Punkte $x \in \partial\Omega$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Nehme also ab jetzt an, dass $\Psi\colon \partial\Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist.

Wir behaupten, dass für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \colon d(x) = t\} = \Psi(\partial\Omega, t) \tag{8.1}$$

gilt. Für $t = 0$ ist dies offensichtlich. Sei also $x \in \Psi(\partial\Omega, t)$ für ein t mit $0 < |t| < \varepsilon$. Da $|\nu| = 1$ ist, folgt $|d(x)| \le |t|$. Wäre $|d(x)| < |t|$, so gäbe es aufgrund der Kompaktheit ein $y \in \partial\Omega$ mit $|x - y| = |d(x)| < |t|$. Wir behaupten, dass $\frac{x-y}{|x-y|} = \pm\nu(y)$ gilt. Sei $\alpha\colon (-\delta, \delta) \to \partial\Omega$ eine C^1-Kurve mit $\alpha(0) = y$. Dann ist $|x - \alpha(\tau)|^2$ nach Definition von d für $\tau = 0$ minimal. Es gilt also

$$0 = 2\langle x - \alpha(0), -\alpha'(0)\rangle = -2\langle x - y, \alpha'\rangle.$$

Da also $x - y$ zu einem beliebigen Tangentialvektor α' in y senkrecht steht folgt die Behauptung. Somit ist aber für ein geeignetes Vorzeichen

$$\Psi(y, \pm|x - y|) = x \in \Psi(\partial\Omega, t).$$

Dies ist jedoch nicht möglich, da $|x - y| < |t|$ gilt und da Ψ auf $\partial\Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ ein Diffeomorphismus ist. Somit folgt „$\supseteq$“ in (8.1).

Die umgekehrte Inklusion funktioniert analog. Für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|d(x)| < \varepsilon$ und $d(x) \neq 0$ finden wir wie oben einen nächsten Punkt $y \in \partial\Omega$ mit Normalenvektor $\pm\frac{x-y}{|x-y|}$. Dann gilt $\Psi(y, d(x)) = x$, da das Vorzeichen vor t in der Definition von Ψ

geeignet gewählt ist bzw. da nach Definition der äußeren Normalen $x + t\nu(x) \notin \Omega$ für kleine $t > 0$ gilt. Es folgt (8.1).

Damit ist $d(x) = \pi_n \Psi^{-1}(x)$, wobei π_n die Projektion auf die n-te bzw. t-Komponente bezeichnet.

Ist $\partial\Omega \in C^k$, so ist $\nu \in C^{k-1}$, $\Psi \in C^{k-1}$ und daher auch $d \in C^{k-1}$.

Da d die Abstandsfunktion zu einer Menge ist, folgt $|\nabla d| \le 1$. Nun gilt $d(x - t\nu) = \pi_n \Psi^{-1}(x - t\nu) = \pi_n(x,t) = t$. Da also bereits $\frac{d}{dt} d(x-t\nu) = 1 = \nabla d(x-t\nu)\langle -\nu\rangle$ gilt, verschwindet die zu ν orthogonale Komponente von ∇d und es gilt $\nabla d(x - t\nu) = -\nu(x)$. Wegen $\nu \in C^{k-1}$ folgt also auch $d \in C^k$. $\square$

Bemerkung 8.3. Im Beweis des Lemmas haben wir noch folgendes gezeigt:

(i) $\Psi\colon \partial\Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $(x,t) \mapsto x - t\nu(x)$ ist ein C^{k-1} Diffeomorphismus auf sein Bild, falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist.
(ii) In Ω_ε gilt $|\nabla d| = 1$.
(iii) $\nabla d(\Psi(x,t)) = -\nu(x)$.
(iv) Zu $y \in (\partial\Omega)_\varepsilon$ gibt es stets einen eindeutig bestimmten Punkt $x = \pi(y) \in \partial\Omega$, der $|\pi(y) - y|$ minimiert. Es gilt also $d(y) = |\pi(y) - y|$ für $y \in \Omega \cap (\partial\Omega)_\varepsilon$.
(v) Daraus folgt auch $\overline{B_{d(y)}(y)} \cap \partial\Omega = \{\pi(y)\}$ für $x \in \Omega \cap (\partial\Omega)_\varepsilon$.
(vi) Es gilt $\pi(\Psi(x,t)) = x$ für $x \in \partial\Omega$ und $|t| < \varepsilon$.
(vii) Es gilt $d(\Psi(x,t)) = t$ für $x \in \partial\Omega$ und $|t| < \varepsilon$.

Um die zweiten Ableitungen der Distanzfunktion mit der Geometrie des Randes in Verbindung zu bringen, benötigen wir ein paar Vorbereitungen.

Lemma 8.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1. Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f = g$ auf $\partial\Omega$. Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und $\xi \in T_{x_0}\partial\Omega$, d. h. sei ξ im Punkte x_0 ein Tangentialvektor an $\partial\Omega$. Dann gilt*

$$\langle \nabla(f-g)(x_0), \xi\rangle \equiv D(f-g)(x_0)\langle \xi\rangle = 0.$$

Beweis. Nach einer Rotation und Translation des Koordinatensystems dürfen wir annehmen, dass $x_0 = 0$ gilt und dass lokal in der Nähe des Ursprungs

$$\Omega = \{(\hat{x}, x^n)\colon x^n > \omega(\hat{x})\}$$

für eine C^1-Funktion $\omega\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $D\omega(0) = 0$ gilt. Weiterhin dürfen wir annehmen, dass $\xi = e_1$ gilt. Gelte zusätzlich ohne Einschränkung $g \equiv 0$, denn sonst können wir das Lemma für $f - g$ und 0 statt f und g zeigen.

Definiere $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ durch $\alpha(t) = (te_1, \omega(te_1))$. Dann ist $\alpha'(0) = e_1 = \xi$ und es gilt $f \circ \alpha \equiv 0$, falls $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass α in einer Umgebung des Ursprungs bleibt, in der $\partial\Omega$ als $\operatorname{graph}\omega$ dargestellt ist. Nach Kettenregel erhalten wir daraus

$$Df(\alpha(t))\langle \alpha'(t)\rangle = 0$$

für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Für $t = 0$ erhalten wir die Behauptung. $\square$

Wir erinnern an die Definition der Hauptkrümmungen in einer speziellen Situation.

Bemerkung 8.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^2. Sei $0 \in \partial\Omega$ und gelte in der Nähe des Ursprungs

$$\Omega = \{(\hat{x}, x^n)\colon x^n > \omega(\hat{x})\}$$

für eine C^2-Funktion ω mit $D\omega(0) = 0$. Dann stimmen die $n-1$ Hauptkrümmungen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ von $\partial\Omega$ in 0 mit den Eigenwerten von $D^2\omega(0)$ überein. Ist die obige geometrische Situation nicht gegeben, so stellt man sie zunächst durch eine Rotation und eine Translation her.

Aus dem folgenden Lemma ergibt sich nochmals, dass die Hauptkrümmungen des Randes nicht von der nötigen Translation und Rotation abhängen, da die Eigenwerte von D^2d unter diesen Operationen invariant sind.

Lemma 8.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^2. Sei $d\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die signierte Distanzfunktion zu $\partial\Omega$. Dann sind die Eigenwerte von $-D^2 d$ in einem Randpunkt durch die Hauptkrümmungen von $\partial\Omega$ und 0 gegeben.*

Beweis. Es gilt $|Dd| \le 1$. Im Beweis von Lemma 8.2 haben wir bereits gesehen, dass in Ω_ε sogar $|Dd| = 1$ gilt. Wir differenzieren das Quadrat dieser Gleichung und erhalten $0 = D^2 d\langle Dd\rangle \equiv \sum\limits_{j=1}^n d_{ij} d_j$. Damit ist der Normalenvektor $\nu = -\nabla d$ ein Eigenvektor von $D^2 d$ zum Eigenwert 0.

Für den Vergleich der Eigenwerte mit den anderen Hauptkrümmungen wählen wir ein Koordinatensystem wie in Bemerkung 8.5. Zusätzlich dürfen wir nach einer weiteren Rotation annehmen, dass $D^2\omega(0)$ diagonal ist. Um die zweiten Ableitungen von d zu bestimmen, benutzen wir, dass $\nabla d = -\nu$ auf $\partial\Omega$ gilt. Es ist $-\nu = \frac{(-D\omega,1)}{\sqrt{1+|D\omega|^2}}$ auf $\partial\Omega$. Wenden wir Lemma 8.4 komponentenweise an, so sehen wir, dass $D^2 d\langle\xi\rangle = -D\tilde\nu\langle\xi\rangle$ für beliebige Tangentialvektoren $\xi \in T_0\partial\Omega$ gilt, wobei wir für $\tilde\nu$ eine beliebige C^1-Fortsetzung von ν wählen dürfen. Setze

$$-\tilde\nu(\hat x, x^n) := \frac{(-D\omega(\hat x), 1)}{\sqrt{1+|D\omega|^2}}.$$

Wir erhalten

$$D(-\tilde\nu)(0) = \begin{pmatrix} (-\omega_{ij}) & (0) \\ (0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Behauptung folgt.

Wir bemerken, dass sich die 0-Einträge von $D(-\tilde\nu)$ bei einer anderen Fortsetzung von ν ändern können. $\square$

Lemma 8.7. *Gelte Bemerkung 8.1. Sei $0 \in \partial\Omega$. Sei $D^2 d(0)$ in einem Koordinatensystem wie im Beweis von Lemma 8.6 diagonal,*

$$-D^2 d(0) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(0), \ldots, \lambda_{n-1}(0), 0\}.$$

Sei $(\partial\Omega)_\varepsilon$ eine Tubenumgebung des Randes. Dann gilt für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$D^2 d(te_n) = \operatorname{diag}\left\{\frac{-\lambda_1(0)}{1 - t\lambda_1(0)}, \ldots, \frac{-\lambda_n(0)}{1 - t\lambda_n(0)}, 0\right\}.$$

Allgemein gilt somit für $y \in \Omega_\varepsilon$, dass $D^2 d(y)$ die Eigenwerte

$$\frac{-\lambda_1(\pi(y))}{1 - d(y)\lambda_1(\pi(y))}, \ldots, \frac{-\lambda_n(\pi(y))}{1 - d(y)\lambda_n(\pi(y))}, 0$$

besitzt, wobei $\pi(y)$ die Projektion auf den nächsten Punkt in $\partial\Omega$ ist und $\lambda_i(\pi(y))$, $1 \le i \le n-1$, die Hauptkrümmungen von $\partial\Omega$ in $\pi(y)$ sind.

Das folgende Argument haben wir von G. Bellettini gelernt.

Beweis. Aus dem Beweis von Lemma 8.2, siehe Bemerkung 8.3, folgt, dass π in Ω_ε wohldefiniert ist.

Sei zunächst $k \ge 3$. Aus $|\nabla d|^2 = 1$ erhalten wir

$$0 = \sum_{l=1}^n d_{il} d_l \quad \text{und} \quad 0 = \sum_{l=1}^n d_{ilj} d_l + \sum_{l=1}^n d_{il} d_{lj}.$$

Setze $D(t) := (d_{ij}(x - t\nu(x)))_{1 \le i,j \le n}$ für $x \in \partial\Omega$. Dann folgt

$$\dot D(t) = \left(\sum_{l=1}^n - \underbrace{d_{ijl}(x - t\nu(x))}_{=d_{ilj}(x-t\nu(x))} \underbrace{\nu_l(x)}_{\substack{=-d_l(x) \\ =-d_l(x-t\nu(x))}} \right)_{i,j}$$

$$= -\left(\sum_{l=1}^{n} d_{il}d_{lj}(x - t\nu(x))\right)_{i,j} = -D^2(t).$$

Die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{f}(t) = -f^2(t)$ mit $f(0) = a$ wird durch $f(t) = \frac{a}{1+ta}$ gelöst. Beachte, dass $d(x - t\nu(x)) = t$ gilt. Setze $y = x - t\nu(x)$ und spezialisiere auf den Fall $x = 0$. Somit erfüllen die Einträge der Diagonalmatrix die Differentialgleichung mit dem gewünschten Anfangswert für $t = 0$. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Lipschitz stetiger rechter Seite folgt die erste Behauptung für $k \geq 3$.

Durch Approximation erhält man die Behauptung auch für $k \geq 2$. Einige Details dazu sind nachfolgend aufgeführt.

Da die Eigenwerte von $D^2 d$ sich unter einer Rotation oder Translation des Koordinatensystems nicht ändern, folgt die allgemeine Behauptung aus der Behauptung im diagonalen Fall. □

Das folgende Lemma zeigt, dass die Menge, in der eine approximierende Funktion Ψ_ε von Ψ ein Diffeomorphismus ist, sich im Grenzwert nicht verkleinert.

Lemma 8.8. ⋆ *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus auf* $\operatorname{im}\varphi$. *Sei $K \Subset \Omega$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass jede C^1-Abbildung $\psi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $\|\varphi - \psi\|_{C^1(\Omega)} < \varepsilon$ einen Diffeomorphismus $\psi\colon K \to \psi(K)$ liefert.*

Beweis. Sei K ohne Einschränkung kompakt. Für $\varepsilon > 0$ klein genug folgt $\det d\psi \neq 0$ in K. Somit ist ψ ein lokaler Diffeomorphismus. Wir müssen also noch nachweisen, dass ψ auch injektiv ist. Aufgrund der Kompaktheit von K gibt es ein $\delta > 0$ (Lebesguezahl), so dass für jedes $x \in K$ die Abbildung $\psi|_{B_\delta(x)}$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist. Seien also $x_0 \neq y_0 \in K$ mit $\psi(x_0) = \psi(x_0)$. Dann gilt $|x_0 - y_0| \geq \delta$. Die Menge

$$(\varphi \times \varphi)\{(x, y) \in K \times K : |x - y| \geq \delta\}$$

ist als stetiges Bild einer kompakten Menge selbst wieder kompakt. Dabei haben wir $(\varphi \times \varphi)(x, y) = (\varphi(x), \varphi(x))$ verwendet. Da φ injektiv ist, hat diese Menge einen positiven Abstand $\zeta > 0$ zur Diagonalen $\{(x, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$. Somit folgt $|\varphi(x_0) - \varphi(y_0)| \geq \zeta > 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
0 &= |\psi(x_0) - \psi(y_0)| \\
&= |(\psi(x_0) - \varphi(x_0)) + (\varphi(x_0) - \varphi(y_0)) + (\varphi(y_0) - \psi(y_0))| \\
&\geq |\varphi(x_0) - \varphi(y_0)| - |\psi(x_0) - \varphi(x_0)| - |\varphi(y_0) - \psi(y_0)| \\
&\geq \zeta - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ist $\varepsilon > 0$ klein genug gewählt, so erhalten wir einen Widerspruch. □

Bemerkung 8.9. ⋆ Approximieren wir den Rand in C^2, so erhalten wir für die zugehörigen Diffeomorphismen $\Psi_\varepsilon \to \Psi$ in C^1. Sei x aus $\partial\Omega$ beliebig und $y = x - t\nu(x)$ für ein kleines t. Dann ist $x = \pi_1\Psi^{-1}(y)$ und wir erhalten

$$\nabla d(y) = \nabla d(x - t\nu(x)) = \nu(x) = \nu\left(\pi_1\Psi^{-1}(y)\right).$$

Die Rechnung

$$\begin{aligned}
&|\varphi_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon(x) - \varphi \circ \psi(x)| \\
\leq\, &|\varphi_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon(x) - \varphi \circ \psi_\varepsilon(x)| + |\varphi \circ \psi_\varepsilon(x) - \varphi \circ \psi(x)| \\
\leq\, &\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{C^0} + |\varphi \circ \psi_\varepsilon(x) - \varphi \circ \psi(x)|
\end{aligned}$$

zeigt, dass $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ und $\psi_\varepsilon \to \psi$ in C^0 auch $\varphi_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon \to \varphi \circ \psi$ impliziert. Auf Kompakta ist das Stetigkeitsmodul von φ (die Wahl von δ in Abhängigkeit von ε in der üblichen Stetigkeitsdefinition) gleichmäßig beschränkt. Daher konvergiert der zweite Term auch lokal gleichmäßig in x gegen Null. Analog zeigt man, dass auch C^1-Konvergenz unter Verkettungen erhalten ist, wobei man noch die Stetigkeit der Multiplikation benötigt.

Wegen $\Psi_\varepsilon \to \Psi$ in C^1 folgt $\pi_2 \circ \Psi_\varepsilon^{-1} = d_\varepsilon \to d$ in C^1. Wir gehen nun analog zum Beweis von Lemma 8.2 vor. Aus

$$\nabla d_\varepsilon = \nu_\varepsilon \circ \pi_1 \circ \Psi_\varepsilon^{-1} \to \nu \circ \pi_1 \circ \Psi^{-1} = \nabla d \quad \text{in } C^1$$

erhalten wir lokal auch $d_\varepsilon \to d$ in C^2.

Korollar 8.10. *Gelte Bemerkung 8.1. Dann gilt für y in einer Tubenumgebung $(\partial\Omega)_\varepsilon \cap \Omega$*

$$-\Delta d(y) \geq H(\pi(y)),$$

wobei $\pi\colon (\partial\Omega)_\varepsilon \to \partial\Omega$ die Projektion auf den nächsten Randpunkt ist.

Beweis. Die Aussage gilt für $y \in \partial\Omega$ mit Gleichheit und folgt allgemein aus

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda_i(\pi(y))}{1 - t\lambda_i(\pi(y))}\right) \geq 0. \qquad \square$$

9. Die Gausskrümmung integrieren

Im nächsten Abschnitt werden wir mit Hilfe des mittleren Krümmungsflusses die isoperimetrische Ungleichung für konvexe Hyperflächen im $\mathbb{R}^3$ beweisen. Dabei benötigen wir eine untere Abschätzung an $\int\limits_M K$. Diese behandeln wir nun.

Lemma 9.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ strikt konvex und $x \mapsto Du(x)$ ein Diffeomorphismus auf $Du(\Omega)$. Sei $M = \operatorname{graph} u \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann gilt*

$$\int\limits_M K\,d\mu = |\nu(M)|,$$

wobei K die Gaußkrümmung von M bezeichnet.

Bemerkung 9.2. Die Abbildung $x \mapsto Du(x)$ ist für strikt konvexe Funktionen u lokal stets ein Diffeomorphismus (Details: Übung). Global ist dies für konvexe Mengen Ω ebenfalls richtig, so dass diese Voraussetzung in Anwendungen häufig automatisch erfüllt ist.

Beweis von Lemma 9.1. Wir stellen die beiden Seiten der behaupteten Gleichheit zunächst in geeigneter Form dar: Es gilt für die linke Seite

$$\int\limits_M K\,d\mu = \int\limits_\Omega \frac{\det D^2u}{\left(1+|Du|^2\right)^{\frac{n+2}{2}}} \cdot \left(1+|Du|^2\right)^{1/2}\,dx.$$

Die Abbildung $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto \frac{y}{\sqrt{1+|y|^2}} \in B_1 \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Diffeomorphismus (kleine Übung). Somit ist auch

$$\Omega \ni x \mapsto \frac{\nabla u(x)}{\sqrt{1+|Du(x)|^2}} \in B_1$$

ein Diffeomorphismus. Gleichzeitig stimmen $\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|Du|^2}}$ und die ersten n Komponenten von ν überein. Sind die ersten n Komponenten von ν gleich $z \in B_1 \subset \mathbb{R}^n$, so erhalten wir

$$\nu = \left(z, \sqrt{1-|z|^2}\right)^T \equiv (z, f(z))^T.$$

Somit erhalten wir für den Ausdruck auf der rechten Seite der behaupteten Gleichheit

$$|\nu(M)| = \int\limits_{\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|Du|^2}}(\Omega)} \sqrt{1+|Df|^2}\,dz = \int\limits_{\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|Du|^2}}(\Omega)} \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}\,dz,$$

da

$$\begin{aligned} f(z) &= \sqrt{1-|z|^2}, \\ f_i &= \frac{-z_i}{\sqrt{1-|z|^2}} \end{aligned}$$

und

$$1+|Df|^2 = 1+\frac{|z|^2}{1-|z|^2} = \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Wir möchten nun die Transformationsformel für Integrale benutzen. Definiere dazu

$$\varphi(x) = \frac{\nabla u(x)}{\sqrt{1+|Du(x)|^2}} \equiv z.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \varphi^i_j \equiv \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{u^i}{\sqrt{1+|Du|^2}} = \frac{u^i_j}{\sqrt{1+|Du|^2}} - \frac{u^i u_{jk} u^k}{\sqrt{1+|Du|^2}^3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}^3}\cdot u_{jk}\left(\delta^{ki}\left(1+|Du|^2\right) - u^i u^k\right), \\ \det D\varphi &= \left(1+|Du|^2\right)^{-\frac{3n}{2}} \cdot \det D^2u \cdot \det\left(\delta^{ki}\left(1+|Du|^2\right) - u^i u^k\right) \\ &= \left(1+|Du|^2\right)^{-\frac{3n}{2}} \cdot \det D^2u \cdot \left(1+|Du|^2\right)^{n-1} \\ &= \left(1+|Du|^2\right)^{-\frac{n+2}{2}} \cdot \det D^2u = K > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{1-|\varphi(x)|^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{|Du|^2}{1+|Du|^2}}} = \sqrt{1+|Du|^2}. \end{aligned}$$

Mit $z=\varphi(x)$ und $\frac{dz}{dx} = \varphi'$ erhalten wir nach Integraltransformationsformel

$$\int\limits_\Omega \det D\varphi \cdot h(\varphi(x))\,dx = \int\limits_{\varphi(\Omega)} h(z)\,dz.$$

Wenden wir dies auf $h(z) = \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}$ an, so erhalten wir

$$\int\limits_\Omega K\cdot\sqrt{1+|Du|^2}\,dx = \int\limits_{\varphi(\Omega)} \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}\,dz$$

wie behauptet. □

Für das nächste Korollar benötigen wir noch die Surjektivität von ν bei geschlossenen C^1-Untermannigfaltigkeiten.

Lemma 9.3. *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine geschlossene C^1-Untermannigfaltigkeit. Dann ist*

$$\nu\colon M^n \to \mathbb{S}^n$$

surjektiv.

Für eine kompakte immersierte C^1-Hyperfläche gilt dieses Resultat im Allgemeinen nicht mehr. Die Figur „∞“ ist ein Gegenbeispiel dafür.

Beweis. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass M zusammenhängend ist. Sonst betrachten wir eine Zusammenhangskomponente von M. Es ist bekannt, dass $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten besteht. Ist M homöomorph zur Sphäre, so benutzt man dafür den Abbildungsgrad, siehe z. B. [10], sonst Differentialtopologie [8, 9]. Da M beschränkt ist, ist genau eine dieser beiden Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ unbeschränkt. Seien Z_1 und Z_2 diese beiden Zusammenhangskomponenten, Z_2 sei unbeschränkt. Dann gilt auch $\partial Z_1 = \partial Z_2 = M$.

(Ein Blick auf die gehörnte Sphäre von W. Alexander, die homöomorph zu $\mathbb{S}^2$ ist, mag verdeutlichen, dass solch ein Resultat nichttrivial ist. Im Komplement dieser Sphäre gibt es nicht kontrahierbare $\mathbb{S}^1$-en.)

Wir möchten nun eine Normale auswählen, die überall in einem noch zu definierenden Sinne in die unbeschränkte Komponente weist: Hätte Z_1 einen C^2-Rand, könnten wir den negativen Gradienten der signierten Distanzfunktion wählen. Nun wählen wir in jedem Punkt $x \in M$ die Normale $\nu(x)$, die $x + t\nu(x) \in Z_2$ für kleine $t > 0$ erfüllt. An einer lokalen Graphendarstellung über einem zusammenhängenden Gebiet sieht man, dass die zusammenhängenden Mengen ober- und unterhalb des Graphen jeweils Teilmengen von Z_1 oder Z_2 sein müssen. Weiterhin liegt Z_1 oberhalb von M und Z_2 unterhalb von M oder umgekehrt, da sonst nicht $\partial Z_1 = \partial Z_2 = M$ gelten kann. Somit sieht man, dass das Vorzeichen der Normalen wohldefiniert (es gibt also immer eine solche Vorzeichenwahl) und die Normale stetig ist.

Anschaulich gesprochen fixiert man nun ein $p \in \mathbb{S}^n$ und verschiebt eine Hyperebene mit Normale p von Unendlich her kommend in Richtung $-p$, bis sie in einem Punkt M berührt. Dort hat M dann die Normale p.

Formal setzt man dies wie folgt um: Sei $p \in \mathbb{S}^n$ fest. Betrachte die stetige Funktion Φ mit

$$M \ni x \mapsto \langle x, p\rangle \in \mathbb{R}.$$

Dann existiert $x_0 \in M$, so dass Φ in x_0 maximal ist. Aufgrund der Maximalität folgt $\langle x, p\rangle \le \langle x_0, p\rangle$ bzw. $\langle x - x_0, p\rangle \le 0$ für alle $x \in M$.

Sei $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine C^1-Kurve mit $\gamma(0) = x_0$. Aufgrund der Maximalität von Φ in x_0 gilt $\Phi(\gamma(t)) \le \Phi(x_0)$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ mit Gleichheit für $t = 0$. Es folgt

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\Phi(\gamma(t))\right|_{t=0} = \langle\dot\gamma(0), p\rangle.$$

Somit steht jeder Tangentialvektor an M in x_0 senkrecht auf p. Also gilt $\nu(x_0) = \pm p$. Für jedes $\lambda > 0$ gilt

$$\langle x_0 + \lambda p, p\rangle > \langle x_0, p\rangle.$$

Somit liegt keiner der Punkte $x_0 + \lambda p$, $\lambda > 0$, auf M und daher weist p in Richtung der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$. Daher folgt $\nu(x_0) = +p$. Da $p \in \mathbb{S}^n$ beliebig war, ist ν surjektiv. □

Die nächste Folgerung gilt auch ohne die strikte Konvexitätsannahme, falls die Mannigfaltigkeit topologisch eine Sphäre ist. Dies folgt aus dem Satz von Gauß-Bonnet.

Korollar 9.4. *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine zusammenhängende strikt konvexe geschlossene n-dimensionale C^2-Untermannigfaltigkeit. Dann gilt*

$$\int\limits_M K = |\mathbb{S}^n| = (n+1)\omega_{n+1}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis dieses Satzes unter der zusätzlichen Annahme, dass M der Rand einer konvexen Menge $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist. Diese Annahme ist nicht nötig, wir werden dies jedoch erst in Abschnitt 12 zeigen.

Nach Lemma 9.3 ist $\nu\colon M \to \mathbb{S}^n$ surjektiv. Die lokale Injektivität der Normalen ν folgt mit Hilfe der Normalform für Hyperflächen aus der strikten Konvexität. Da M der Rand einer konvexen Menge K ist, liefert eine einfache geometrische Überlegung die Injektivität von $\nu\colon M \to \mathbb{S}^n$. Lokal in Graphendarstellung ist Du ein Diffeomorphismus. (In einem noch genauer zu definierenden Sinne ist damit sogar $\nu\colon M \to \mathbb{S}^n$ ein Diffeomorphismus.) Wir bemerken zunächst, dass sich Lemma 9.1 auch auf messbare Teilmengen von Ω bzw. M, da sind es genau die Bilder messbarer Teilmengen von Ω, anwenden läßt. (Alternativ kann man M bis auf eine n-dimensionale Nullmenge, die noch formal zu definieren wären, zerlegen und sich überlegen, dass diese Nullmengen auf beiden Seiten der behaupteten Gleichheit keinen Beitrag liefern.) Zu jedem Punkt $p \in M$ gibt es eine Umgebung U mit $p \in U$, so dass Lemma 9.1 auf $M \cap U$ anwendbar ist. Aufgrund der Kompaktheit von M überdecken endlich viele davon bereits M:

$$M = \bigcup_{i=1}^{N} U_i.$$

Wir setzen nun $M_i := U_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} U_j$, $1 \le i \le N$, und erhalten eine endliche disjunkte Überdeckung von M durch messbare Mengen, $M = \bigcup\limits_{i=1}^{N} M_i$. Wenden wir nun Lemma 9.1 auf jede dieser Mengen an, so erhalten wir

$$\int\limits_M K\,d\mu = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{M_i} K\,d\mu = \sum_{i=1}^{N} |\nu(M_i)| = \left|\nu\left(\bigcup_{i=1}^{N} M_i\right)\right| = |\nu(M)| = |\mathbb{S}^n|,$$

da die Mengen M_i paarweise disjunkt sind und ν ein Diffeomorphismus ist.

Die zweite Gleichheit in der Behauptung ist aus Analysis II bekannt. □

Häufig ist die genaue Schranke beim nächsten Resultat gar nicht wichtig.

Korollar 9.5. *Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ strikt konvex und $M := \operatorname{graph} u$. Dann gilt*

$$\int\limits_M K\,d\mu \le \frac{1}{2}|\mathbb{S}^n|.$$

Beweis. Da $\mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge ist, ist $\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$ ein Diffeomorphismus auf eine Teilmenge der offenen unteren Hemisphäre. □

Korollar 9.6. *Sei $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Dann gibt es keine positive untere Schranke $\varepsilon > 0$ für die Hauptkrümmungen von $M = \operatorname{graph} u$, d. h. es gibt kein $\varepsilon > 0$ mit $\lambda_i((x, u(x))) \ge \varepsilon > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $1 \le i \le n$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe doch solch eine Funktion u. u oder $-u$ (bei Wahl der oberen Normalen) ist eine strikt konvexe Funktion. Sei ohne Einschränkung u strikt konvex. Dann gilt $K[u] \ge \varepsilon^n > 0$. Es folgt

$$\frac{1}{2}|\mathbb{S}^n| \ge \int\limits_M K\,d\mu \ge \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^n\,dx.$$

Widerspruch. □

Korollar 9.7. *Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ strikt konvex. Dann ist $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ oder $K \in L^1(\operatorname{graph} u)$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Beweis von Korollar 9.6. □

10. Mittlerer Krümmungsfluss

Man kann den mittleren Krümmungsfluss für Mannigfaltigkeiten unterschiedlicher Kodimension in anderen Mannigfaltigkeiten untersuchen, wir beschränken uns hier jedoch auf den Fall von Hyperflächen im Euklidischen.

Statt vom mittleren Krümmungsfluss sollte man - in unserem Fall - genauer vom Fluss von Hyperflächen entlang ihrer mittleren Krümmung reden.

10.1. **Die Flussgleichung.** Üblicherweise betrachtet man beim mittleren Krümmungsfluss Abbildungen $X\colon M\times[0,T)\to\mathbb{R}^{n+1}$, wobei M eine abstrakte Mannigfaltigkeit ist. Da wir solche aber noch nicht kennen, umgehen wir dieses Problem mit Hilfe einer lokalen Definition.

Wir setzen hier den Startzeitpunkt stets auf $t=0$. Die Definitionen und Resultat lassen sich aber direkt auf andere Startzeitpunkte übertragen.

Definition 10.1. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen. Sei $T>0$. Dann erfüllt die Abbildung $X\colon\Omega\times[0,T)\to\mathbb{R}^{n+1}$ den mittleren Krümmungsfluss (lokal), falls $X(\cdot,t)$ für alle $t\in[0,T)$ eine immersierte C^2-Hyperfläche ist, X nach t differenzierbar ist und für alle $(x,t)\in\Omega\times[0,T)$ die Gleichung
$$\dot{X}=-H\nu$$
erfüllt ist.

Später ersetzt man in der folgenden Definition die Untermannigfaltigkeit durch eine abstrakte Mannigfaltigkeit. In beiden Fällen benutzt man eine Karte, um mit $X\circ(\varphi^{-1}\times\mathrm{id})$ eine auf $\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ definierte Abbildung zu erhalten.

Definition 10.2. Sei M eine Untermannigfaltigkeit. Sei $T>0$. Dann erfüllt $X\colon M\times[0,T)\to\mathbb{R}^{n+1}$ den mittleren Krümmungsfluss, falls es für jeden Punkt $p\in M$ eine Karte (U,φ) mit $p\in U$ gibt, so dass $X\circ(\varphi^{-1}\times\mathrm{id})\colon\varphi(U)\times[0,T)\to\mathbb{R}^{n+1}$ den mittleren Krümmungsfluss lokal erfüllt.

Wir sagen auch, dass dann die Familie $(M_t)_{t\in[0,T)}$ mit $M_t=X(M,t)$ den mittleren Krümmungsfluss erfüllt.

Die Definition des mittleren Krümmungsflusses ist im folgenden Sinne von der Wahl der Karte unabhängig.

Lemma 10.3. *Sei $X\circ(\varphi^{-1}\times\mathrm{id})$ eine lokale Lösung des mittleren Krümmungsflusses. Sei (V,ψ) eine weitere Karte. Seien (U,φ) und (V,ψ) C^2-verträglich, d. h. sei $\varphi\circ\psi^{-1}\colon\psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V)$ ein C^2-Diffeomorphismus. Dann erfüllt $X\circ(\psi^{-1}\times\mathrm{id})\colon\psi(V\cap U)\times[0,T)\to\mathbb{R}^{n+1}$ ebenfalls lokal den mittleren Krümmungsfluss.*

Beweis. Übung. □

Beispiel 10.4 (Sphären). Sei $M=\mathbb{S}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$. Sei $R>0$. Dann ist $X\colon M\times\left[0,\frac{R^2}{2n}\right)\to\mathbb{R}^{n+1}$ mit $X(p,t):=p\cdot\sqrt{R^2-2nt}$ eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses.

Auf diese Lösung kommt man, indem man den Ansatz $X(p,t):=p\cdot f(t)$ macht. Hieraus erhält man $\lambda_i(t)=\frac{1}{f(t)}$, $H=\frac{n}{f(t)}$, $\dot{X}=p\dot{f}(t)$ und $\nu(p,t)=p$. Also sollte
$$p\dot{f}(t)=\dot{X}\overset{!}{=}-H\nu=-\frac{n}{f(t)}p$$
gelten. Dies ist für $\dot{f}(t)=-\frac{n}{f(t)}$ der Fall und die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung mit Anfangswert $f(0)=R$ ist durch $f(t)=\sqrt{R^2-2nt}$ gegeben.

Wir lassen es als Übung, die Definition des mittleren Krümmungsflusses auch formal zu überprüfen.

Bemerkung 10.5.

(i) Minimalflächen sind stationäre (= zeitunabhängige) Lösungen des mittleren Krümmungsflusses. Zylinder der Form $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ schrumpfen ähnlich wie Sphären. Sie konvergieren in endlicher Zeit gegen $\{0_{\mathbb{R}^{k+1}}\} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Die grim reaper Lösung ist als Graph von $u(x,t) = -\log\cos x + t$, $(x,t) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}$, gegeben. Weitere explizite Beispiele sind die Haarnadel- oder Büroklammerlösung (haar pin, paper clip). Details: Übung.

(ii) Für weitere Lösungen muss man - soweit ich weiß - zumindest eine gewöhnliche Differentialgleichung lösen (siehe beispielsweise meine Vorlesung über Gewöhnliche Differentialgleichungen mit geometrischen Anwendungen). Sind die Lösungen nicht symmetrisch, muss man eine quasilineare partielle Differentialgleichung lösen (siehe beispielsweise meine Vorlesung über den Graphischen mittleren Kümmungsfluss).

(iii) Beim mittleren Krümmungsfluss untersucht man häufig die Existenz von Lösungen und ihr Verhalten. Klassische Resultate von etwa 1985-1995 sind: Konvexe Hyperflächen konvergieren gegen runde Punkte, d. h. gegen einen Punkt und nach geeignetem Reskalieren gegen eine runde Sphäre (G. Huisken, [6]). Eingebettete $\mathbb{S}^1$-en bleiben eingebettet, werden in endlicher Zeit konvex und konvergieren dann auch gegen einen runden Punkt (M. Gage, R. Hamilton; M. Grayson [4, 5]). Graphische Hyperflächen existieren für alle Zeit und konvergieren gegen homothetisch expandierende Lösungen, wenn sie anfangs asymptotisch zu einem Kegel sind (K. Ecker, G. Huisken, [3]).

(iv) Ein großes Ziel ist es, mit Hilfe des mittleren Krümmungsflusses alle (kompakten) Hyperflächen in geeigneter Weise zu klassifizieren. Der mittlere Krümmungsfluss wird auch hier in der Arbeitsgruppe untersucht.

10.2. **Mittlerer Krümmungsfluss als geometrische Evolutionsgleichung.** Der mittlere Krümmungsfluss ist eine geometrische Evolutionsgleichung, d. h. das Bild $M_t := X(\Omega, t)$ hängt nicht von der konkreten Parametrisierung ab und ist unter Euklidischen Bewegungen des umgebenden Raumes invariant. Da es häufig nur auf das Bild M_t ankommt, kann man auch Lösungen von $\langle \frac{d}{dt}X, \nu\rangle = -H$ untersuchen. Diese sind nicht eindeutig bestimmt, da man sie mit Hilfe von Diffeomorphismen wie im folgenden Theorem angegeben abändern kann.

Theorem 10.6. *Sei $X\colon \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses $\frac{d}{dt}X = -H\nu$ oder eine Lösung, deren Normalengeschwindigkeit gerade die mittlere Krümmung ist: $\left\langle \frac{d}{dt}X, \nu\right\rangle = -H$. Sei $R \in O(n+1)$ eine orthogonale Abbildung und $\psi\colon \hat\Omega \times [0,T) \to \Omega$ glatt, so dass $\psi(\cdot,t)\colon \hat\Omega \to \Omega$ für alle $t \in [0,T)$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist die Normalengeschwindigkeit von $\hat X(x,t) := RX(\psi(x,t),t)$, in Koordinaten $\hat X^\alpha(x,t) = R^\alpha_\beta X^\beta(\psi(x,t),t)$, gerade die mittlere Krümmung:*

$$\left\langle \frac{d}{dt}\hat X, \hat\nu\right\rangle = -\hat H.$$

Weiterhin gilt $\hat H(x,t) = H(\psi(x,t),t)$.

Den Diffeomorphismus ψ kann man verwenden, um die Hyperflächen anders zu parametrisieren. Daher kann man nicht mehr erwarten, dass die Tangentialgeschwindigkeit verschwindet, wenn wir ψ verwenden. Die Bilder von X und $X \circ \psi$ stimmen aber überein. Daher passiert in beiden Fällen geometrisch das Gleiche.

Da sämtliche Rechnungen im Beweis lokal sind, gilt dies auch, wenn die Mengen Ω und $\hat\Omega$ von der Zeit abhängen.

Beweis. Größen zu $\hat X$ bezeichnen wir mit $\hat\nu$, $\hat H$, $\hat g_{ij}$, $\ldots$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{X}^\alpha =&R^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial t}X^\beta + R^\alpha_\beta X^\beta_k \dot{\psi}^k,\\ \hat{X}^\alpha_i =&R^\alpha_\beta X^\beta_k \psi^k_i,\\ \hat{X}^\alpha_{,ij} =&R^\alpha_\beta X^\beta_k \psi^k_{ij} + R^\alpha_\beta X^\beta_{,kl}\psi^k_i\psi^l_j.\end{aligned}$$

Wählen wir $\hat{\nu}^\alpha = R^\alpha_\beta \nu^\beta$, also $\hat{\nu} = R\nu$, so ist dies eine Normale an die Fläche $\hat{X}$, da $\langle R\nu, R\nu\rangle = \langle \nu,\nu\rangle = 1$ und $\left\langle R\nu, \left(R^\alpha_\beta X^\beta_k \psi^k_i\right)_\alpha\right\rangle = \langle \nu, X_k\rangle \psi^k_i = 0$ für alle $1 \le i \le n$ gelten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dt}\hat{X}, \hat{\nu}\right\rangle =&\frac{\partial}{\partial t}X^\alpha R^\beta_\alpha \delta_{\beta\gamma} R^\gamma_\delta \nu^\delta + \dot{\psi}^i X^\alpha_i R^\beta_\alpha \delta_{\beta\gamma} R^\gamma_\delta \nu^\delta\\ =&-H\nu^\alpha \delta_{\alpha\delta}\nu^\delta + \dot{\psi}^i X^\alpha_i \delta_{\alpha\delta}\nu^\delta\\ =&-H + 0.\end{aligned}$$

$\hat{H}(x,t) = H(\psi(x,t),t)$ haben wir bereits in Theorem 5.10 gesehen. Um beide Teile des Beweises beieinander zu haben, wiederholen wir dies hier nochmals. Es gilt

$$\begin{aligned}\hat{g}_{ij} =&\hat{X}^\alpha_i \delta_{\alpha\beta}\hat{X}^\beta_j = \psi^k_i X^\gamma_k R^\alpha_\gamma \delta_{\alpha\beta} R^\beta_\delta X^\delta_l \psi^l_j = \psi^k_i X^\gamma_k \delta_{\gamma\delta} X^\delta_l \psi^l_j = \psi^k_i g_{kl}\psi^l_j,\\ \hat{h}_{ij} =&-\left\langle \hat{X}_{,ij}, \hat{\nu}\right\rangle = -\psi^k_{ij} X^\beta_k R^\alpha_\beta \delta_{\alpha\gamma} R^\gamma_\delta \nu^\delta - \psi^k_i \psi^l_j X^\beta_{,kl} R^\alpha_\beta \delta_{\alpha\gamma} R^\gamma_\delta \nu^\delta\\ =&-\psi^k_{ij} X^\beta_k \delta_{\beta\delta}\nu^\delta + \psi^k_i \left(-X^\beta_{,kl}\delta_{\beta\delta}\nu^\delta\right)\psi^l_j = 0 + \psi^k_i h_{kl}\psi^l_j.\end{aligned}$$

ψ ist ein Diffeomorphismus. Also ist $\left(\psi^i_j\right)_{1\le i,j\le n}$ eine invertierbare Matrix und die Eigenwerte von h_{ij} bezüglich g_{ij} und von $\hat{h}_{ij}$ bezüglich $\hat{g}_{ij}$ stimmen überein: Sei nämlich ξ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, d. h. gelte

$$\lambda g_{ij}\xi^j = h_{ij}\xi^j$$

und $\xi \ne 0$. Dann folgt für $\hat{\xi}^i := \Psi^i_k \xi^k$ mit $\Psi(\cdot,t) := (\psi(\cdot,t))^{-1}$

$$\lambda \hat{g}_{kl}\hat{\xi}^l = \lambda \psi^i_k g_{ij}\psi^j_l \Psi^l_m \xi^m = \lambda \psi^i_k g_{ij}\xi^m = \psi^i_k h_{ij}\xi^j = \psi^i_k h_{ij}\psi^j_l \Psi^l_m \xi^m = \hat{h}_{kl}\hat{\xi}^l.$$

Andersherum argumentiert man analog. Somit folgt $\hat{H}(x,t) = H(\psi(x,t),t)$ und damit die Behauptung. □

Übung 10.7. Finde Lösungen von $\left\langle \frac{d}{dt}X, \nu\right\rangle = -H$ und $\frac{d}{dt}X = -H\nu$ für den Fall, dass M_0 ein Zylinder ist, dass also $M_0 = \left(R\cdot\mathbb{S}^k\right)\times\mathbb{R}^{n-k}$ für ein $R > 0$ gilt und überprüfe die Definition des mittleren Krümmungsflusses explizit.

10.3. **Graphische Krümmungsflüsse.**

Bemerkung 10.8.

(i) Die Resultate dieses Abschnittes gelten mit Modifikationen bei den Definitionsmengen auch für Graphen, die nicht über ganz $\mathbb{R}^n$ definiert sind.

(ii) Sei in diesem Abschnitt F eine beliebige Normalengeschwindigkeit, also z. B. $F = H$, $F = K$ oder $F = |A|^2$. Es sind aber auch Funktionen möglich, die beispielsweise zusätzlich von $X(x,t)$ oder ν abhängen.

(iii) Naiv könnte man denken, dass wir durch Betrachten der $(n+1)$-sten Komponente von $\frac{d}{dt}X = -F\nu$ die Evolutionsgleichung $\dot{u} = \frac{F}{\sqrt{1+|Du|^2}}$ erhielten. Dabei haben wir jedoch nicht berücksichtigt, dass sich dabei auch der Punkt x zeitlich ändern kann. Vergleiche dies auch mit einer Ebene, die sich mit konstanter Normalengeschwindigkeit bewegt.

(iv) Bei der Umkehrung kann man nicht erwarten, die Evolutionsgleichung $\frac{d}{dt}X = -F\nu$ zu erhalten, da Diffeomorphismen wie in Theorem 10.6 den Tangentialanteil von $\frac{d}{dt}X$ ändern können.

Lemma 10.9. *Sei $(M_t)_{0\le t<T}$ eine Lösung von $\frac{d}{dt}X = -F\nu$. Sei $u\colon \mathbb{R}^n\times[0,T)\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit*

$$M_t = \operatorname{graph} u(\cdot,t)$$

für alle $t\in[0,T)$. Dann erfüllt u die partielle Differentialgleichung

$$\dot u = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F,$$

im Falle von $F = H$ also

$$\dot u = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right),$$

in $\mathbb{R}^n\times[0,T)$.

Umgekehrt sei u eine Lösung von $\dot u = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F$. Dann gilt $\left\langle\frac{d}{dt}H,\nu\right\rangle = -F$ für $X(x,t) = (x,u(x,t))^T$, jedoch im allgemeinen nicht $\frac{d}{dt}H = -F\nu$.

Im Falle $F = H, K$ oder $|A|^2$ handelt es sich um eine (echte) partielle Differentialgleichung, beispielsweise für $F\equiv 1$ entartet diese jedoch zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

Beweis. Sei X auf $\mathbb{R}^n\times[0,T)$ definiert. Wir bezeichnen die Koordinaten in $\mathbb{R}^n$ mit ξ. Wir bezeichnen weiterhin die orthogonale Projektion von $X(\xi,t)$ auf die Hyperebene $\mathbb{R}^n\equiv\mathbb{R}^n\times\{0\}$ mit $x(\xi,t)$. Dann gilt

$$X(\xi,t) = (x(\xi,t), u(x(\xi,t),t))^T.$$

Aus der Evolutionsgleichung folgt

$$\frac{d}{dt}X = \left(\dot x, u_i\dot x^i + \dot u\right)^T = -F\nu = F\frac{(-u^1,\ldots,-u^n,1)^T}{\sqrt{1+|Du|^2}}.$$

Dabei benutzen wir $\dot u = \frac{\partial u}{\partial t}$ und $u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$. Durch Komponentenvergleich erhalten wir

$$\begin{aligned}
\dot x^i &= \frac{-Fu^i}{\sqrt{1+|Du|^2}},\\
\dot u &= \frac{F}{\sqrt{1+|Du|^2}} - u_i\dot x^i = \frac{F}{\sqrt{1+|Du|^2}} + \frac{F|Du|^2}{\sqrt{1+|Du|^2}} = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F.
\end{aligned}$$

Bis hier gelten die Rechnungen auch für andere Normalengeschwindigkeiten als H. Die Formel für H im graphischen Fall haben wir bereits oben in Beispiel 5.23 hergeleitet. Somit folgt die Behauptung.

Zur Umkehrung der Aussage: Definiere $X(x,t) = (x,u(x,t))^T$ für eine Funktion u mit $\dot u = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}X &= \left(0, \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F\right)^T,\\
\nu &= \frac{(\nabla u,-1)^T}{\sqrt{1+|Du|^2}},\\
\left\langle\frac{d}{dt}X,\nu\right\rangle &= -F.
\end{aligned}$$

Ist $Du\neq 0$, so kann $\frac{d}{dt}X = -F\nu$ nicht gelten. $\square$

Eine bessere Umkehrung erhalten wir, indem wir noch gewöhnliche Differentialgleichungen lösen.

Lemma 10.10. *Sei $u\colon \mathbb{R}^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$ eine glatte Lösung von $\dot u = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot F$. Seien Du und F gleichmäßig beschränkt. Dann gibt es eine Familie $(\psi_t)_{t\in[0,T)}$ von Diffeomorphismen $\psi_t = \psi(\cdot,t)$ mit $\psi\colon \mathbb{R}^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^n$ und $\psi_0 = \mathrm{id}$, so dass $X(x,t) := (\psi(x,t), u(\psi(x,t),t))^T$ die Evolutionsgleichung $\frac{d}{dt}X = -F\nu$ löst. Ist u glatt, so auch ψ.*

Beweis. Da die beiden äußeren Terme gleich sind, sollte

$$\frac{d}{dt}X = \left(\dot\psi, \dot u + u_i\dot\psi^i\right) \overset{!}{=} -F\frac{(\nabla u(\psi(x,t),t),-1)^T}{\sqrt{1+|Du(\psi(x,t),t)|^2}} = -F\nu$$

gelten. Nach Beschränktheits- und Regularitätsannahme besitzt das Anfangswertproblem des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \dot\psi^i(x,t) = -\dfrac{Fu^i}{\sqrt{1+|Du(\psi(x,t),t)|^2}}, \\ \psi(\cdot,0) = \mathrm{id} \end{cases}$$

eine glatte lokal gleichmäßig beschränkte Lösung $\psi\colon \mathbb{R}^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^n$. Nach Konstruktion gilt die erwünschte Gleichheit in den ersten Komponenten und aus

$$\dot u + u_i\dot\psi^i = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F - \frac{F|Du|^2}{\sqrt{1+|Du|^2}} = \frac{F}{\sqrt{1+|Du|^2}}$$

folgt auch die Gleichheit in der letzten Komponente.

Aus Analysis III ist bekannt, dass alle Abbildungen ψ_t glatt und Diffeomorphismen sind. □

Bemerkung 10.11. Je nach Funktion F benötigt man weniger Regularität. So genügt bei Flüssen wie dem mittleren Krümmungsfluss oder dem Gaußkrümmungsfluss $u \in C^{3,1;1,1} \supset C^{4;2}$ und gleichmäßige Schranken in dieser Norm. Die Differenzierbarkeit von ψ folgt dann aus dem Satz über die differenzierbare Abhängigkeit von Lösungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen auf ψ und den Parameter x angewandt. Insbesondere ist es dafür nötig, dass die Ableitung der rechten Seite nach Differentiation nach ψ noch Lipschitzstetig in x ist.

Über den graphischen mittleren Krümmungsfluss ist später eine eigene Vorlesung geplant.

10.4. **Der mittlere Krümmungsfluss als negativer Gradientenfluss.** Wir leiten zunächst eine Eigenschaft des Gradientenflusses her, die wir auch beim mittleren Krümmungsfluss zeigen werden.

Bemerkung 10.12. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Sei I ein offenes Intervall. Dann löst eine C^1-Funktion $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ den negativen Gradientenfluss zur Funktion f bezüglich der Euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^n$, falls

$$\dot x(t) = -\nabla f(x(t))$$

für alle $t \in I$ gilt.

Sei $t_0 \in I$ und sei $y(t)\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine weitere C^1-Funktion mit $y(t_0) = x(t_0)$ und $|\dot y(t_0)| \le |\dot x(t_0)| = |\nabla f(x(t_0))|$. Dann gilt $\frac{d}{dt}f(x(t)) \le \frac{d}{dt}f(y(t))$ an der Stelle $t = t_0$, d. h. der negative Gradientenfluss ist infinitesimal die schnellste Möglichkeit bei gegebener Geschwindigkeit f zu verkleinern. (Global braucht dies nicht richtig zu sein.)

Beweis. Es gilt

$$\left.\frac{d}{dt}(f(x(t)) - f(y(t)))\right|_{t=t_0} = Df(x(t_0))\langle\dot x(t_0)\rangle - Df(y(t_0))\langle\dot y(t_0)\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \nabla f(x(t_0)), \dot x(t_0)\rangle - \langle \nabla f(x(t_0)), \dot y(t_0)\rangle \\
&\le -\,|\nabla f(x(t_0))|^2 + |\nabla f(x(t_0))| \cdot |\dot y(t_0)| \le 0.
\end{aligned}
$$

Wir bemerken, dass Gleichheit genau für $\dot x(t_0) = \dot y(t_0)$ gilt. □

Nimmt man als Norm die L^2-Norm der Normalengeschwindigkeit, so erhalten wir ein entsprechendes Resultat für den mittleren Krümmungsfluss. Wir arbeiten mit Funktionen, die sich nur auf kompakten Teilmengen unterscheiden, damit wir bei partieller Integration keine Randterme bekommen. Ein entsprechendes Resultat gilt aber auch für kompakte Lösungen des mittleren Krümmungsflusses.

Lemma 10.13. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u\colon \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}$ eine glatte graphische Lösung des mittleren Krümmungsflusses, es gelte also*

$$\dot u = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) \quad \text{in } \Omega \times [0,T).$$

Sei $w\colon \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}$ ebenfalls glatt mit $w(\cdot,t_0) = u(\cdot,t_0)$ für ein $t_0 > 0$ und gelte $u(x,t) = w(x,t)$ für alle t und alle $x \in \Omega \setminus K$ für eine kompakte Teilmenge $K \Subset \Omega$. Sei F so gewählt, dass $\dot w = \sqrt{1+|Dw|^2} \cdot F$ gilt. Nehme schließlich an, dass die L^2-Norm der Normalengeschwindigkeit F bezüglich des Oberflächenmaßes die L^2-Norm von H zur Zeit $t = t_0$ in K nicht übersteigt, dass also zur Zeit $t = t_0$

$$\int\limits_K F^2\, d\mu_w \le \int\limits_K H^2\, d\mu_u$$

gilt, wobei $d\mu_u \equiv \sqrt{1+|Du|^2}\, dx$ ist und $d\mu_w$ entsprechend definiert ist, so dass insbesondere $d\mu_u = d\mu_w \equiv d\mu$ zur Zeit $t = t_0$ gilt. Dann folgt

$$\left.\frac{d}{dt} \int\limits_K \sqrt{1+|Du|^2}\, dx \right|_{t=t_0} \le \left.\frac{d}{dt} \int\limits_K \sqrt{1+|Dw|^2}\, dx \right|_{t=t_0}.$$

Beweis. In der nachfolgenden Rechnung werten wir stets an der Stelle $t = t_0$ aus. Wir erhalten mit partieller Integration und Hölderscher Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int\limits_K \sqrt{1+|Dw|^2} &= \int\limits_K \frac{\langle Dw, D\dot w\rangle}{\sqrt{1+|Dw|^2}} = -\int\limits_K \dot w \cdot \operatorname{div}\left(\frac{\nabla w}{\sqrt{1+|Dw|^2}}\right) \\
&= -\int\limits_K F \cdot H \underbrace{\sqrt{1+|Dw|^2}\, dx}_{=d\mu} \\
&\ge -\left(\int\limits_K F^2\, d\mu\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_K H^2\, d\mu\right)^{1/2} \\
&\ge -\int\limits_K H^2\, d\mu = \frac{d}{dt} \int\limits_K \sqrt{1+|Du|^2},
\end{aligned}
$$

wobei wir für den letzten Schritt die ersten Schritte für w im Falle $F = H$ wiederholen. □

10.5. **Einige Evolutionsgleichungen.**

Lemma 10.14. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung der Evolutionsgleichung $\dot X = -F\nu$. Dann gilt für die Metrik*

$$\frac{d}{dt} g_{ij} = -2F h_{ij}.$$

Beweis. Wir differenzieren $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} g_{ij} =& \left\langle \frac{d}{dt} X_i, X_j \right\rangle + \left\langle X_i, \frac{d}{dt} X_j \right\rangle \\ =& \langle (-F\nu)_i, X_j \rangle + \langle X_i, (-F\nu)_j \rangle \\ =& -\langle F_i \nu + F\nu_i, X_j \rangle - \langle X_i, F_j \nu + F\nu_j \rangle \\ =& -\left\langle F h_i^k X_k, X_j \right\rangle - \left\langle X_i, F h_j^k X_k \right\rangle \\ =& -F h_i^k g_{kj} - F g_{ik} h_j^k \\ =& -2F h_{ij}.\end{aligned}$$

□

Lemma 10.15. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung der Evolutionsgleichung $\dot{X} = -F\nu$. Dann gilt für das Volumenelement $d\mu \equiv \sqrt{\det g_{ij}}\, dx$*

$$\frac{d}{dt} d\mu = -FH\, d\mu.$$

Beweis. Wir benutzen die Evolutionsgleichung für die Metrik und die Differentiationsregel für die Determinante und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} d\mu =& \frac{d}{dt} \sqrt{\det g_{ij}}\, dx \\ =& \frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}}} \det g_{ij} g^{kl} \frac{d}{dt} g_{kl}\, dx \\ =& -F\sqrt{\det g_{ij}} g^{kl} h_{kl}\, dx \\ =& -FH\, d\mu.\end{aligned}$$

□

Ohne einen formalen Beweis geben wir das Resultat an, wie sich das eingeschlossene Volumen unter einer Flussgleichung ändert. Für eine formale Herleitung wäre zunächst das eingeschlossenen Volumen zu definieren, dann lässt sich die eingeschlossene Menge beispielsweise wie folgt beschreiben: Sei Ω_0 die eingeschlossene Menge zum Zeitpunkt $t = 0$. Sei $\psi(\cdot, t)$ eine Familie von Diffeomorphismen auf ihr Bild in $\mathbb{R}^{n+1}$, so dass $\dot{\psi}(x,t)$ für sämtliche Randpunkte gerade mit $-F\nu$ übereinstimmt. Nun kann man die Volumenänderung von $\psi(\Omega, t)$ bestimmen. Details: Übung.

Bemerkung 10.16. Sei M_t eine Familie geschlossener zusammenhängender Hyperflächen, die die Evolutionsgleichung $\dot{X} = -H\nu$ erfüllt. Sei Ω_t die beschränkte Komponente von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M_t$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} |\Omega_t| = \int\limits_M -F\, d\mu.$$

Heuristik zur Formel. Infinitesimal wird ein kleines Flächenstück A mit Geschwindigkeit F nach innen verschoben. Dabei fällt in Physikernotation ein Zylinder mit Volumen $|A| \cdot F \cdot \Delta t$ weg. Aufintegriert über M erhalten wir genau die behautete Formel. □

10.6. **Die isoperimetrische Ungleichung.** Es gilt die folgende allgemeine Form der isoperimetrischen Ungleichung. Sie besagt, dass eine gewisse Oberfläche $|\partial\Omega|$ nötig ist, um ein gegebenes Volumen $|\Omega|$ einzuschließen.

Theorem 10.17 (Isoperimetrische Ungleichung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$n\omega_n^{1/n} |\Omega|^{\frac{n-1}{n}} \le |\partial\Omega|.$$

Dabei steht $|\Omega|$ für das Lebesguesche äußere Maß von Ω und $|\partial\Omega|$ für das $(n-1)$-dimensionale Hausdorffmaß von $\partial\Omega$.

Wir untersuchen die isoperimetrische Ungleichung nur im folgenden glatten Fall. Mit $\omega_3 = \frac{4\pi}{3}$ ergibt sich

Theorem 10.18. *Sei $(M_t)_{0\le t<T}$ mit $M_t \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Familie von glatten geschlossenen strikt konvexen Flächen, die sich unter dem mittleren Krümmungsfluss $\dot X = -H\nu$ bewegen. Sei $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega_t = M_t$ für alle $t \in [0,T)$. Gelte $|\Omega_t| \to 0$ für $t \nearrow T$. Dann gilt*

$$3\sqrt{4\pi}\cdot|\Omega_t| \le |M_t|^{3/2}$$

für alle $0 \le t < T$.

Beweis. Im eigentlichen Beweis benötigen wir zwei Ungleichungen. Die Höldersche Ungleichung liefert

$$\int\limits_{M_t} H\,d\mu \le \left(\int\limits_{M_t} 1\,d\mu\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{M_t} H^2\,d\mu\right)^{1/2}.$$

Weiterhin gilt für jede strikt konvexe zusammenhängende Fläche nach Korollar 9.4

$$\int\limits_{M_t} H^2\,d\mu = \int\limits_{M_t} (\lambda_1-\lambda_2)^2\,d\mu + \int\limits_{M_t} 4K\,d\mu \ge 4\int\limits_{M_t} K\,d\mu = 4\cdot\left|\partial B_1^3\right| = 4\cdot 3\omega_3 = 4\cdot 4\pi.$$

(Ist M_t nicht strikt konvex, so gilt ebenfalls die Abschätzung $\int H^2 \ge 16\pi$. Dies zeigt man, indem man über eine messbare Teilmenge N von M_t integriert, so dass $\nu\colon N \to \mathbb{S}^2$ bijektiv ist und $K|_N \ge 0$ gilt. Details: Übung.) Wir definieren

$$\Phi(t) := \frac{1}{3\sqrt{4\pi}}|M_t|^{3/2} - |\Omega_t| \equiv \frac{1}{3\sqrt{4\pi}}\left(\int\limits_{M_t} 1\,d\mu\right)^{3/2} - |\Omega_t|.$$

Es gilt

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{1}{2\sqrt{4\pi}}\left(\int\limits_{M_1} 1\,d\mu\right)^{1/2} \int\limits_{M_t} -H^2\,d\mu - \int\limits_{M_t} -H\,d\mu.$$

Ist $\int H \le 0$, so erhalten wir $\frac{d}{dt}\Phi(t) \le 0$. Sonst ist $\int H > 0$ und wir erhalten aufgrund der vorbereiteten Ungleichungen mit Hilfe von $\int H^2 = \sqrt{\int H^2}\cdot\sqrt{\int H^2}$

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) \le -\left(\int\limits_{M_t} H\,d\mu\right)\cdot \underbrace{\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\cdot\left(\int\limits_{M_t} H^2\,d\mu\right)^{1/2}}_{\ge 1} + \int\limits_{M_t} H\,d\mu \le 0.$$

Wegen $|\Omega_t| \to 0$ für $t \nearrow T$ gilt $\lim\limits_{t\nearrow T}\Phi(t) \ge 0$. Aus $\frac{d}{dt}\Phi(t) \le 0$ folgt $\Phi(t) \ge \Phi(s)$ für alle $t \le s$. Wir lassen nun $s \nearrow T$ und erhalten $\Phi(t) \ge 0$ für alle $t \in [0,T)$. Dies ist äquivalent zur behaupteten isoperimetrischen Ungleichung. $\square$

10.7. **Translatierende und homothetische Lösungen.** Im Kapitel über Minimalflächen haben wir bereits gesehen, dass Minimalflächen kritische Punkte des Oberflächenfunktionals sind. Solche Zusammenhänge gibt es auch für translatierende Lösungen oder homothetische Lösungen.

In diesem Kapitel wollen wir annehmen, dass alle auftretenden Hyperflächen glatt sind und die Integrale jeweils endlich ausfallen.

Wir zeigen zunächst nochmals eine Richtung des Resultats für Minimalflächen mit unseren jetzigen Methoden. Die andere Richtung folgt so nicht direkt, da wir hier nur normale Veränderungen betrachten.

Theorem 10.19. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche M, die ein kritischer Punkt des Funktionals $\int\limits_M 1\,d\mu$ ist. Dann ist X eine Minimalfläche, d. h. es gilt $H = 0$.*

Beweis. Sei $F\colon \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, deren stetige Fortsetzung auf $\Omega \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ einen kompakten Träger in $\Omega \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ habe und sei $Y\colon \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $Y(\cdot, t) = X$ und $\dot{Y} = -F\nu$. Diese gewöhnliche Differentialgleichung kann man lokal lösen und Y ist in beiden Variablen glatt. Da die Eigenschaft, Immersion zu sein, unter kleinen glatten Störungen erhalten bleibt, ist Y eine glatte Familie von glatten Immersionen, falls wir nur annehmen, dass $\varepsilon > 0$ klein genug ist.

Sei $M_t = Y(\Omega, t)$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{M_t} 1\,d\mu = \int\limits_{M_t} -FH\,d\mu.$$

Da X ein kritischer Punkt ist, verschwinden diese Ausdrücke. Für beliebige Funktionen F ist dies nur im Falle $H = 0$ möglich. $\square$

Theorem 10.20. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche M, die ein kritischer Punkt des Funktionals*

$$\int\limits_M e^{\lambda\langle X, \eta\rangle}\,d\mu$$

mit $\eta \in \mathbb{S}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist. Dann ist X eine unter dem mittleren Krümmungsfluss mit Geschwindigkeit λ in Richtung η translatierende Lösung (zu einer festen Zeit betrachtet).

Bemerkung 10.21.

(i) Wenn wir X als translatierende Lösung zu einer festen Zeit bezeichnen bedeutet dies folgendes: Zunächst machen wir aus X eine translatierende Lösung, betrachten also $X + t\lambda\eta$. Dann betrachten wir die mittlere Krümmung davon. Sie stimmt mit der von X überein. Nun sollte die Evolution unter dem mittleren Krümmungsfluss und die Translation übereinstimmen, also $\frac{d}{dt}(X + t\lambda\eta) = -H\nu$ gelten. Dies ist i. a. wegen tangentialer Diffeomorphismen nicht möglich. Daher spricht man auch dann von einer translatierenden Lösung, wenn nur die Normalenkomponenten übereinstimmen. Wir fordern also $\langle \lambda\eta, \nu\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}(X + t\lambda\eta), \nu\right\rangle = -H\langle \nu, \nu\rangle = -H$.

(ii) Wir haben hier gerade implizit eine Richtung als einen Vektor der Länge eins definiert.

Beweis von Theorem 10.20. Wir gehen wie bei Minimalflächen vor und erhalten

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{M_t} e^{\lambda\langle Y, \eta\rangle}\,d\mu = \int\limits_{M_t} e^{\lambda\langle Y, \eta\rangle}\,(\lambda\langle -F\nu, \eta\rangle - HF)\,d\mu.$$

Somit muss $0 = \lambda\langle \nu, \eta\rangle + H$ gelten. $\square$

Theorem 10.22. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche M, die ein kritischer Punkt des Funktionals*

$$\int\limits_M e^{\lambda\frac{|X|^2}{2}}\,d\mu$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ist. Dann ist M für $\lambda < 0$ eine unter dem mittleren Krümmungsfluss homothetisch schrumpfende und für $\lambda > 0$ eine homothetisch expandierende Lösung (zu einer festen Zeit).

Üblicherweise beschränkt man sich auf die Fälle $\lambda = \mp 1$.

Beweis. Gehe analog zu den Überlegungen zu Theorem 10.20 vor. Details: Übung. □

10.8. **Niveauflächenfluss.**
Es gibt zwei verschiedene Varianten, den mittleren Krümmungsfluss mit Hilfe von Niveauflächen darzustellen. Wir beschreiben in beiden Fällen nur den regulären Fall. Beide Resultate gelten auch für Teilmengen des $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Resultate gelten ebenso für andere Normalengeschwindigkeiten F, erfordern dann jedoch die genaue Angabe der Normalen, da in diesem Fall möglicherweise $-F\nu$, anders als $-H\nu$, nicht mehr unter $\nu \mapsto -\nu$ invariant ist.

Die erste Niveauflächenvariante ist die folgende:

Lemma 10.23. *Sei $w\colon \mathbb{R}^{n+1} \times [0,T) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\nabla w \neq 0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt
$$\dot{w} = \left(\delta^{\alpha\beta} - \frac{w^\alpha w^\beta}{|Dw|^2}\right) w_{\alpha\beta}.$$

(ii) Die Niveauflächen $M_t := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : w(x,t) = h\}$ erfüllen den mittleren Krümmungsfluss bis auf tangentiale Diffeomorphismen, also $\left\langle \dot{X}, \nu \right\rangle = -H$, für beliebige Niveaus $h \in \mathbb{R}$.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 10.24.

(i) Hinweis: Ist w eine Niveauflächenlösung des mittleren Krümmungsflusses, d. h. w erfüllt die Differentialgleichung aus Lemma 10.23, und ist X eine klassische Lösung des mittleren Krümmungsflusses, so rechnet man nach, dass $\frac{d}{dt} u(X(p,t),t) = 0$ für beliebige p gilt. Benutze dazu $\nu^\alpha = -\frac{w^\alpha}{|Dw|}$ sowie $H = \operatorname{div}(\nu) = -\sum\limits_{\alpha=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{w^\alpha}{|Dw|}\right)$.

(ii) w löst hier für alle Niveauflächen gleichzeitig den mittleren Krümmungsfluss.

(iii) Sei $w(x,t) := t + \frac{1}{2n}|x|^2$. Dann ist w eine Niveauflächenlösung des mittleren Krümmungsflusses, denn es gilt:
$$\begin{aligned} \dot{w} &= 1, \\ w_\alpha &= \frac{1}{n} x_\alpha, \\ w_{\alpha\beta} &= \frac{1}{n}\delta_{\alpha\beta}, \\ \left(\delta^{\alpha\beta} - \frac{w^\alpha w^\beta}{|Dw|^2}\right) w_{\alpha\beta} &= \left(\delta^{\alpha\beta} - \frac{x^\alpha x^\beta}{|x|^2}\right)\frac{1}{n}\delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{n}((n+1)-1) = 1. \end{aligned}$$
Die zugehörigen Hyperflächen M_t sind schrumpfende Sphären.

(iv) Sei w eine Niveauflächenlösung des mittleren Krümmungsflusses und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige C^2-Funktion. Dann ist $v := f \circ w$ in der Menge $Dv \neq 0$ eine Niveauflächenlösung des mittleren Krümmungsflusses. Details: Übung.

(v) Die Niveauflächengleichung für den mittleren Krümmungsfluss ist degeneriert parabolisch, ein Eigenwert verschwindet.

(vi) Viskositätslösungen erlauben es, Niveauflächenlösungen auch unabhängig von $Dw \neq 0$ zu definieren und zu untersuchen. Alternativ betrachtet man elliptische Regularisierungen der rechten Seite.

Wir kommen nun zur zweiten Variante, den mittleren Krümmungsfluss mit Hilfe von Niveauflächen darzustellen. Sie funktioniert nur im Falle $H > 0$ und arbeitet dafür mit zeitunabhängigen Funktionen.

Lemma 10.25. *Sei $u\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $Du \neq 0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt
$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = -\frac{1}{|\nabla u|}.$$
(ii) Die Niveauflächen $M_t := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : u(x) = t\}$ erfüllen den mittleren Krümmungsfluss bis auf tangentiale Diffeomorphismen.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 10.26.

(i) Wir können die Differentialgleichung wegen $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \frac{\Delta u}{|\nabla u|} - \frac{D^2u\langle\nabla u, \nabla u\rangle}{|\nabla u|^3}$ auch als
$$\Delta u - \frac{D^2u\langle\nabla u, \nabla u\rangle}{|\nabla u|^2} = -1$$
schreiben.

(ii) Hinweis: Ist u eine Niveauflächenlösung des mittleren Krümmungsflusses, d. h. u erfüllt die Differentialgleichung aus Lemma 10.25, und ist X eine klassische Lösung des mittleren Krümmungsflusses, so rechnet man nach, dass $\frac{d}{dt}u(X(p,t)) = 1$ für beliebige p gilt.

(iii) $u(x) := -\frac{1}{2n}|x|^2$ ist eine Niveauflächenlösung des mittleren Krümmungsflusses, denn es gilt:
$$\begin{aligned} u_\alpha &= -\frac{1}{n}x_\alpha, \\ \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) &= \operatorname{div}\left(-\frac{x}{|x|}\right) = -\frac{(n+1)-1}{|x|} = -\frac{n}{|x|} = -\frac{1}{|\nabla u|}. \end{aligned}$$
Diese Lösung beschreibt Sphären, die für $t \nearrow 0$ zu einem Punkt konvergieren.

(iv) Die Differentialgleichung hier ist degeneriert elliptisch und wird ebenenfalls mit Hilfe von Viskositätslösungen oder elliptischer Regularisierung untersucht.

(v) Übung: Welche Evolutionsgleichung gehört zur Differentialgleichung
$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = |\nabla u|?$$
Bestimme eine (rotationssymmetrische) Lösung dieser Differentialgleichung.

Bemerkung 10.27. Beide Versionen von Niveauflächenlösungen ("level-set solutions") sind für die Untersuchung von Lösungen wichtig, die Singularitäten entwickeln. Beispiel: Eine "neck-pinch"-Singularität.

11. Gewöhnliche Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten

Wir wiederholen zunächst ein Resultat aus Analysis III.

Theorem 11.1. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine geschlossene C^2-Untermannigfaltigkeit. Sei $V\colon \mathbb{R}^{n+1} \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein C^k-Vektorfeld, $k \geq 1$, das in M tangential zu M ist, d. h. für $x \in M$ gilt $V(x,t) \in T_xM$. Sei $x_0 \in M$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*
$$\begin{cases} \dot\alpha(t) = V(\alpha(t),t), & t \in [0,T], \\ \alpha(0) = x_0 \end{cases}$$
eine C^{k+1}-Lösung $\alpha\colon [0,T] \to M$. α ist die einzige $C^1([0,T], \mathbb{R}^{n+1})$-Lösung dieses Anfangswertproblems.

Beweis. Sei d (lokal) die signierte Distanzfunktion zu M. Da M von der Klasse C^2 ist, ist (in einer Tubenumgebung U von M) $d \in C^2$ nach Lemma 8.2. Wir setzen $\nu := \frac{\nabla d}{|\nabla d|}$. Es gilt $\nu \in C^1$. Wir definieren in $U \times [0, T]$ das C^1-Vektorfeld

$$\tilde{V} := V - \langle V, \nu\rangle \nu.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \tilde{V}(\alpha(t), t), \quad t \in [0, T], \\ \alpha(0) = x_0 \end{cases}$$

eine C^2-Lösung $\alpha \colon [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ für ein $\varepsilon > 0$.

Wir möchten nun zeigen, dass die Lösung auf M bleibt. Es folgt für $\alpha(t) \in U$

$$\frac{d}{dt} d(\alpha(t)) = \langle \nabla d(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t)\rangle = \left\langle \nabla d(\alpha(t)), \tilde{V}(\alpha(t), t)\right\rangle = 0.$$

Also gilt $d(\alpha(t)) = 0$, solange $\alpha(t) \in U$ gilt. Damit ist $\alpha(t) \in M$ für $\alpha(t) \in U$. Insbesondere folgt hieraus, dass die Menge aller $t \in [0, \varepsilon)$, für die $\alpha(t) \in M$ gilt, (relativ) offen ist. Aufgrund der Abgeschlossenheit von M ist sie aber auch relativ abgeschlossen. Schließlich ist $\alpha(0) = x_0 \in M$. Da $[0, \varepsilon)$ zusammenhängend ist, gilt somit $\alpha(t) \in M$ für alle $t \in [0, \varepsilon)$.

Da V beschränkt ist, lässt sich α mit Hilfe der äquivalenten Integralformulierung auf $[0, \varepsilon]$ und wie oben mit Startzeit $t = \varepsilon$ statt $t = 0$ über $t = \varepsilon$ hinaus fortsetzen. Durch Betrachten des maximalen Existanzintervalles sehen wir, dass α auf ganz $[0, T]$ existiert und $\alpha(t) \in M$ für alle $t \in [0, T]$ erfüllt.

Auf $M \times [0, T]$ gilt $\tilde{V} = V$. Somit löst $\alpha(t)$ auch das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = V(\alpha(t), t), \quad t \in [0, T], \\ \alpha(0) = x_0. \end{cases}$$

Wegen $V \in C^1$ ist α die einzige C^1-Lösung dieses Anfangswertproblems. Die Regularität von α folgt aus der von V. □

Bemerkung 11.2.

(i) Die obige Überlegung lässt sich auch auf höhere Kodimensionen übertragen, wenn man eine vektorwertige Funktion Φ betrachtet.
(ii) Alternativ kann man M mit Hilfe eines Diffeomorphismusses geradebiegen.
(iii) Ist V nur auf M definiert, so kann man zunächst V in eine Umgebung fortsetzen. Da die Lösung auf M bleibt, ist sie unabhängig von der Wahl der Fortsetzung.
(iv) Ist V auf $M \times \mathbb{R}$ definiert, so überlegt man sich leicht, dass auch α auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.
(v) Verallgemeinere das Resultat auf nichtkompakte Untermannigfaltigkeiten M, so dass $M \cap \overline{B}_R$ für jedes $R > 1$ kompakt ist.
(vi) Formuliere und beweise ein Resultat über den maximalen Fluss ähnlich wie im Euklidischen.

Beweis. Übung. □

Die folgenden Überlegungen entsprechen dem, was wir schon im Kapitel 7 für die Ableitung gemacht haben.

Definition 11.3. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit und $f \colon M \to \mathbb{R}^k$ eine Funktion. Dann heißt f von der Klasse C^k, falls es eine C^k-Fortsetzung $\tilde{f} \colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^k$ gibt.

Bemerkung 11.4. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit mit $k \geq 2$ und $f\colon M \to \mathbb{R}^k$ eine Funktion. Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen. Sei $\varphi\colon M \cap U \to \mathbb{R}^m$ eine C^k-Karte von M. Dann gilt $f \in C^k$ genau dann, wenn $f \circ \varphi^{-1} \in C^k$ ist.

Beweis. Übung. □

Definition 11.5. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann definieren wir den Gradienten von f in x, $\nabla^M f(x)$, als orthogonale Projektion von $\nabla_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x)$ auf $T_xM \subset \mathbb{R}^{n+m}$ für eine beliebige C^1-Fortsetzung $\tilde{f}$ von f.

Bemerkung 11.6.
(i) $\nabla^M f$ ist wohldefiniert, d. h. insbesondere von der Wahl der Fortsetzung von f unabhängig.
(ii) Sei $N_1, \ldots, N_n$ eine Orthonormalasis von $(T_xM)^\perp$, so ist
$$\nabla^M f(x) = \nabla\tilde{f}(x) - \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla\tilde{f}(x), N_i \right\rangle N_i.$$
Insbesondere gilt also in Kodimension eins
$$\nabla^M f(x) = \nabla\tilde{f}(x) - \left\langle \nabla\tilde{f}(x), \nu(x) \right\rangle \nu(x).$$
(iii) Ist $\{T_i\}_{1\leq i\leq n}$ eine Basis von T_xM, so gilt
$$\nabla^M f(x) = \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla^M f, T_i \right\rangle T_i.$$

Beweis. Übung. □

Definition 11.7. Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^1.
(i) Dann heißt $x_0 \in M$ kritischer Punkt von f, falls $\nabla^M f(x_0) = 0$ gilt.
(ii) Ein kritischer Punkt $x_0 \in M$ heißt isoliert, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass kein $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap M$ ein kritischer Punkt ist.
(iii) $\star$ Ist jeder kritische Punkt isoliert, so sagen wir, dass f nur isolierte kritische Punkte besitzt.

Das folgende Lemma beschreibt eine Situationen, in der kritische Punkte isoliert sind.

Lemma 11.8. *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine lokal strikt konvexe C^2-Untermannigfaltigkeit. Sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^{n+1}$ gegeben. Dann besitzt f auf M nur isolierte kritische Punkte.*

Beweis. Sei $x_0 \in M$ ein kritischer Punkt von f auf M. Dann gilt
$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^M f(x_0) = \nabla f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), \nu(x_0)\rangle \nu(x_0) \\ &= e_{n+1} - \langle e_{n+1}, \nu(x_0)\rangle \nu(x_0). \end{aligned}$$
Also ist
$$1 = |e_{n+1}| = |\langle e_{n+1}, \nu(x_0)\rangle \nu(x_0)| = |\langle e_{n+1}, \nu(x_0)\rangle|$$
und somit gilt $\nu(x_0) = \pm e_{n+1}$. Wir nehmen ohne Einschränkung $x_0 = 0$ und $\nu(x_0) = -e_{n+1}$ an. Dann gilt in einer Umgebung U des Ursprungs $M = \operatorname{graph} u$ für eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $Du(0) = 0$ und $D^2u(0) \succ 0$. Es folgt $Du(x) \neq 0$ für $x \in U$ mit $x \neq 0$. Für solche Punkte x gilt daher $\nu(x) \neq \pm e_{n+1}$. Aufgrund der obigen Überlegungen ist x also kein kritischer Punkt von f. Also ist x_0 ein isolierter kritischer Punkt von f auf M. □

Das folgende Resultat gilt natürlich in analoger Weise für $t \to -\infty$. Wir folgen [13].

Theorem 11.9. *Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine geschlossene C^2-Untermannigfaltigkeit. Sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ von der Klasse $C^{1,1}$ und f besitze nur isolierten kritische Punkte. Sei $\alpha \equiv \alpha_x\colon \mathbb{R} \to M$ eine Lösung von $\dot\alpha(t) = -\nabla^M f(\alpha(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_x(0) = x \in M$.*

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) *Es existiert $x_0 \in M$ mit $x_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t)$.*
(ii) *Es gilt $\nabla^M f(x_0) = 0$.*
(iii) *$t \mapsto f(\alpha(t))$ ist monoton fallend.*
(iv) *Ist x_0 ein striktes lokales Minimum von $f|_M$, so ist*
$$\left\{x \in M\colon \lim_{t\to\infty} \alpha_x(t) = x_0\right\}$$
relativ offen in M.

Beweis.

(1) Aufgrund der Kompaktheit von M existiert die Lösung α für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\alpha(t) \in M$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nochmals aufgrund der Kompaktheit gibt es ein $x_0 \in M$ und eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $t_k \to \infty$ für $k \to \infty$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha(t_k) = x_0$.

(2) Wir behaupten, dass $\nabla^M f(x_0) = 0$ gilt: Da $\dot\alpha(t) \in T_{\alpha(t)}M$ gilt, folgt
$$\begin{aligned} f(\alpha(t)) - f(\alpha(0)) &= \int_0^t \frac{d}{dt} f(\alpha(t))\,dt \\ &= \int_0^t \langle \nabla f(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle\,dt \\ &= \int_0^t \left\langle \nabla^M f(\alpha(t)), -\nabla^M f(\alpha(t))\right\rangle\,dt \\ &= -\int_0^t \left|\nabla^M f(\alpha(t))\right|^2\,dt. \end{aligned}$$
Da M kompakt ist, ist f beschränkt. Wäre $\nabla^M f(x_0) \neq 0$, so gäbe es eine Umgebung U von x_0 (in M) mit $\left|\nabla^M f(x_0)\right| \ge \varepsilon > 0$. Sei $\delta > 0$ mit $B_{2\delta}(x_0) \cap M \subset U$. Da $\overline{U}$ (und sogar M) kompakt ist, gilt $\left|\nabla^M f(x)\right| \le M$ für alle $x \in \overline{U}$. Für große $k \in \mathbb{N}$ gilt $\alpha(t_k) \in B_\delta(x_0)$. Wegen $|\dot\alpha(t)| \le M$ für $\alpha(t) \in \overline{U}$ folgt
$$|\alpha(t) - \alpha(t_k)| \le M \cdot |t - t_k|$$
für $\alpha([t_k, t]) \subset \overline{U}$. Die Inklusion gilt zunächst für $t \approx t_k$ aus Stetigkeitsgründen, dann aber aufgrund der obigen Abschätzung auch mindestens bis $|t - t_k| = \frac{\delta}{M}$. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir ohne Einschränkung $t_{k+1} > t_k + 2\frac{\delta}{M}$, $\alpha(t_k) \in B_\delta(x_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t_0 \ge \frac{\delta}{M}$ annehmen. Damit sind die Intervalle $\left(t_k - \frac{\delta}{M}, t_k + \frac{\delta}{M}\right) \subset \mathbb{R}_+$ disjunkt und wir erhalten
$$\begin{aligned} -\infty &< f(\alpha(t_k)) - f(\alpha(0)) \\ &= -\int_0^{t_k} \left|\nabla^M f(\alpha(t))\right|^2\,dt \end{aligned}$$

$$\leq -\sum_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{t_k-\frac{\delta}{M}}^{t_k+\frac{\delta}{M}} \left|\nabla^M f(\alpha(t))\right|^2 \, dt$$

$$\leq -\sum_{k\in\mathbb{N}} 2\frac{\delta}{M}\varepsilon^2 = -\infty.$$

Widerspruch. Somit gilt $\nabla^M f(x_0) = 0$.

(3) Es gilt $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = x_0$: Falls nicht, so existiert, da eine Teilfolge trotzdem gegen x_0 konvergiert, für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ eine Folge $t_k \to \infty$ mit

$$|\alpha(t_{2k}) - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |\alpha(t_{2k+1}) - x_0| > \varepsilon.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es somit eine neue Folge $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $t_{2k} < \tau_k < t_{2k+1}$ und $|\alpha(t_k) - x_0| = \varepsilon$. Da $\partial B_\varepsilon(x_0) \cap M$ kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge davon; ohne Einschränkung gelte also $\alpha(\tau_k) \to x_\varepsilon \in \partial B_\varepsilon(x_0)$ für $k \to \infty$. Wie oben erhalten wir $\nabla^M f(x_\varepsilon) = 0$.

Wiederholen wir nun dieses Argument, so erhalten wir eine Folge $\varepsilon_k \searrow 0$ und Punkte $x_{\varepsilon_k} \in \partial B_{\varepsilon_k}(x_0)$ mit $\nabla^M f(x_{\varepsilon_k}) = 0$. Somit ist x_0 kein isolierter kritischer Punkt. Widerspruch.

(4) Da x_0 ein striktes lokales Minimum ist, gibt es $\varepsilon > 0$, so dass f in $B_{2\varepsilon}(x_0) \cap M$ nur den kritischen Punkt x_0 besitzt und $f(x) > f(x_0)$ für alle $x \in B_{2\varepsilon}(x_0) \cap M$ gilt. Durch Verkleinern von $\varepsilon > 0$ können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\partial B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$ gilt. Wir setzen

$$h := \inf_{x\in\partial B_\varepsilon(x_0)\cap M} f(x).$$

Das Infimum wird aufgrund der Kompaktheit angenommen und es gilt $h > f(x_0)$. Wir definieren weiter

$$M^h := \{x \in M \cap B_\varepsilon(x_0) \colon f(x) < h\}.$$

Sei $x_1 \in M^h$ beliebig. Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot\alpha(t) = -\nabla^M f(\alpha(t)), & t \geq 0, \\ \alpha(0) = x_1. \end{cases}$$

Da α einen negativen Gradientenfluss erfüllt, gilt $f(\alpha(t)) < h$ für alle $t \geq 0$. Wir behaupten, dass $\alpha(t) \in M^h$ für alle $t \geq 0$ gilt. Sonst gäbe es ein minimales $t_0 > 0$ mit $\alpha(t_0) \in \partial B_\varepsilon(x_0) \cap M$, da α wegen $f(\alpha(t)) < h$ nie den Teil des Randes mit $f = h$ erreichen kann. Nach Definition von h wäre dann $f(\alpha(t_0)) \geq h$. Widerspruch.

Aufgrund der obigen Beweisteile existiert $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) =: x_\infty$. Da α in M^h bleibt und x_∞ ein kritischer Punkt von $f|_M$ ist, folgt $\alpha(t) \to x_0$ für $t \to \infty$. Die Menge M^h ist also eine offene Umgebung von x_0 und alle Lösungen von $\dot\alpha(t) = -\nabla^M f(\alpha(t))$, die $\alpha(t_0) \in M^h$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ erfüllen, konvergieren für $t \to \infty$ gegen x_0.

Sei $y \in M$ ein weiterer Punkt mit $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha_y(t) = x_0$, wobei wir mit α_y eine Lösung mit $\alpha(0) = \alpha_y(0) = y$ bezeichnet haben. Dann gibt es ein $T \geq 0$ mit $\alpha_y(T) \in M^h$. Da Lösungen stetig vom Anfangswert abhängen und M^h (relativ) offen ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in B_\delta(y)$ auch $\alpha_z(T) \in M^h$ gilt. Daraus folgt $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha_z(t) = x_0$. Wir erhalten die behauptete Offenheit. $\square$

12. Globale Konvexität

Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass lokal strikt konvexe C^2-Untermannigfaltigkeiten auch global konvex sind. Beachte, dass solch ein Resultat für immersierte Mannigfaltigkeiten schon im Fall $n = 1$ i. a. falsch ist.

Zur Erinnerung:

Definition 12.1. $\star$ Sei $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Menge. Dann heißt K (global) konvex, falls es für jeden Punkt $x_0 \in \partial K$ eine affin lineare Funktion f mit $f(x_0) = 0$ und $K \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) \le 0\}$ gibt.

Wir folgen nochmals [13].

Theorem 12.2. *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine zusammenhängende lokal strikt konvexe C^2-Untermannigfaltigkeit. Dann ist M^n (global) konvex.*

Beweis im Fall $n \ge 2$. Sei M nicht global konvex. Dann gibt es einen Punkt $x_0 \in M$, so dass für jede affin lineare Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = 0$ auch ein Punkt $x \in M$ mit $f(x) < 0$ existiert (wir wenden die Definition auf $-f$ an). Wähle nun eine affin lineare Funktion f mit $f(x_0) = 0$ und $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} : f(y) = 0\} = T_{x_0}M$, so dass f in x_0 ein lokales Minumum besitzt (benutze dazu die lokale Normalform). Ohne Einschränkung dürfen wir nach einer Rotation annehmen, dass $f(y) = y^{n+1}$ gilt. Nach Annahme gibt es $x \in M$ mit $f(x) < 0$. Da M kompakt ist, besitzt $f|_M$ ein Minimum in einem Punkt x_1 mit $f(x_1) < f(x) < f(x_0) = 0$. Seien $x_1, \ldots, x_N$ alle lokalen Minima von f. Dann gilt $N \ge 2$. Nach Lemma 11.8 sind alle diese kritischen Punkte isolierte kritische Punkte von f. Daher sind es auch nur endlich viele. Seien U_i die nach Theorem 11.9 in M relativ offenen Mengen, die aus den Punkten $x \in M$ bestehen, so dass die Lösungen

$$\begin{cases} \dot\alpha(t) = -\nabla^M f(\alpha(t)), & t \ge 0, \\ \alpha(0) = x \end{cases}$$

für $t \to \infty$ gegen x_i konvergieren. Sei Z die nach Lemma 11.8 endliche Menge der lokalen Maxima von $f|_M$. Da Lösungen α genau dann gegen einen Punkt in Z konvergieren, wenn sie in Z starten, gilt

$$M = Z \cup \bigcup_{i=1}^{N} U_i$$

und alle diese $N + 1$ Mengen sind paarweise disjunkt. Wegen $n \ge 2$ ist $M \setminus Z$ zusammenhängend, sogar wegzusammenhängend (betrachte eine lokale Graphendarstellung um die isolierten Punkte in Z). Somit haben wir $M \setminus Z$ mit $\bigcup\limits_{i=1}^{N} U_i$ als disjunkte Vereinigung von offenen nichtleeren Mengen dargestellt. (Die Mengen U_i sind sogar wegzusammenhängend.) Wegen $N \ge 2$ erhalten wir einen Widerspruch dazu, dass $M \setminus Z$ zusammenhängend ist. □

13. Geodätische

13.1. **Geodätische auf Untermannigfaltigkeiten.**

Definition 13.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Untermannigfaltigkeit. Sei $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Kurve mit $\alpha(t) \in M$ für alle $t \in (a, b)$. Dann heißt α Geodätische, falls

$$\ddot\alpha(t) \in \left(T_{\alpha(t)}M\right)^\perp$$

für alle $t \in (a, b)$ gilt.

Bemerkung 13.2.

(i) In der Definition haben wir die Dimension von M nicht vorgegeben. Auch $M = \mathbb{R}^{n+1}$ ist möglich. Wir schreiben auch $\alpha : (a,b) \to M$. Manchmal betrachten wir auch Geodätische auf halb offenen oder abgeschlossenen Intervallen.

(ii) Physikalische Interpretation: Beschreibt $\alpha(t)$ die Lage eines Massenpunktes auf M zur Zeit t, so ist $m\ddot{\alpha} = F$ die auf den Massenpunkt wirkende Kraft. Die Bedingung $\ddot{\alpha}(t) \in \left(T_{\alpha(t)}M\right)^{\perp}$ besagt also, dass keine tangentialen Kräfte auf den Massenpunkt wirken. In normaler Richtung wirken die Zwangskräfte, die den Massenpunkt auf M halten.

Im Falle $M = \mathbb{R}^{n+1}$ lautet die Bewegungsgleichung $\ddot{\alpha} = 0$ und beschreibt die Bewegung eines Massenpunktes, auf den keine Kräfte wirken.

(iii) Geometrische Folgerung: Definiere $\alpha(t) := x_0 + t(x_1 - x_0)$ für $x_0 \neq x_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $t \in [0,1]$. Dann ist α eine Geodätische mit Länge $L(\alpha) = |x_1 - x_0|$. Sei $y : [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine weitere C^1-Kurve mit $y(0) = x_0$ und $y(1) = x_1$. Dann gilt aufgrund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} L(y) &= \int_0^1 |\dot{y}(t)|\,dt \ge \int_0^1 \frac{\langle \dot{y}(t), x_1 - x_0\rangle}{|x_1 - x_0|}dt \\ &= \frac{\langle y(1), x_1 - x_0\rangle - \langle y(0), x_1 - x_0\rangle}{|x_1 - x_0|} \\ &= \frac{|x_1 - x_0|^2}{|x_1 - x_0|} = |x_1 - x_0| = L(\alpha). \end{aligned}$$

Somit ist y die Kürzeste C^1-Kurve, die x_0 und x_1 verbindet. Wir werden später sehen, dass Geodätische, eingeschränkt auf kleine Intervalle, ebenfalls die Länge zwischen ihren Endpunkten minimieren. Wir sagen daher, dass Geodätische lokal Kürzeste sind.

Proposition 13.3. *Eine Geodätische ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert.*

Beweis. Es gilt $\frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)|^2 = 2\langle\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)\rangle = 0$. □

Beispiele 13.4.

(i) Seien $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\alpha(t) = u + vt \in M$ für alle $t \in (a,b)$. Dann ist α ein Geradensegment und eine Geodätische.

(ii) Seien $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$ orthonormale Vektoren. Dann ist der Großkreis $\alpha : (a,b) \to \mathbb{S}^n$ mit $\alpha(t) = \cos t \cdot u + \sin t \cdot v$ eine Geodätische.

(iii) Sei $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ ein Zylinder. Dann ist für beliebiges $h \in \mathbb{R}$ die Spiralkurve $\alpha : \mathbb{R} \to M$, $t \to (\cos t, \sin t, ht)$ eine Geodätische, da

$$\ddot{\alpha}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \in \left(T_{\alpha(t)}M\right)^{\perp}$$

gilt. Wickeln wir den Zylinder auf die Ebene $\mathbb{R}^2$ ab, so wird aus der Spiralkurve α eine Gerade, also ebenfalls eine Geodätische. Es gilt allgemein, dass Isometrien $\Phi \colon M \to \tilde{M}$ Geodätische auf Geodätische abbilden. Dabei ist es irrelevant, wie M im Raum liegt. Wir sagen daher, dass die Eigenschaft, Geodätische zu sein, nur von der inneren Geometrie von M, also der Metrik, abhängt. Solche Dinge werden wir auch für abstrakte Mannigfaltigkeiten untersuchen. Weitere Beispiele, die nur von der inneren Geometrie abhängen, sind die Länge einer Kurve oder der Abstand zwischen zwei Punkten.

(iv) Auf dem Ellipsoid

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

ist jede proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve, die in einer der Koordinatenebenen $\{x=0\}$, $\{y=0\}$ oder $\{z=0\}$ verläuft, eine Geodätische.

Sei E eine der Koordinatenebenen. Aus Symmetriegründen gilt $\nu(\alpha(t)) \in E$ für alle t. Die Vektoren $\dot\alpha(t)$ und $\nu(\alpha(t))$ bilden somit eine Orthonormalbasis von E. Aus $\alpha(t) \in E$ für alle t folgt auch $\ddot\alpha(t) \in E$. Schließlich gilt $\langle \ddot\alpha(t), \dot\alpha(t)\rangle = \frac{d}{dt}|\dot\alpha(t)|^2 = 0$. Daher ist $\ddot\alpha(t)$ proportional zu $\nu(x(t))$.

(v) Bestimme auf dem durch die Gleichung
$$\beta(x^2+y^2) = z^2$$
im $\mathbb{R}^3$ definierten Kegel Geodätische, die keine Geradenstücke sind. Benutze dabei eine lokale Isometrie zu $\mathbb{R}^2$ für eine Vermutung über das Aussehen dieser Geodätischen. (Details: Übung.)

Theorem 13.5. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Untermannigfaltigkeit. Seien $p \in M$ und $V \in T_pM$. Dann gibt es genau eine maximale Geodätische α mit $\alpha(0) = p$ und $\dot\alpha(0) = V$.*

Ohne explizite Regularitätsangabe gehen wir stets davon aus, dass alle Daten regulär sind.

Beweis. Wir leiten zunächst eine gewöhnliche Differentialgleichung für α her. Ist α eine Geodätische auf einer Hyperfläche, so gilt
$$\ddot\alpha(t) = \langle \ddot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle\, \nu(\alpha(t)).$$
Aus $\langle \dot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle = 0$ erhalten wir
$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\langle \dot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle \\
&= \langle \ddot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle + \left\langle \dot\alpha(t), \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t))\right\rangle \\
&= \langle \ddot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle + \langle \dot\alpha(t), D\nu(\alpha(t))\langle\dot\alpha(t)\rangle\rangle.
\end{aligned}$$
Oben eingesetzt erhalten wir also
$$\ddot\alpha(t) = -\langle \dot\alpha(t), D\nu(\alpha(t))\langle\dot\alpha(t)\rangle\rangle \cdot \nu\left((\alpha(t)\right). \tag{13.1}$$
Sei nun (lokal) $M = f^{-1}(\{0\})$ eine Niveauflächendarstellung. Wir setzen ν vermöge $\nu = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ in eine Umgebung von M fort. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf besitzt die obige Differentialgleichung für α eine eindeutig bestimmte maximale Lösung α für die Anfangswerte $\alpha(0) = p$ und $\dot\alpha(0) = V$. Daher folgt die Behauptung, falls $\alpha(t) \in M$ für alle t gilt.

Es gilt
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) &= \langle \nabla f(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle \\
&= \langle f(\alpha(t)), \nu(\alpha(t)\rangle \cdot \langle \nu(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle \\
&= |\nabla f(\alpha(t))| \cdot \langle \nu(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle.
\end{aligned}$$
Wir definieren $g(t) := \langle \nu(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle$ und erhalten
$$\dot g(t) = \langle D\nu(\alpha(t))\langle\dot\alpha(t)\rangle\rangle + \langle \nu(\alpha(t)), \ddot\alpha(t)\rangle = 0$$
aufgrund der Differentialgleichung für α. Somit folgt $g(t) = g(0) = 0$ für alle t und daraus $\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = 0$ sowie $f(\alpha(t)) = f(\alpha(0)) = 0$. Daher gilt $\alpha(t) \in M$ für alle t. □

Beispiele 13.6. In den folgenden Beispielen verzichten wir auf die Angabe der Parametrisierungen und geben ähnlich wie bei Hyperflächen nur das Bild an.

(i) Auf $\mathbb{S}^n$ sind alle Geodätischen Teile von Großkreisen, da für beliebige $p \in \mathbb{S}^n, V \in T_p\mathbb{S}^n$ ein Großkreis, also ein Geodätische, mit diesen Anfangsdaten existiert.

(ii) Mit einer analogen Begründung erhalten wir, dass auf dem Zylinder $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ sämtliche Geodätischen durch Spiralkurven, durch zu Kreisen $\mathbb{S}^1 \times \{x\}$ oder durch zu Geraden $\{p\} \times \mathbb{R}$ degenerierten Spiralkurven gegeben sind.

Definition 13.7. Eine Untermannigfaltigkeit heißt geodätisch vollständig, wenn jede maximale Geodätische auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Beispiele 13.8.

(i) $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, und $\mathbb{R}^{n+1}$ sind geodätisch vollständig. Wir kennen alle Geodätischen und wissen, dass sie auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

(ii) $\mathbb{S}^n \backslash \{p\}$ für ein beliebiges $p \in \mathbb{S}^n$ ist nicht geodätisch vollständig, da jede maximale Geodätische durch $-p$ ein Großkreis ist, der auch durch p läuft.

(iii) $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ ist nicht geodätisch vollständig.

(iv) $B_1(0)$ ist nicht geodätisch vollständig.

(v) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2, z \neq 0\}$ ist nicht geodätisch vollständig, da $\alpha(t) = (t, 0, t)$, $t > 0$, eine maximale Geodätische ist.

Theorem 13.9. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei M als metrischer Raum mit der von der euklidischen Metrik induzierten Metrik vollständig. Dann ist M geodätisch vollständig.*

Beweis. Sei $\alpha \colon I \to M$ eine maximale Geodätische. Wir dürfen nach Umparametrisierung vermöge $\alpha(\lambda t), \lambda > 0$, ohne Einschränkung annehmen, dass α nach der Bogenlänge parametrisiert ist: $|\dot{\alpha}(t)| \equiv 1$.

Angenommen es gilt $\sup I =: T < \infty$.

Aus $|\dot{\alpha}(t)| = 1$ folgt

$$|\alpha(t) - \alpha(s)| \leq \int\limits_s^t |\dot{\alpha}(\tau)|\, d\tau = |t - s|.$$

Daher existiert

$$p \colon = \lim_{t \nearrow T} \alpha(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Da M als metrischer Raum vollständig ist, folgt auch $p \in M$. Mit der Differentialgleichung (13.1) und $|\dot{\alpha}(t)| = 1$ erhalten wir für große $s < t < T$

$$\begin{aligned}|\dot{\alpha}(t) - \dot{\alpha}(s)| = &\left| \int\limits_s^t \ddot{\alpha}(\tau)\, d\tau \right| \leq \int\limits_s^t |\ddot{\alpha}(\tau)|\, d\tau = \int\limits_s^t |\langle \dot{\alpha}(\tau), D\nu(\alpha(\tau))\langle \dot{\alpha}(\tau)\rangle\rangle|\, d\tau \\ &\leq \int_s^t |D\nu(\alpha(\tau))d\tau \leq \sup_{B_\varepsilon(p)\cap M} |D\nu| \cdot |t - s|,\end{aligned}$$

falls $\alpha(\tau) \in B_\varepsilon(p)$ für alle $\tau > s$ gilt. Wir nehmen nun an, dass $\varepsilon > 0$ so klein gewählt ist, dass $\sup\limits_{B_\varepsilon(p)\cap M} |D\nu| < \infty$ gilt. Wir erhalten daraus, dass auch

$$V := \lim_{t \nearrow T} \dot{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

existiert. Im Grenzübergang überlebt auch die Orthogonalitätsbedingung

$$\langle V, \nu(p)\rangle = \lim_{t \nearrow T} \langle \dot{\alpha}(t), \nu(\alpha(t))\rangle = 0$$

Somit gilt $V \in T_pM$.

Sei $\beta\colon [0,\delta) \to M$ eine Lösung der Differentialgleichung (13.1) mit Anfangswerten $\beta(0) = p$ und $\dot\beta(0) = V$. Die Differentialgleichung (13.1) ist wegen

$$\dot\alpha(t) - \dot\alpha(s) = \int\limits_s^t \ddot\alpha(\tau)\,d\tau$$

äquivalent zur Integralgleichung

$$\dot\alpha(t) - \dot\alpha(s) = -\int\limits_s^t \langle\dot\alpha(\tau), D\nu(\alpha(\tau))\langle\dot\alpha(\tau)\rangle\rangle \cdot \nu(\alpha(\tau))\,d\tau.$$

Zunächst ist

$$\gamma(t) := \begin{cases} \alpha(t), & t < T,\\ \beta(t-T), & T \le t < T+\delta \end{cases}$$

eine C^1-Kurve auf M. Damit lösen nicht nur α und β, sondern auch γ die Integralgleichung, insbesondere nahe $t = T$. Daher ist auch $\gamma \in C^2$ und γ löst (13.1). Daher war $T < \infty$ nicht maximal. Widerspruch. Somit ist M geodätisch vollständig. □

Korollar 13.10. *Sei $M \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine geschlossene n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist M geodätisch vollständig.*

13.2. **Kovariante Ableitung, Parallelverschiebung.** Wir nehmen wieder an, dass alle betrachteten Objekte glatt sind.

Definition 13.11. Sei M eine reguläre Hyperfläche. Sei $\alpha : I \to M$ eine Kurve.

(i) Dann heißt $X : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein (tangentiales) Vektorfeld längs α, falls

$$X(t) \in T_{\alpha(t)}M$$

für alle $t \in I$ gilt.

(ii) Die kovariante Ableitung von X längs α ist das (tangentiale) Vektorfeld

$$\frac{D}{dt}X(t) = \frac{dX}{dt}(t) - \left\langle \nu(\alpha(t)), \frac{dX}{dt}(t)\right\rangle \nu(\alpha(t)),$$

also die Projektion von $\dot X$ auf $T_{\alpha(t)}M$.

Beispiel 13.12. α ist genau dann eine Geodätische, wenn $\frac{D}{dt}\dot\alpha(t) = 0$ gilt.

Lemma 13.13. *Für die kovariante Ableitung von (tangentialen) Vektorfeldern X, Y und für eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ gelten*

(i) $\frac{D}{dt}(X+Y) = \frac{D}{dt}X + \frac{D}{dt}Y$,

(ii) $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{d}{dt}fX + f\frac{D}{dt}X$,

(iii) $\frac{D}{dt}\langle X, Y\rangle = \left\langle \frac{D}{dt}X, Y\right\rangle + \left\langle X, \frac{D}{dt}Y\right\rangle$.

Beweis. Benutze die entsprechenden Eigenschaften der Ableitung aus der Analysis-Vorlesung und die Definition der kovarianten Ableitung. Beispielsweise gilt:

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \left\langle \dot X, Y\right\rangle + \left\langle X, \dot Y\right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt}X, Y\right\rangle + \left\langle X, \frac{D}{dt}Y\right\rangle,$$

da $X(t), Y(t) \in T_{\alpha(t)}M$ gilt. Dies liefert (iii). □

Definition 13.14. Ein Vektorfeld X längs α heißt parallel längs α, falls $\frac{D}{dt}X = 0$ gilt.

Beispiel 13.15. Sei α eine Geodätische. Dann ist $\dot\alpha$ längs α parallel.

Proposition 13.16. *Sei $\alpha : I \to M$ eine Kurve und seien X, Y längs α parallele Vektorfelder. Dann gelten*

(i) $X+Y$ *und* aX*,* $a\in\mathbb{R}$*, sind ebenfalls längs* α *parallele Vektorfelder.*
(ii) Insbesonder bilden die längs α *parallelen Vektorfelder also einen Vektorraum.*
(iii) $|X(t)|$ *ist konstant.*
(iv) $\langle X(t),Y(t)\rangle$ *ist konstant. Insbesondere ist also auch der Winkel* $\gamma(t)$ *zwischen zwei nichtverschwindenden Vektorfeldern mit* $\cos\gamma(t)=\frac{\langle X(t),Y(t)\rangle}{|X(t)|\cdot|Y(t)|}$ *konstant.*

Beweis.
(i) Klar.
(ii) Klar.
(iii) Dies folgt aus (iv).
(iv) Es gilt $\frac{d}{dt}\langle X(t),Y(t)\rangle=\left\langle\frac{D}{dt}X(t),Y(t)\right\rangle+\left\langle X(t),\frac{D}{dt}Y(t)\right\rangle=0.$ □

Theorem 13.17. *Sei* M *eine Hyperfläche und* $\alpha:I\to M$ *eine Kurve. Sei* $0\in I$ *und* $\alpha(0)=p$*. Sei* $X_0\in T_pM$*. Dann gibt es genau ein längs* α *paralleles Vektorfeld* X *mit* $X(0)=X_0$*.*

Beweis. Nach Definition der kovarianten Ableitung und mit $\langle X(t),\nu(\alpha(t))\rangle=0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot X(t)&=\frac{D}{dt}X(t)+\langle\dot X(t),\nu(\alpha(t))\rangle\nu(\alpha(t))\\&=\frac{D}{dt}X(t)+\frac{d}{dt}\langle X(t),\nu(\alpha(t))\rangle\nu(\alpha(t))-\left\langle X(t),\frac{d}{dt}\nu(\alpha(t))\right\rangle\nu(\alpha(t))\\&=\frac{D}{dt}X(t)-\left\langle X(t),\frac{d}{dt}\nu(\alpha(t))\right\rangle\nu(\alpha(t)).\end{aligned}$$

Daher muss jedes längs α parallele Vektorfeld X die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot X(t)=-\left\langle X(t),\frac{d}{dt}\nu(\alpha(t))\right\rangle\nu(\alpha(t))$$

erfüllen. Dies ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung. Daher gibt es eine globale Lösung $X(t)\in C^\infty\left(I,\mathbb{R}^{n+1}\right)$. Aus dieser Differentialgleichung folgt auch, dass $Y(t)$ tangential bleibt, da

$$\frac{d}{dt}\langle X(t),\nu(\alpha(t))\rangle=\langle\dot X(t),\nu(\alpha(t))\rangle+\left\langle X(t),\frac{d}{dt}\nu(\alpha(t))\right\rangle=0$$

gilt. □

Korollar 13.18. *Sei* $M\subset\mathbb{R}^{n+1}$ *eine Hyperfläche und* $\alpha:I\to M$ *eine Kurve. Dann bilden die längs* α *parallelen Vektorfelder* X *einen n-dimensionalen Vektorraum.*

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass die parallelen Vektorfelder längs α einen Vektorraum bilden. Sei $t_0\in I$. Dann ist X eindeutig durch $X(t_0)$ bestimmt. Somit ist der Vektorraum n-dimensional. □

Beispiel 13.19. Sei $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^2$ der Äquator auf der Sphäre mit $\alpha(t)=\cos t\cdot e_1+\sin t\cdot e_2$, wobei e_1,e_2,e_3 die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Dann gilt

$$T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2=\langle\dot\alpha(t),e_3\rangle.$$

Jedes längs α parallele Vektorfeld X hat die Form

$$X(t)=c_1\cdot\dot\alpha(t)+c_2\cdot e_3$$

mit $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Beweis. Wegen $\dot\alpha(t) \perp e_3 \perp \alpha(t) \perp \dot\alpha(t)$ ist klar, dass $\dot\alpha(t)$ und e_3 den Tangentialraum $T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2$ aufspannen. $\dot\alpha$ ist parallel, da α eine Geodätische ist. Da $e_3 \in T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2$ ist, konstante Länge hat und stets senkrecht auf $\dot\alpha(t)$ steht, ist e_3 ein paralleles Vektorfeld längs α. Da die parallelen Vektorfelder längs α einen 2-dimensionalen Vektorraum bilden, hat X die angegebene Form. □

Definition 13.20. Sei α eine Kurve in einer Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Seien $p = \alpha(0)$ und $q = \alpha(1)$. Sei $X_0 \in T_pM$ und X das parallele Vektorfeld längs α mit $X(0) = X_0$. Dann definieren wir die Parallelverschiebung

$$P_\alpha \colon T_pM \to T_qM$$

durch

$$X_0 \to X(1).$$

Theorem 13.21. *Die Parallelverschiebung ist ein isometrischer Vektorraumisomorphismus.*

Beweis. Da parallele Vektorfelder längs α einen Vektorraum bilden, folgt die Linearität. Aus $|X(0)| = |X(1)|$ erhalten wir, dass P_α die Norm erhält und insbesondere injektiv ist. Wegen $\dim T_pM = \dim T_qM < \infty$ ist P_α damit auch surjektiv. Somit ist P_α ein Vektorraumisomorphismus. □

Bemerkung 13.22.

(i) Die Parallelverschiebung entlang eines stückweise glatten Weges $\alpha_k + \ldots + \alpha_1$ definieren wir durch $P_{\alpha_k} \circ \ldots \circ P_{\alpha_1}$.

(ii) Die Parallelverschiebung P_α hängt nicht nur von $\alpha(0)$ und $\alpha(1)$, sondern auch vom Weg dazwischen ab, selbst bei Geodätischen. (Details: Übung.)

Literatur

1. Richard Bödi, *Differentialgeometrie*, 1996/7, Vorlesung in Tübingen, p. 96.
2. Wilhelm Klingenberg Brendan Guilfoyle, *Proof of the Carathéodory conjecture by mean curvature flow in the space of oriented affine lines*, `arXiv:0808.0851`.
3. Klaus Ecker and Gerhard Huisken, *Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature*, Invent. Math. **105** (1991), no. 3, 547–569.
4. Michael Gage and Richard S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Differential Geom. **23** (1986), no. 1, 69–96.
5. Matthew A. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Differential Geom. **26** (1987), no. 2, 285–314.
6. Gerhard Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Differential Geom. **20** (1984), no. 1, 237–266.
7. Ernst Kuwert, *Elementare Differentialgeometrie*, 2006, Skript zur Vorlesung.
8. Elon L. Lima, *The Jordan-Brouwer separation theorem for smooth hypersurfaces*, Amer. Math. Monthly **95** (1988), no. 1, 39–42.
9. Hans Samelson, *Orientability of hypersurfaces in R^n*, Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), 301–302.
10. Oliver C. Schnürer, *Differentialtopologie*, 2011, Skript zur Vorlesung.
11. Michael Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. IV*, second ed., Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., 1979.
12. Michael Struwe, *Differentialgeometrie I*, 2002/03, Lecture Notes.
13. John A. Thorpe, *Elementary topics in differential geometry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1994, Corrected reprint of the 1979 original.
14. Friedrich Tomi, *Differentialgeometrie I*, 1997, Lecture Notes.
15. Wikipedia, `http://www.wikipedia.org`.

Oliver C. Schnürer, Fachbereich Mathematik und Statistik, Universität Konstanz, 78457 Konstanz, Germany

E-mail address: `Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de`