

DIFFERENTIALTOPOLOGIE

OLIVER C. SCHNÜRER

ZUSAMMENFASSUNG. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung Differentialtopologie an der Universität Konstanz im Wintersemester 2010/11.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Mannigfaltigkeiten	1
2. Homotopien	6
3. Sardischer Satz	7
4. Abbildungsgrad	12
5. Deformationslemma	27
6. Morsetheorie	30
7. Krägen und Chirurgie	47
Literatur	50

1. MANNIGFALTIGKEITEN

1.1. Untermannigfaltigkeiten.

Definition 1.1 (Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^{m+n}). Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ heißt m -dimensionale C^k -**Untermannigfaltigkeit** von \mathbb{R}^{m+n} , wenn es zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ von x und einen C^k -Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ mit

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$$

gibt.

Definition 1.2. Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ oder zwischen offenen Teilmengen davon von der Klasse C^1 .

- (i) $x \in \mathbb{R}^m$ heißt **regulär**, falls $df(x)$ surjektiv ist.
- (ii) $y \in \mathbb{R}^n$ heißt **regulärer Wert**, falls $f^{-1}(\{y\})$ nur aus regulären Punkten besteht.

Das folgende Theorem gilt mit demselben Beweis auch für Abbildungen zwischen offenen Teilmengen.

Theorem 1.3. Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1 . Sei $y \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Wert. Dann ist $f^{-1}(\{y\})$ eine $(m - n)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m .

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Satz über implizite Funktionen: Sei dazu $x \in f^{-1}(\{y\}) \equiv f^{-1}(y)$. Nach Umbenennen der Koordinaten können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $D_1 f(x^1, x^2)|_x$, $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, ein Isomorphismus ist. Somit gibt es lokal um x eine C^1 -Funktion $g : \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass

$f(g(x^2), x^2) = f(x) = y$ für alle $x^2 = x^2(x)$ gilt. Lokal sind dies die einzigen Punkte, die auf $f(x) = y$ abgebildet werden. Somit ist $f^{-1}(y)$ lokal um x als C^1 -Graph darstellbar. Dies impliziert, dass $f^{-1}(y)$ eine Untermannigfaltigkeit ist (Übung). \square

1.2. Abstrakte Mannigfaltigkeiten.

Definition 1.4 (Mannigfaltigkeit).

- (i) Ein topologischer Raum M heißt **lokal euklidisch** von der Dimension m , falls M mit offenen Mengen überdeckt werden kann, von denen jede zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^m homöomorph ist.
- (ii) Ein Paar (U, φ) , wobei $U \subset M$ offen ist und $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus (wie oben) ist, heißt **Karte** von M . Eine Kollektion \mathcal{A} von Karten heißt **Atlas** von M , falls $M \subset \bigcup_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}} U$ gilt.
- (iii) Zwei Karten (U, φ) und (V, ψ) heißen **C^k -verträglich**, $k \geq 1$, wenn $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ ein C^k -Diffeomorphismus ist. Ein Atlas heißt von der Klasse C^k , falls je zwei seiner Karten C^k -verträglich sind.
- (iv) Ist \mathcal{A} ein C^k -Atlas, so gibt es genau einen **maximalen C^k -Atlas** \mathcal{A}_0 mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$; er besteht aus allen Karten, welche mit den Karten von \mathcal{A} in C^k verträglich sind.
- (v) Eine **differenzierbare (C^k -)Struktur** auf M ist ein maximaler C^k -Atlas auf M .
- (vi) Ein lokal euklidischer Hausdorff-Raum mit einer differenzierbaren Struktur heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**.

Bemerkung 1.5.

- (i) Beispiele sind $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n$.
- (ii) Offene Teilmengen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten.
- (iii) Teilweise fordert man zusätzlich, dass die Topologie von M eine abzählbare Basis besitzt.
- (iv) In der algebraischen Topologie oder später in dieser Vorlesung lernt man, dass offene nicht leere Teilmengen von \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n nur dann homöomorph zueinander sein können, wenn $m = n$ gilt. Somit ist die Dimension eines lokal euklidischen Raumes wohldefiniert.
- (v) Häufig fordert man daher, dass Mannigfaltigkeiten und Untermannigfaltigkeiten nicht leer sind, da man ihnen sonst keine eindeutige Dimension zuordnen kann.
- (vi) Wir schreiben häufig M^m für eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit M .

Bemerkung 1.6. Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ besitzt einen C^k -Atlas, nämlich

$$\mathcal{A} := \{(U \cap M, \varphi|_{U \cap M}) : (U, \varphi) \text{ wie oben}\}.$$

M ist lokal euklidisch von der Dimension m . Es gilt

$$(\psi|_{V \cap M}) \circ (\varphi|_{U \cap M})^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}|_{(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \varphi(U \cap V)} \in C^k.$$

Definition 1.7 (Differenzierbare Abbildungen).

Seien M, N zwei C^k -Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt von der Klasse C^k , falls es zu jedem $x \in M$ Karten (U, φ) von M und (V, ψ) von N mit $x \in U, f(U) \subset V$ gibt und $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^k$ ist.

Ist f bijektiv und f^{-1} ebenfalls von der Klasse C^k , $k \geq 1$, so heißt f Diffeomorphismus der Klasse C^k .

Gibt es für jedes $x \in M$ eine Umgebung U , so dass $f(U)$ offen und $f|_U : U \rightarrow f(U)$ ein Diffeomorphismus ist, so heißt f ein lokaler Diffeomorphismus.

Bemerkung 1.8.

- (i) Ist f von der Klasse C^k , so ist f stetig: $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ ist stetig, also auch $f = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$.
- (ii) Ist f von der Klasse C^k , so ist $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^k$ für alle Karten (U, φ) , (V, ψ) der betreffenden differenzierbaren Strukturen. (Falls U klein genug ist, so dass die Komposition wohldefiniert ist.)

Beweis. Sei $x \in U$, $f(x) \in V$ und $z := \varphi(x)$. Nach Definition existieren Karten (U_0, φ_0) und (V_0, ψ_0) mit $x \in U_0$, $f(U_0) \subset V_0$, so dass $\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1} \in C^k$ ist. Wir wählen eine offene Umgebung W von z mit $\varphi^{-1}(W) \subset U_0 \cap U$ und $f(\varphi^{-1}(W)) \subset V_0 \cap V$. In W gilt dann

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \underbrace{(\psi \circ \psi_0^{-1})}_{\in C^k} \circ \underbrace{(\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1})}_{\in C^k} \circ \underbrace{(\varphi_0 \circ \varphi^{-1})}_{\in C^k} \in C^k. \quad \square$$

Beispiel 1.9 (Kartesisches Produkt). Seien (M, \mathcal{A}) , (N, \mathcal{B}) zwei C^k -Mannigfaltigkeiten. Dann ist ein C^k -Atlas auf $M \times N$ durch

$$\{(U \times V, \varphi \times \psi) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \mathcal{B}\}$$

mit $(\varphi \times \psi)((x, y)) = (\varphi(x), \psi(y)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ gegeben.

Definition 1.10 (Untermannigfaltigkeit). Sei N eine n -dimensionale differenzierbare C^k -Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $M \subset N$ heißt **C^k -Untermannigfaltigkeit** von N , wenn es zu jedem $x \in M$ eine Karte (U, φ) von N mit $x \in U$ und

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}),$$

$m \leq n$, gibt. Die Kollektion aller $(U \cap M, \varphi|_{U \cap M})$ ist dann ein C^k -Atlas von M .

Definition 1.11 (Immersion, Submersion). Seien M, N Mannigfaltigkeiten. Eine C^1 -Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt

- (i) **immersiv** in x , falls f in Karten ein injektives Differential hat, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ im Punkt $\varphi(x)$ also ein injektives Differential hat.
- (ii) **submersiv** in x , falls f in Karten ein surjektives Differential hat.
- (iii) **Immersion**, falls f überall immersiv ist.
- (iv) **Submersion**, falls f überall submersiv ist.
- (v) f hat konstanten Rang, wenn f in Karten ein Differential von konstantem Rang besitzt.

Erinnerung: Das Rangtheorem [4, Theorem 10.3.1] aus der Analysis liefert

Theorem 1.12. Sei $f: M^m \rightarrow N^n$ eine Abbildung die in jedem Punkt den Rang l hat. Dann gibt es für jeden Punkt $p \in M$ Karten (U, φ) und (V, ψ) von M bzw. N mit $p \in U$, $f(p) \in V$ und $f(U) \subset V$, so dass

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^l, 0, \dots, 0)$$

gilt.

Theorem 1.13. Sei $f: M^m \rightarrow N^n$ von der Klasse C^k , $k \geq 1$.

- (i) Habe f konstanten Rang l . Sei $y \in N$. Dann ist $f^{-1}(\{y\})$ eine Untermannigfaltigkeit von M der Dimension $m - l$.
- (ii) Sei $y \in N$. Sei f für alle $x \in f^{-1}(\{y\})$ submersiv, so ist $f^{-1}(y)$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $m - n$.

Beweis. Nach Einführung von Karten folgt (ii) aus dem Satz über implizite Funktionen und (i) aus dem Rangtheorem. Beachte: (ii) ist ein Spezialfall von (i). \square

1.3. Tangentialräume.

Definition 1.14 (Tangentialraum).

- (i) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Untermannigfaltigkeit. Sei $x \in M$. Wir definieren den (eingebetteten) **Tangentialraum** von M im Punkte x als

$$T_x M := \{\alpha'(0) : \alpha \in C^1, \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, \alpha(0) = x\}$$

und den (angeklebten) Tangentialraum als $x + T_x M \subset \mathbb{R}^n$.

- (ii) Sei M eine abstrakte C^1 -Mannigfaltigkeit und sei $x \in M$. Dann definieren wir $T_x M$ als Menge aller C^1 -Kurven $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\alpha(0) = x$ mit der Äquivalenzrelation $\alpha \sim \beta$, falls es eine Karte (U, φ) mit $x \in U$ und

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$

gibt.

Lemma 1.15. *Sei M^m eine abstrakte Mannigfaltigkeit.*

- (i) *Die Äquivalenzrelation in der Definition von $T_x M$ hängt nicht von der Karte (U, φ) ab.*
(ii) *$T_x M$ ist ein Vektorraum und $TM := \bigcup_{x \in M} T_x M$ ist eine $2m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.*

Beweis.

- (i) Sei (V, ψ) eine weitere Karte um x und gelte $\alpha \sim \beta \in T_x M$ bezüglich (U, φ) . Dann gilt nahe x

$$\begin{aligned} (\psi \circ \alpha)'(0) &= (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)'(0) = d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \alpha)(0) \langle (\varphi \circ \alpha)'(0) \rangle \\ &= d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \beta)(0) \langle (\varphi \circ \beta)'(0) \rangle = (\psi \circ \beta)'(0). \end{aligned}$$

$\alpha \sim \beta$ gilt also auch bezüglich der Karte (V, ψ) .

- (ii) Sei (U, φ) eine Karte von M . Dann sind die Karten von TM auf $TU := \bigcup_{x \in U} T_x M$ definiert und haben die Form

$$(x, \alpha) \mapsto (\varphi(x), (\varphi \circ \alpha)'(0)).$$

Mit Hilfe der obigen Rechnungen sieht man, dass in den Kartenwechselabbildungen in der zweiten Komponente $d(\psi \circ \varphi^{-1})$ auftritt. Daher ist TM eine C^{k-1} -Mannigfaltigkeit, falls M eine C^k -Mannigfaltigkeit ist.

Wir definieren die Vektorraumstruktur auf TM vertreterweise durch

$$[\lambda \alpha + \beta] := [(t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(\alpha(0)) + t\{\lambda(\varphi \circ \alpha)'(0) + (\varphi \circ \beta)'(0)\})]$$

für $\alpha, \beta \in T_x M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Hier ist noch einiges zu überprüfen, z. B. $1 \cdot \alpha = \alpha$ und die Wohldefiniertheit. \square

1.4. Tubenumgebungen. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Definiere das Normalenbündel von M durch

$$NM := \{V = (x, v) \in M \times \mathbb{R}^n : \langle v, \alpha'(0) \rangle = 0 \forall \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ mit } \alpha(0) = x\}.$$

Dabei ist $\varepsilon > 0$ beliebig. Das Normalenbündel enthält alle Vektoren, die senkrecht auf M stehen. Man kann sich überlegen, dass das Normalenbündel eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist. (Übung.)

Theorem 1.16 (Existenz einer Tubenumgebung). *Sei $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine geschlossene (= kompakt, kein Rand) Untermannigfaltigkeit. Definiere die Abbildung E durch*

$$\begin{aligned} E: NM &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ (x, v) &\mapsto x + v. \end{aligned}$$

Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass $E|_{\{(x,v) \in NM: |v| < \varepsilon\}} \rightarrow E(\{(x,v) \in NM: |v| < \varepsilon\}) \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. Da M eine Untermannigfaltigkeit ist, gilt lokal

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

Gelte ohne Einschränkung nach einer Rotation und Translation des Koordinatensystems im umgebenden Raum \mathbb{R}^n

$$\text{im } d(\varphi^{-1}|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}})(0) = \mathbb{R}^m \times \{0\}$$

sowie $\varphi^{-1}(0) = 0$. Lokal ist NM diffeomorph zu $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Daher können wir mit Hilfe von φ die Abbildung E in Karten durch eine Abbildung $\tilde{E}: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ darstellen, wobei

$$\tilde{E}(x, 0) = \varphi^{-1}(x, 0) \quad \text{und} \quad \tilde{E}(0, v) = (0, v)$$

ist. Das Differential im Ursprung ist $\begin{pmatrix} d(\varphi^{-1}|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}})(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$. Daher ist \tilde{E} bzw. E lokal ein Diffeomorphismus.

Mit endlich vielen solchen Umgebungen lässt sich M aufgrund der Kompaktheit überdecken. Somit ist E in einer Menge der Form $\{(x, v) \in NM: |v| < \varepsilon\}$ zumindest ein lokaler Diffeomorphismus. Nehme nun an, dass es kein solches ε gibt, so dass E in $\{(x, v) \in NM: |v| < \varepsilon\}$ ein Diffeomorphismus ist. Dann finden wir Punkte $(x_k, v_k) \in NM$ und $(y_k, w_k) \in NM$ mit $E(x_k, v_k) = E(y_k, w_k)$, $(x_k, v_k) \neq (y_k, w_k)$ und $|v_k| \rightarrow 0$ und $|w_k| \rightarrow 0$. Aufgrund der Kompaktheit von M dürfen wir ohne Einschränkung $x_k \rightarrow x$ und $y_k \rightarrow y$ annehmen. Den Fall $x = y$ können wir ausschließen, da E ein lokaler Diffeomorphismus ist. Aber auch $x \neq y$ ist ausgeschlossen, da aufgrund der Dreiecksungleichung $E(x_k, v_k) \rightarrow x$ und $E(y_k, w_k) \rightarrow y$ gilt:

$$|x - E(x_k, v_k)| \leq |x - x_k| + |x_k - E(x_k, v_k)| = |x - x_k| + |v_k|.$$

Die Behauptung folgt. \square

Korollar 1.17. Sei $U = E(\{(x, v) \in NM: |v| < \varepsilon\})$ eine Tubenumgebung einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ zu ε wie in Theorem 1.16. Sei $p \in U$ und $p = E(x, v)$ mit $|v| < \varepsilon$. Dann ist

$$d(p, M) = |v|.$$

Beweis. Wegen $|x - p| = |v|$ ist $d(p, M) \leq |v|$. Aufgrund der Kompaktheit von M und der Stetigkeit von d gibt es $y \in M$ mit $d(p, M) = d(p, y) \equiv |p - y|$. Wir behaupten, dass die Verbindung von p zu y die Mannigfaltigkeit M in y senkrecht trifft, d. h. $(y, p - y) \in NM$ oder $\langle p - y, \alpha'(0) \rangle = 0$ für alle Kurven $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\alpha(0) = y$ erfüllt. Wäre dies nicht der Fall, so dürfen wir ohne Einschränkung (betrachte sonst $\alpha(-t)$) annehmen, dass $\langle p - y, \alpha'(0) \rangle > 0$ gilt. Es ist

$$\left. \frac{d}{dt} \langle p - \alpha(t), p - \alpha(t) \rangle \right|_{t=0} = 2 \langle p - \alpha(t), -\alpha'(t) \rangle|_{t=0} = 2 \langle p - y, -\alpha'(0) \rangle < 0.$$

Dies liefert $|p - \alpha(t)| < |p - y|$ für $0 < t \ll 1$. Widerspruch.

Gäbe es $(y, w) \in NM$ mit $|w| < |v|$ und $E(y, w) = p$, so widerspräche dies der Aussage, dass $E|_{\{(x,v) \in NM: |v| < \varepsilon\}} \rightarrow E(\{(x,v) \in NM: |v| < \varepsilon\})$ ein Diffeomorphismus ist. \square

Korollar 1.18. Sei U eine Tubenumgebung einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ zu ε wie in Theorem 1.16. Dann ist $d(\cdot, M): U \setminus M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt.

Beweis. Da E ein Diffeomorphismus ist, hängt v mit $E(x, v) = p$ in glatter Weise von p ab. Da $d(p, M) = |v|$ ist, ist $d(\cdot, M)$ für $v \neq 0$, also $p \notin M$ glatt. \square

2. HOMOTOPIEN

Seien X, Y topologische Räume. Setze $I := [0, 1]$.

Definition 2.1 (Homotopie). Seien X, Y topologische Räume.

- (i) Eine **Homotopie** ist eine Familie $(\varphi_t)_{t \in I}$ von Abbildungen $\varphi_t : X \rightarrow Y$, so dass die Abbildung $\Phi : X \times I \rightarrow Y$, definiert durch $\Phi(x, t) := \varphi_t(x)$, stetig ist.
- (ii) Zwei Abbildungen $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißen **homotop**, wenn es eine Homotopie $(g_t)_{t \in I}$ mit $g_t : X \rightarrow Y$, $g_0 = f_0$ und $g_1 = f_1$ gibt. Wir schreiben $f_0 \simeq f_1$.
- (iii) Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **Homotopieäquivalenz**, wenn es eine stetige Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt, so dass $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$ und $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$ gelten.
- (iv) Zwei topologische Räume X und Y haben den gleichen **Homotopietyp** oder sind bis auf Homotopie äquivalent oder sind **homotopieäquivalent**, wenn es eine Homotopieäquivalenz zwischen ihnen gibt. Wir schreiben $X \simeq Y$.

Definition 2.2 (Retrakte). Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$.

- (i) Dann ist A ein **Retrakt** von X , wenn es eine stetige Abbildung $r : X \rightarrow A$ (**Retraktion**) gibt, so dass $r|_A = \mathbb{1}_A$ ist.
- (ii) Dann ist A ein **Deformationsretrakt** von X , wenn es eine Familie $(f_t)_{t \in I}$ von Abbildungen $f_t : X \rightarrow X$ gibt, so dass $f_0 = \mathbb{1}_X$, $f_1(X) = A$ und $f_t|_A = \mathbb{1}_A$ für alle $t \in I$ gelten und dass weiterhin $X \times I \ni (x, t) \mapsto f_t(x)$ stetig ist.

Beispiele 2.3.

- (i) $\partial B_1((-1, 0)) \cup \partial B_1((1, 0))$ ist ein Retrakt und ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$.
- (ii) Die Menge $\partial B_1((1, 0))$ ist ein Retrakt, aber kein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$.

Die Tatsache, dass es sich nicht um einen Deformationsretrakt handelt ist zwar anschaulich klar, ein Beweis benötigt aber Betrachtungen über Fundamentalgruppen.

- (iii) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit mit Tubenumgebung U . Dann ist M ein Deformationsretrakt von U .

Lemma 2.4. Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$.

- (i) Ist A ein Deformationsretrakt von X , so ist A ein Retrakt von X .
- (ii) Ist A ein Deformationsretrakt von X , so sind A und X homotopieäquivalent.

Beweis.

- (i) Wähle $r = f_1$.
- (ii) Benutze die Abbildung $f_1 : X \rightarrow A$ und die Inklusion $i : A \rightarrow X$. Es gilt $f_1 \circ i = \text{id}_A$. Die Homotopie f_t zeigt, dass $i \circ f_1 \simeq \text{id}_X$ gilt. \square

Bemerkung 2.5. Ein wichtiges Beispiel für homotope Abbildungen sind homotope Wege. Ein Weg ist eine stetige Abbildung von $[0, 1]$ in einen topologischen Raum. Ein geschlossener Weg ist eine stetige Abbildung f von $[0, 1]$ in einen topologischen Raum mit $f(0) = f(1)$ oder, äquivalent dazu, eine Abbildung von \mathbb{S}^1 in einen topologischen Raum.

- (i) Frei homotope geschlossene Wege: Sei X ein topologischer Raum und seien $\alpha, \beta : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ geschlossene Wege. Dann ist α (frei) homotop zu β , falls die Abbildungen α und β homotop zueinander sind.
- (ii) Wege mit festen Endpunkten: Sei X ein topologischer Raum, $x_0, x_1 \in X$. Seien $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ stetige Abbildungen mit $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ und $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$. Dann heißt α homotop zu β , wenn es eine stetige Abbildung

$\Phi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ mit $\Phi(\cdot, 0) = \alpha$, $\Phi(\cdot, 1) = \beta$, $\Phi(0, t) = x_0$ und $\Phi(1, t) = x_1$ für alle $t \in I$ gibt.

- (iii) Geschlossene Wege mit festen Endpunkten: Wie bei festen Endpunkten, falls $x_0 = x_1$ ist.

Homotope Wege mit festen Endpunkten sind Beispiel für relative Homotopien:

Definition 2.6.

- (i) Eine Homotopie $\varphi_t : X \rightarrow Y$ heißt **relativ** zu einer Menge $A \subset X$, wenn $\varphi_t(a)$ für beliebiges aber festes $a \in A$ unabhängig von $t \in I$ ist. (Einen Spezialfall davon haben wir bereits beim Deformationsretrakt kennen gelernt. Dort hatten wir gefordert, dass $f_t|_A = \mathbf{1}_A$ für alle $t \in I$ gilt.)
- (ii) Sei $\varphi_t : X \rightarrow Y$ eine Homotopie und seien $A \subset X$ und $B \subset Y$. Falls $\varphi_t(A) \subset B$ für alle $t \in I$ gilt, so sprechen wir von einer **Homotopie von Paaren** $\varphi_t : (X, A) \rightarrow (Y, B)$. Im Spezialfall, dass $A = \{x_0\}$ und $B = \{y_0\}$ gelten, sprechen wir von einer **Homotopie von punktierten Räumen** und schreiben $\varphi_t : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$.
- (iii) Entsprechend heißen punktierte Räume (X, x_0) und (Y, y_0) **homotopieäquivalent**, wenn es stetige Abbildungen $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ und $\psi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ gibt, so dass $\varphi \circ \psi \simeq \mathbf{1}_Y$ und $\psi \circ \varphi \simeq \mathbf{1}_X$ gelten, wobei „ \simeq “ sich auf Homotopien punktierter Räume bezieht. Die Abbildungen φ und ψ heißen dann **Homotopieinverse** voneinander. Wir schreiben $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$.

3. SARDSCHER SATZ

Quelle: [2], siehe auch [10, 11].

Definition 3.1. Sei $f : M \rightarrow N$ differenzierbar. $p \in M$ heißt **regulär**, falls das Differential von f in p surjektiv ist. Ein Punkt $q \in N$ heißt **regulärer Wert**, falls $f^{-1}(\{q\})$ aus regulären Punkten besteht. Nicht reguläre Punkte/Werte nennt man **singulär** oder **kritisch**.

Ziel dieses Kapitels ist der Beweis von

Theorem 3.2 (Sardscher Satz). *Die Menge der kritischen Werte einer differenzierbaren C^∞ -Abbildung von Mannigfaltigkeiten (mit einer abzählbaren Basis der Topologie) hat Lebesgue-Maß Null.*

Korollar 3.3. *Ist M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung, so ist $f^{-1}(x) \subset M$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Kodimension n .*

Bemerkung 3.4.

- (i) $f^{-1}(x)$ kann die leere Menge sein.
- (ii) Die Dimensionsaussage erhält man durch Zählen der Gleichungen.
- (iii) Beim Satz von Sard genügt es für eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, dass $f \in C^k$ mit $k > \max\{n - p, 0\}$ ist. Die entsprechende Aussage gilt für Mannigfaltigkeiten der entsprechenden Dimensionen.
- (iv) Ist die Zielmannigfaltigkeit 0-dimensional und besteht aus höchstens abzählbar vielen Punkten, so ist sie eine Nullmenge und der Sardsche Satz in diesem Fall trivial.

Definition 3.5 (Erinnerung). Eine Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^n$ hat das **Maß Null** (ist **dünn**, fast jeder Punkt ist nicht in C), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von Würfeln $W_i \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |W_i| < \varepsilon.$$

gibt.

Bemerkung 3.6.

- (i) Die abzählbare Vereinigung dünner Mengen ist wieder dünn ($2^{-i}\varepsilon$ -Argument).
- (ii) Eine äquivalente Definition erhält man für offene oder abgeschlossene Würfel, Quader oder Kugeln.

Lemma 3.7. *Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $C \subset U$ habe Maß Null. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz, dann hat auch $f(C)$ das Maß Null.*

Beweis. Grundvorlesung Analysis. □

Definition 3.8. Eine Teilmenge C einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit hat das **Maß Null**, falls für jede Karte $h : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ die Menge $h(C \cap U) \subset \mathbb{R}^m$ das Maß Null hat.

Bemerkung 3.9. Die Voraussetzung der Differenzierbarkeit ist hier wichtig, da Nullmengen unter Homöomorphismen nicht erhalten zu bleiben brauchen. Ein Gegenbeispiel erhält man mit Hilfe der Cantor Funktion, siehe “Absolute continuity” in [13] (Übung).

Da eine Mannigfaltigkeit eine abzählbare Basis der Topologie besitzt, gibt es einen Atlas mit abzählbar vielen Karten. Es genügt, die Definition für solche Karten anzuwenden. Wohldefiniertheit folgt, da Nullmengen unter differenzierbaren Kartenwechseln und abzählbaren Vereinigungen erhalten bleiben.

Lemma 3.10. *Eine offene Überdeckung des Intervalles $[0, 1]$ durch relativ offene Teilintervalle enthält eine endliche Überdeckung $[0, 1] = \bigcup_{j=1}^k I_j$ mit $\sum_{j=1}^k |I_j| \leq 2$.*

Beweis. Aufgrund der Kompaktheit gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Wähle eine solche, bei der man kein Intervall mehr weglassen kann (ohne die Überdeckungseigenschaft zu verlieren). Seien die Intervalle I_j , $j = 1, \dots, k$ so nummeriert, dass mit $I_j = (a_j, b_j)$ stets $a_j < a_{j+1}$, $j = 1, \dots, k-1$ gilt. Minimalität und Überdeckungseigenschaft implizieren $a_i < a_{i+1} < b_i \leq a_{i+2}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \sum_i (b_i - a_i) &= \sum_i (a_{i+1} - a_i) + \sum_i (b_i - a_{i+1}) \\ &\leq \sum_i (a_{i+1} - a_i) + \sum_i (a_{i+2} - a_{i+1}) \\ &\leq 2, \end{aligned}$$

wobei wir zum Schluss verwendet haben, dass es sich um Teleskopsummen handelt. □

Theorem 3.11 (Fubini). *Sei $\mathbb{R}_t^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : x^n = t\} \subset \mathbb{R}^n$. Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $C_t := C \cap \mathbb{R}_t^{n-1}$ dünn in $\mathbb{R}_t^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, dann ist C in \mathbb{R}^n dünn.*

Beweis. Da die Eigenschaft, dünn zu sein, unter abzählbaren Vereinigungen erhalten bleibt, dürfen wir annehmen, dass $C \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0, 1]$ gilt.

Für $t \in [0, 1]$ ist C_t in $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t\}$ dünn. Sei $\varepsilon > 0$ und W_t^i eine Überdeckung von C_t durch offene Würfel mit $\sum_i |W_t^i| < \varepsilon$. Definiere $W_t := \bigcup_i W_t^i$ und fasse dies (nach Identifikation) als Teilmenge des \mathbb{R}^{n-1} auf.

Die Funktion $|x^n - t|$ ist für festes $t \in [0, 1]$ auf C stetig, verschwindet genau auf C_t und nimmt in der kompakten Menge $C \setminus (W_t \times [0, 1])$ ein positives Minimum an, das wir mit α bezeichnen. Es folgt

$$\{x \in C : |x^n - t| < \alpha\} \subset W_t \times I_t^\alpha,$$

wobei $I_t^\alpha = (t - \alpha, t + \alpha) \subset [0, 1]$ ist. Es gilt $\bigcup_t I_t^\alpha = [0, 1]$. Wähle nun eine Teilüberdeckung von $[0, 1]$ aus den Intervallen I_t^α mit $\sum_{t_j} |I_{t_j}^\alpha| \leq 2$ aus. Beachte, dass $\alpha = \alpha(t_i)$ gilt. Es folgt

$$C \subset \bigcup_{t_j, i} W_{t_j}^i \times I_{t_j}^\alpha,$$

wobei i der Würfelindex ist und die Vereinigung über Quader gebildet wird. Weiterhin gilt

$$\sum_{t_j, i} |W_{t_j}^i \times I_{t_j}^\alpha| \leq 2\varepsilon. \quad \square$$

Bemerkung 3.12. Die Bedingung, dass C kompakt ist, lässt sich wie folgt abschwächen: C ist abzählbare Vereinigung kompakter Mengen, die jeweils die Voraussetzungen des Theorems erfüllen.

Als abzählbare Vereinigung kompakter Mengen lassen sich abgeschlossene Mengen und offene Mengen (die aber keine Nullmengen sein können) darstellen, Bilder dieser Mengen unter stetigen Abbildungen, abzählbare Vereinigungen und endliche Durchschnitte davon.

Beweis von Theorem 3.2. Nach Einführung von Karten genügt es, folgendes zu zeigen:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ unendlich oft differenzierbar und sei $D \subset U$ die Menge der kritischen Punkte von f , so hat $f(D) \subset \mathbb{R}^p$ das Maß Null.

Wir führen einen Induktionsbeweis nach der Dimension n .

Im Fall $n = 0$ ist \mathbb{R}^n ein Punkt. Also ist $f(U)$ höchstens ein Punkt und hat damit das Maß Null. (Dies gilt ebenso für $n < p$.)

Sei die Behauptung also schon im Falle „ $n-1$ “ gezeigt. Wir wollen sie hierauf aufbauend im Falle „ n “ nachweisen.

Sei $D_i \subset U$ die Menge aller Punkte, in denen alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq i$ verschwinden. Wir erhalten eine absteigende Folge relativ abgeschlossener Mengen

$$D \supset D_1 \supset D_2 \supset \dots$$

Wir behaupten, dass folgendes gilt

- (i) $f(D \setminus D_1)$ ist dünn,
- (ii) $f(D_k \setminus D_{k+1})$ ist dünn für alle $k \geq 1$,
- (iii) für ein genügend großes k ist $f(D_k)$ dünn.

Wir bemerken, dass auch (iii) nötig ist, damit auch die Punkte, in denen alle Ableitungen verschwinden, erfasst werden.

Alle in (i)-(iii) auftretenden Mengen dürfen nach Bemerkung 3.12 im Satz von Fubini verwendet werden.

Weiterhin genügt es nachzuweisen, dass jeder Punkt in $D \setminus D_1$, $D_i \setminus D_{i+1}$ bzw. D_k eine Umgebung V besitzt, so dass $f(V \cap (D \setminus D_1))$, $f(V \cap (D_i \setminus D_{i+1}))$ bzw. $f(V \cap D_k)$ dünn sind. Das Resultat folgt dann, weil die abzählbare Vereinigung dünner Mengen wieder dünn ist. (Man kommt mit abzählbar vielen offenen Mengen V aus, da jede solche Menge entweder bereits bis auf eine Nullmenge in der Vereinigung der anderen solchen Mengen enthalten ist oder einen Ball von positivem Volumen neu hinzufügt.)

Beweis von (i): Nehme an, dass $p \geq 2$ ist, da für $p = 1$ nämlich $D = D_1$ gilt. Sei $x_0 \in D \setminus D_1$. Da $x_0 \notin D_1$ ist, gibt es eine in x_0 nicht verschwindende partielle

Ableitung, ohne Einschränkung $\frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) \neq 0$. Definiere

$$h : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ x \equiv (x^1, \dots, x^n) \mapsto (f^1(x), x^2, \dots, x^n).$$

In x_0 ist h daher nicht singulär. Somit gibt es eine Umgebung V von x_0 , so dass $h : V \rightarrow h(V) \equiv V'$ ein Diffeomorphismus ist. Definiere $g := f \circ h^{-1}$. In einer Umgebung von $h(x)$ hat g damit die Gestalt

$$g : (z^1, \dots, z^n) \mapsto (z^1, g^2(z), \dots, g^p(z)).$$

Die Hyperebene $\{z : z^1 = t\}$ wird dabei (lokal) in die Hyperebene $\{y : y^1 = t\}$ abgebildet. Definiere

$$g_t : (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \rightarrow \{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$$

als Einschränkung von g . Es gilt

$$Dg = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ? & Dg_t \end{pmatrix}.$$

Somit ist ein Punkt in $(\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'$ genau dann für g kritisch, wenn er für g_t kritisch ist. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt die Menge der kritischen Werte von g_t das Maß Null in $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$. Da g entsprechende Hyperebenen auf sich abbildet (die erste Komponente bleibt unter g konstant), hat auch die Menge der kritischen Werte von g dünnen Durchschnitt mit der Hyperebene $\{y : y^1 = t\}$. Nach Fubini haben also die kritischen Werte von g das Maß Null. Da sich f und g nur durch einen Diffeomorphismus unterscheiden, haben auch die kritischen Werte von f das Maß Null. Dies gilt lokal, solange $\frac{\partial f^1}{\partial x^1} \neq 0$ ist. Es folgt (i).

Beweis von (ii): Wir argumentieren ähnlich wie beim Beweis von (i). Sei $x_0 \in D_k \setminus D_{k+1}$. Dann gibt es dort eine nicht verschwindende $(k+1)$ -ste Ableitung, ohne Einschränkung

$$\frac{\partial^{k+1} f^1}{\partial x^1 \partial x^{\nu_1} \dots \partial x^{\nu_k}}(x_0) \neq 0.$$

Nehme an, dass dies in einer ganzen Umgebung V von x_0 gilt. Definiere

$$w : V \rightarrow \mathbb{R}, \\ w := \frac{\partial^k f^1}{\partial x^{\nu_1} \dots \partial x^{\nu_k}}.$$

Es gilt $w(x_0) = 0$, $\frac{\partial w}{\partial x^1}(x_0) \neq 0$. Die Abbildung

$$h : x \mapsto (w(x), x^2, \dots, x^n)$$

definiert damit einen Diffeomorphismus $h : V \rightarrow V' \equiv h(V)$. Nach Definition von D_k und w erfüllt jeder Punkt in D_k auch $w = 0$. Wegen $D_k \subset \{w = 0\}$ gilt

$$h(D_k \cap V) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n.$$

Definiere

$$g := f \circ h^{-1} : V' \rightarrow \mathbb{R}^p$$

und die Einschränkung

$$g_0 : (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Nach Induktionsvoraussetzung hat die Menge der kritischen Werte von g_0 das Maß Null. Sei $x \in h(D_k \cap V)$. Dann verschwinden dort alle Ableitungen von g bis zur Ordnung k . Da $h(D_k \cap V) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ gilt, ist dort auch g_0 definiert und es verschwinden auch für g_0 dort alle Ableitungen bis zur Ordnung k . Insbesondere verschwinden dort also auch alle ersten Ableitungen und es handelt sich damit um kritische Punkte von g_0 . Also ist $g_0 \circ h(D_k \cap V) = g \circ h(D_k \cap V) = f(D_k \cap V)$ dünn.

Beweis von (iii): Die Menge U ist abzählbare Vereinigung von Würfeln. Sei $W \in U$ ein Würfel der Kantenlänge a und sei $k > \frac{n}{p} - 1$. Es genügt zu zeigen, dass $f(W \cap D_k)$ dünn ist.

Nach Taylor gilt

$$f(x+h) = f(x) + R(x, h)$$

mit

$$|R(x, h)| \leq c \cdot |h|^{k+1}$$

für $x \in D_k \cap W$ und $x+h \in W$, wobei die Konstante c nur von f und W abhängt.

Zerlege nun W in l^n Würfel der Kantenlänge $\frac{a}{l}$, $l \in \mathbb{N}$. Ist W_1 ein Würfel der Zerlegung, der einen Punkt $x \in D_k$ enthält, so lässt sich jeder andere Punkt in W_1 als $x+h$ mit $|h| \leq \frac{\sqrt{na}}{l}$ darstellen. Somit folgt nach Taylor

$$|f(x+h) - f(x)| \leq c \cdot \left(\frac{\sqrt{na}}{l} \right)^{k+1}.$$

Somit liegt $f(W_1)$ in einem Würfel der Kantenlänge

$$c_1(n) \cdot c \cdot \left(\frac{\sqrt{na}}{l} \right)^{k+1}.$$

Es gibt höchstens l^n solche Würfel mit Punkten in D_k . Die aufsummierten Volumina der Bilder dieser Würfel in \mathbb{R}^p sind somit höchstens

$$c_1(n)^p \cdot c^p \cdot \left(\frac{\sqrt{na}}{l} \right)^{p(k+1)} \cdot l^n = c(\dots) \cdot l^{n-p(k+1)}.$$

Da $n - p(k+1) < 0$ gilt, wird dies für $l \rightarrow \infty$ beliebig klein und die Behauptung folgt. \square

Korollar 3.13 (Brown). *Seien M und N (endlichdimensionale) Mannigfaltigkeiten. Sei $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare (C^∞ -)Abbildung. Dann liegen die regulären Werte von f dicht in N .*

Aus dem Sardischen Satz wollen wir nun noch den Brouwerschen Fixpunktsatz herleiten:

Definition 3.14. Sei $A \subset B$. Eine **Retraktion** ist eine stetige Abbildung $f: B \rightarrow A$, so dass $f|_A = \text{id}$, also $f(x) = x$ für alle $x \in A$, gilt.

Theorem 3.15. *Es gibt keine Retraktion von $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ auf \mathbb{S}^{n-1} .*

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Sei $f: \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ eine Retraktion. Zeige zunächst, dass es dann auch eine C^∞ -Retraktion (hier: eine C^∞ -Umgebung, die sich noch glatt auf eine Umgebung des Randes fortsetzen lässt) von $\overline{B_1(0)}$ auf \mathbb{S}^{n-1} gibt: Wir finden eine Retraktion g , die in der Nähe von $\partial B_1(0)$ von der Klasse C^∞ ist, z. B.

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{x}{|x|} & \text{für } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1, \\ f(2x) & \text{für } 0 \leq |x| \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Approximation (Mollifizierung) im Inneren und Projektion auf \mathbb{S}^{n-1} liefert eine C^∞ -Retraktion. Nehme daher $f \in C^\infty(\overline{B_1(0)}, \mathbb{S}^{n-1})$ an. Dann gibt es nach Korollar 3.13 einen regulären Wert $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ von f . Also ist die kompakte Menge $f^{-1}(y)$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit (Zunächst in $B_1(0)$, dann aber, wenn wir f wie angegeben glätten, auch bis zum Rand, da f nach Konstruktion auf radialen Geradenstücken in der Nähe von \mathbb{S}^{n-1} konstant ist.). $f^{-1}(y)$ ist also eine eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand in $\overline{B_1(0)}$. Deren Rand ist eine Teilmenge

von $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B_1$. Es gilt $y \in f^{-1}(y)$, da f eine Retraktion ist. Sei V die Komponente von $f^{-1}(y)$, die y enthält. V ist eine eindimensionale kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit Rand, also diffeomorph zu einem abgeschlossenen Intervall. y ist der eine Randpunkt von V . Sei $z \neq y$ der andere, der ebenfalls auf ∂B_1 liegen muss. Es folgt $z = f(z)$ im Widerspruch zu $y, z \in f^{-1}(y)$. \square

Theorem 3.16 (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Sei $f : \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt, d. h. es gibt ein $x \in \overline{B_1(0)}$ mit $f(x) = x$.*

Beweis. Falls $f(x) \neq x$ für alle $x \in \overline{B_1(0)}$ gilt, definieren wir $g(x)$ als den Schnittpunkt einer in $f(x)$ beginnenden Halbgeraden durch x mit \mathbb{S}^{n-1} . Nach Konstruktion ist g eine Retraktion von $\overline{B_1(0)}$ auf \mathbb{S}^{n-1} . \square

4. ABBILDUNGSGRAD

In diesem Kapitel wollen wir den Brouwergrad untersuchen. Man untersucht ihn für Abbildungen zwischen geschlossenen Mannigfaltigkeiten oder zwischen Teilmengen des \mathbb{R}^n . Da der Rand des Definitionsgebietes Zusatzüberlegungen erfordert, wollen wir uns zunächst auf den \mathbb{R}^n -Fall konzentrieren; der Fall von Mannigfaltigkeiten ist dann einfacher.

Wir wählen einen analytischeren Zugang, wie man ihn beispielsweise auch in der nichtlinearen Funktionalanalysis untersucht und folgen [12]. Einen alternativen Zugang bietet die algebraische Topologie. Unterschiedliche Verallgemeinerungen des Abbildungsgrades finden sich in der Funktionalanalysis oder Topologie.

Definition 4.1 (Brouwergrad). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Sei $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ ein regulärer Wert von $f|_{\Omega}$. Dann definieren wir den **Brouwergrad** durch

$$d(f, \Omega, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} \det df(x).$$

Manchmal schreibt man auch $\deg(f, \Omega, y)$ statt $d(f, \Omega, y)$.

Mit Hilfe einer Reihe von Lemmata wollen wir diese Definition auch auf C^0 -Funktionen und nicht reguläre Punkte übertragen.

Bemerkung 4.2.

- (i) Zunächst einmal ist der Abbildungsgrad definiert, denn die Summe ist endlich: Sei y regulär und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus paarweise verschiedenen Punkten in $f^{-1}(y)$. Da $\overline{\Omega}$ kompakt ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $x_n \rightarrow x \in \overline{\Omega}$ konvergiert. Falls $x \in \Omega$ ist, ist x wegen $f(x) = y$ ein regulärer Punkt von f und somit ist f in einer kleinen Umgebung von x injektiv. Widerspruch zu $x_n \rightarrow x$ und $f(x_n) = f(x) = y$. Ist $x \in \partial\Omega$, so liefert die Stetigkeit von f , dass auch $f(x) = y$ gilt, wir hatten aber $y \notin f(\partial\Omega)$ angenommen. Somit ist $f^{-1}(y)$ endlich.
- (ii) In $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ ist die Menge der regulären Werte relativ offen und die Menge der singulären Werte relativ abgeschlossen. Nach dem Sardischen Satz ist die Menge der regulären Werte auch dicht in $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$.

Lemma 4.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $F \in C^1(\Omega \times (a, b), \mathbb{R}^n)$ und sei z eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve (d. h. $|z'| = 1$) mit $F(z(s)) = 0$ für alle $s \in (s_0, s_1)$. Schreibe $z(s) = (x(s), t(s)) \in \Omega \times (a, b)$. Dann gilt*

$$t'(s) \det \begin{pmatrix} F_z(z(s)) \\ z'(s) \end{pmatrix} = \det F_x(z(s)).$$

Hat F_z den Rang n , so ist $\det \begin{pmatrix} F_z \\ z' \end{pmatrix} \neq 0$.

Beweis. Aus $F(z(s)) = 0$ folgt $dF(z(s))\langle z'(s) \rangle = 0$ und in Komponenten

$$(4.1) \quad \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial F^k}{\partial z^l} (z^l)' \equiv \sum_{l=1}^n \frac{\partial F^k}{\partial x^l} (x^l)' + \frac{\partial F^k}{\partial t} t' = 0$$

für alle $k = 1, \dots, n$.

Wäre $\det \begin{pmatrix} F_z \\ z' \end{pmatrix} = 0$ und $\text{rang } F_z = n$, so gäbe es $\lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $(z^l)' = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial F^k}{\partial z^l}$.
Somit folgte

$$1 = \sum_{l=1}^{n+1} (z^l)'^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{\sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial F^k}{\partial z^l} (z^l)'}_{=0 \text{ (4.1)}} = 0.$$

Widerspruch.

Auch für die andere Behauptung verwenden wir am Ende (4.1).

$$\begin{aligned} t' \cdot \det \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial F^k}{\partial x^l} \right) & \left(\frac{\partial F^k}{\partial t} \right) \\ \left((x^l)' \right) & t' \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial F^k}{\partial x^l} \right) & \left(\frac{\partial F^k}{\partial t} t' \right) \\ \left((x^l)' \right) & (t')^2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial F^k}{\partial x^l} \right) & \left(\frac{\partial F^k}{\partial t} t' + \sum_{l=1}^n \frac{\partial F^k}{\partial x^l} (x^l)' \right) \\ \left((x^l)' \right) & (t')^2 + \sum_{l=1}^n (x^l)'^2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial F^k}{\partial x^l} \right) & 0 \\ \left((x^l)' \right) & 1 \end{pmatrix} = \det \left(\frac{\partial F^k}{\partial x^l} \right). \quad \square \end{aligned}$$

Unter kleinen Störungen der Funktion ändert sich der Abbildungsgrad nicht.

Lemma 4.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Seien $f_0, f_1 \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Sei $y \in \mathbb{R}^n \setminus f_0(\partial\Omega)$, $\sigma := \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f_0(x) - f_1(x)| < \rho := \inf_{x \in \partial\Omega} |f_0(x) - y|$.

Sei y ein regulärer Wert von f_0 und f_1 . Dann ist

$$d(f_0, \Omega, y) = d(f_1, \Omega, y).$$

Beweis. Vorbemerkung: Sei y ein regulärer Wert von f , f erfülle die Voraussetzungen an f_i . Gelte ohne Einschränkung $y = 0$. Dann tritt für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ einer der folgenden Fälle ein:

- (i) $f^{-1}(B_\varepsilon(y)) = \emptyset$
- (ii) Wir definieren x_j durch $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$ und wählen Umgebungen $U_j(x_j)$ von x_j , so dass $f|_{U_j(x_j)}: U_j(x_j) \rightarrow B_\varepsilon(y)$ für $1 \leq j \leq m$ ein Diffeomorphismus ist und $f^{-1}(B_\varepsilon(y)) = U_1(x_1) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} U_m(x_m)$ gilt: Nach Bemerkung 4.2 ist das Urbild endlich. Dann gibt es zu jedem Punkt x_j eine Umgebung V_j , so dass $f|_{V_j}$ ein Diffeomorphismus auf das Bild ist. Durch Verkleinern der Umgebungen V_j können wir ohne Einschränkung annehmen, dass diese Mengen paarweise disjunkt sind. Die Mengen $f(V_j)$ sind jeweils offene Umgebungen von y . Somit ist auch ihr Schnitt eine Umgebung von y . Wähle nun $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(y) \subset \bigcap_{j=1}^m V_j$ gilt. Wenn wir nun $U_j(x_j) := (f|_{V_j})^{-1}(B_\varepsilon(y))$ wählen, folgt die Behauptung.

In beiden Fällen ist

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, z) \quad \text{für alle } z \in B_\varepsilon(y).$$

Nun zum eigentlichen Beweis: Gelte ohne Einschränkung $y = 0$. Definiere

$$F(x, t) := (1 - t)f_0(x) + tf_1(x)$$

für $0 \leq t \leq 1$ und wähle $\varepsilon > 0$ so, dass die Vorbemerkung für f_0 und für f_1 gilt. Wähle einen regulären Wert z von F mit $|z| < \min\{\varepsilon, \rho - \sigma\}$. Wegen $|z| < \varepsilon$ ist z ein regulärer Wert für f_0 und f_1 . Aufgrund der Vorbemerkung erhalten wir $d(f_j, \Omega, 0) = d(f_j, \Omega, z)$ für $j = 0, 1$.

Die Menge $F^{-1}(z) \cap (\Omega \times [0, 1])$ ist kompakt, da für $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$

$$|F(x, t) - z| = |f_0(x) + t(f_1(x) - f_0(x)) - z| \geq \rho - \sigma - |z| > 0$$

gilt. Schreibe $f_j^{-1}(z) = \{x_j^1, \dots, x_j^{m_j}\}$ für $j = 0, 1$. Nach Voraussetzung ist z ein regulärer Wert von $f_0 = F(\cdot, 0)$ und $f_1 = F(\cdot, 1)$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es daher ein $\delta > 0$, so dass die Mengen $F^{-1}(z) \cap (\Omega \times [0, \delta])$ und $F^{-1}(z) \cap (\Omega \times [1 - \delta, 1])$ entweder leer sind oder aus m_0 bzw. m_1 disjunkten C^1 -Kurven bestehen. Diese beschreiben wir als Graphen der Funktionen $\alpha_j^i(t)$, $j = 0, 1$, $i = 1, \dots, m_j$, $0 \leq t \leq \delta$ bzw. $1 - \delta \leq t \leq 1$. Es gilt $\alpha_j^i(j) = x_j^i$.

Nach Voraussetzung ist z auch ein regulärer Wert von F . Daher ist $F^{-1}(z)$ eine kompakte eindimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand (Benutze, dass F für ein kleines $\zeta > 0$ auch für $t \in (-\zeta, 1 + \zeta)$ in z regulär ist. Das Urbild von z unter der Fortsetzung ist dann eine eindimensionale Mannigfaltigkeit. Da z für $f_0 = F(\cdot, 0)$ und $f_1 = F(\cdot, 1)$ regulär ist, können wir nahe $t = 0$ und $t = 1$ jede Zusammenhangskomponente als Graph über der t -Achse schreiben. Der Rand ist $F^{-1}(z) \cap (\Omega \times \{0, 1\})$. Aus diesen Überlegungen geht hervor, dass das Urbild genau eine Mannigfaltigkeit im später noch zu definierenden Sinn ist, dass es also lokal diffeomorph zu $[0, 1)$ oder $(0, 1]$ ist.). Die endlich vielen Zusammenhangskomponenten sind also diffeomorph zu \mathbb{S}^1 oder $[0, 1]$. Sei W eine Zusammenhangskomponente von $F^{-1}(z)$, die zu $[0, 1]$ diffeomorph ist. Wir parametrisieren W nach der Bogenlänge und erhalten $W = \{w(s) = (x(s), t(s)) : s_0 \leq s \leq s_1\}$. Es gilt $t(s_0), t(s_1) \in \{0, 1\}$. Weiterhin ist $t'(s_j) \neq 0$: Sei nämlich $t \in [0, \delta]$ oder $t \in [1 - \delta, 1]$, so ist wegen $x(s) = \alpha_j^i(t(s))$

$$1 = |w'(s)| = \left| \left((\alpha_j^i)' t'(s), t'(s) \right) \right| = |t'(x)| \cdot \left| \left((\alpha_j^i)', 1 \right) \right|.$$

Es treten drei Fälle auf:

- (i) W hat beide Randpunkte in $\Omega \times \{0\}$: Dann gelten $t'(s_0) > 0$ und $t'(s_1) < 0$.
- (ii) W hat beide Randpunkte in $\Omega \times \{1\}$: Dann gelten $t'(s_0) < 0$ und $t'(s_1) > 0$.
- (iii) W hat einen Randpunkt in $\Omega \times \{0\}$, ohne Einschränkung $w(t(s_0))$, und einen Randpunkt in $\Omega \times \{1\}$: Dann gelten $t'(s_0) > 0$ und $t'(s_1) > 0$.

Auf der Menge $F^{-1}(z)$ hat dF den Rang n . Somit kann sich nach Lemma 4.3 das Vorzeichen von $\det \begin{pmatrix} F_z \\ z' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} dF \\ z' \end{pmatrix}$ auf einer Zusammenhangskomponente W nicht ändern. Mit Lemma 4.3 folgt daher aufgrund des ggf. auftretenden Vorzeichenwechsels zwischen $t'(s_0)$ und $t'(s_1)$ in den jeweiligen Fällen

- (i) $\operatorname{sgn} \det F_x(x(s_0), 0) = -\operatorname{sgn} \det F_x(x(s_1), 0)$,
- (ii) $\operatorname{sgn} \det F_x(x(s_0), 1) = -\operatorname{sgn} \det F_x(x(s_1), 1)$,
- (iii) $\operatorname{sgn} \det F_x(x(s_0), 0) = \operatorname{sgn} \det F_x(x(s_1), 1)$.

Nun ist $F_x(x, j) = df_j(x)$ für $j = 0, 1$. Aufsummieren in der Definition des Abbildungsgrades liefert daher

$$d(f_0, \Omega, z) = d(f_1, \Omega, z).$$

Da diese Abbildungsgrade nach Überlegungen von oben mit denen im Ursprung übereinstimmen, folgt die Behauptung. \square

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir den Abbildungsgrad für beliebige, d. h. nicht notwendigerweise reguläre, Werte definieren.

Definition 4.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und sei $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Dann definieren wir

$$d(f, \Omega, y) := d(f, \Omega, z),$$

wobei z ein regulärer Wert von f mit $|z - y| < \frac{1}{3} \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) \equiv \frac{1}{3}\rho$ ist.

Lemma 4.6.

- (i) $d(f, \Omega, z)$ ist unabhängig von der speziellen Wahl von z .
- (ii) Lemma 4.4 gilt ohne die Voraussetzung, dass y regulär ist.

Beweis.

- (i) Seien z_0, z_1 reguläre Werte von f und gelte $|z_j - y| < \frac{1}{3}\rho$. Setze $f_j := f - z_j$. Dann folgt $d(f, \Omega, z_j) = d(f_j, \Omega, 0)$ für $j = 0, 1$. Es gilt

$$\sigma := \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f_0(x) - f_1(x)| = |z_0 - z_1| \leq |z_0 - y| + |y - z_1| < \frac{2}{3}\rho$$

und für $x \in \partial\Omega$ ist

$$|f_0(x)| = |f(x) - z_0| \geq |f(x) - y| - |y - z_0| \geq \rho - \frac{1}{3}\rho = \frac{2}{3}\rho.$$

Nach Lemma 4.4 folgt daher $d(f_0, \Omega, 0) = d(f_1, \Omega, 0)$. Zusammengenommen folgt die Behauptung.

- (ii) Sei $y \notin f_0(\partial\Omega)$. Damit gilt aufgrund der Voraussetzungen von Lemma 4.4 auch $y \notin f_1(\partial\Omega)$. Wähle einen regulären Wert \tilde{y} für f_0 und f_1 mit $|\tilde{y} - y| < \frac{1}{3} \text{dist}(y, f_j(\partial\Omega))$, $j = 0, 1$ und (die folgende Ungleichung gilt nach Voraussetzung von Lemma 4.4 bereits für y statt \tilde{y})

$$\sup_{\Omega} |f_0 - f_1| =: \sigma < \text{dist}(\tilde{y}, f_0(\partial\Omega)).$$

Nach Lemma 4.4 und nach der Definition des Abbildungsgrades für nicht reguläre Werte folgt

$$d(f_0, \Omega, y) \stackrel{\text{Def.}}{=} d(f_0, \Omega, \tilde{y}) \stackrel{\text{Lem.}}{=} d(f_1, \Omega, \tilde{y}) \stackrel{\text{Def.}}{=} d(f_1, \Omega, y). \quad \square$$

Wir erweitern die Definition auch auf stetige Abbildungen.

Definition 4.7. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und sei $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$, so definieren wir

$$d(f, \Omega, y) := d(f_0, \Omega, y),$$

wobei $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\sup_{x \in \Omega} |f(x) - f_0(x)| < \frac{1}{3} \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$ ist.

Lemma 4.8.

- (i) Der Abbildungsgrad für stetige Funktionen ist wohldefiniert, hängt also nicht von der speziellen Wahl der glatten Funktion ab.
- (ii) Lemma 4.4 gilt auch für $f_0, f_1 \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und nicht notwendigerweise reguläre Werte.

Beweis.

- (i) Seien $f_0, f_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\sup_{x \in \Omega} |f(x) - f_i(x)| < \frac{1}{3} \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) =: \frac{1}{3}\rho$, $i = 0, 1$. Es folgt $\sup_{\Omega} |f_0(x) - f_1(x)| < \frac{2}{3}\rho$. Weiterhin gilt

$$\text{dist}(y, f_i(\partial\Omega)) \geq \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) - \sup_{\Omega} |f - f_i| > \rho - \frac{1}{3}\rho = \frac{2}{3}\rho$$

für $i = 0, 1$. Nach Lemma 4.6 folgt $d(f_0, \Omega, y) = d(f_1, \Omega, y)$. Wir erhalten die Wohldefiniertheit.

(ii) Seien $f_0, f_1 \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und sei $y \in \mathbb{R}^n \setminus f_0(\partial\Omega)$ mit

$$\sigma := \sup_{\Omega} |f_0 - f_1| < \text{dist}(y, f_0(\partial\Omega)) =: \rho.$$

Somit ist $\text{dist}(y, f_1(\partial\Omega)) \geq \rho - \sigma > 0$.

Wähle nun $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\sup_{\Omega} |f_j - \tilde{f}_j| < \frac{1}{3}(\rho - \sigma)$, also

$$\sup_{\Omega} |f_j - \tilde{f}_j| < \frac{1}{3} \text{dist}(y, f_j(\partial\Omega)) \quad \text{für } j = 0, 1.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} |\tilde{f}_0 - \tilde{f}_1| &\leq \sup_{\Omega} |\tilde{f}_0 - f_0| + \sup_{\Omega} |f_0 - f_1| + \sup_{\Omega} |f_1 - \tilde{f}_1| \\ &< \frac{1}{3}(\rho - \sigma) + \sigma + \frac{1}{3}(\rho - \sigma) = \frac{2}{3}\rho + \frac{1}{3}\sigma \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{dist}(y, \tilde{f}_0(\partial\Omega)) &\geq \text{dist}(y, f_0(\partial\Omega)) - \sup_{\Omega} |f_0 - \tilde{f}_0| \\ &> \rho - \frac{1}{3}(\rho - \sigma) = \frac{2}{3}\rho + \frac{1}{3}\sigma. \end{aligned}$$

Wir erhalten insgesamt mit Lemma 4.6

$$d(f_0, \Omega, y) \stackrel{\text{Def.}}{=} d(\tilde{f}_0, \Omega, y) \stackrel{\text{Lem.}}{=} d(\tilde{f}_1, \Omega, y) \stackrel{\text{Def.}}{=} d(f_1, \Omega, y). \quad \square$$

Theorem 4.9 (Eigenschaften des Brouwer-Grades). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.*

- (i) *Ist $F \in C^0(\bar{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$ eine Homotopie und $y \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$, so ist $d(F(\cdot, t), \Omega, y)$ von t unabhängig. (Homotopieinvarianz)*
- (ii) *Ist $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$, so ist $d(f, \Omega, y) = d(f - y, \Omega, 0)$ und $d(f, \Omega, \cdot)$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ konstant.*
- (iii) *Ist $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ und $d(f, \Omega, y) \neq 0$, so existiert $x \in \Omega$ mit $f(x) = y$.*
- (iv) *Sei $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ mit disjunkten offenen Mengen Ω_i und ist $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2)$, so ist*

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y).$$

- (v) *Sei $A \subset \bar{\Omega}$ abgeschlossen und $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega \cup A)$. Dann ist*

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega \setminus A, y).$$

(Ausschneidungseigenschaft)

Beweis.

- (i) Da $\partial\Omega \times [0, 1]$ kompakt ist und F stetig ist, ist $\rho := \text{dist}(y, F(\partial\Omega \times [0, 1])) > 0$. Da F auf $\bar{\Omega} \times [0, 1]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $t, t_0 \in [0, 1]$ mit $|t - t_0| < \delta$

$$\sup_{\Omega} |F(x, t) - F(x, t_0)| < \rho$$

gilt. Nach Lemma 4.8 ist

$$d(F(\cdot, t), \Omega, y) = d(F(\cdot, t_0), \Omega, y)$$

für solche t_0, t . Die Behauptung folgt.

- (ii) Die Behauptung $d(f, \Omega, y) = d(f - y, \Omega, 0)$ ist für $f \in C^2$ und reguläre Werte y von f trivial. Der allgemeine Fall folgt daher mit Lemma 4.6 und Lemma 4.8.

Zur Konstanz auf Zusammenhangskomponenten: Seien $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ Punkte in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Sei nun $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ ein stetiger Weg mit $\gamma(0) = y_0$ und $\gamma(1) = y_1$. Setze

$F(x, t) := f(x) - \gamma(t)$. Dann ist $0 \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$, also folgt aufgrund der Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, y_0) &= d(f - y_0, \Omega, 0) = d(f - \gamma(0), \Omega, 0) = d(F(\cdot, 0), \Omega, 0) \\ &= d(F(\cdot, 1), \Omega, 0) = d(f - y_1, \Omega, 0) = d(f, \Omega, y_1). \end{aligned}$$

- (iii) Sei $y \notin f(\overline{\Omega})$. Setze $\rho := \text{dist}(y, f(\overline{\Omega})) > 0$. Wähle $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\sup_{\Omega} |f_0 - f| < \frac{1}{3}\rho$. Dann ist $d(f, \Omega, y) = d(f_0, \Omega, y)$ nach Lemma 4.8 und es gilt $\text{dist}(y, f_0(\overline{\Omega})) > \frac{2}{3}\rho$. Wähle einen regulären Wert y_0 von f_0 mit $|y - y_0| < \frac{2}{9}\rho$. Nach Lemma 4.6 ist $d(f_0, \Omega, y) = d(f_0, \Omega, y_0)$ und $\text{dist}(y_0, f_0(\overline{\Omega})) > \frac{2}{3}\rho - \frac{2}{9}\rho > 0$. Daher ist $d(f_0, \Omega, y_0) = 0$, denn y_0 besitzt in der allerersten Definition des Abbildungsgrades keine Urbilder in $\overline{\Omega}$. Somit ist auch $d(f, \Omega, y) = 0$.
- (iv) Dies ist für $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und einen regulären Wert y trivial und folgt sonst mit Hilfe von Lemma 4.6 und Lemma 4.8.
- (v) Es ist $\partial(\Omega \setminus A) \subset \partial\Omega \cup A$. Da $y \notin f(\partial(\Omega \setminus A))$ ist, ist $d(f, \Omega \setminus A, y)$ wohldefiniert. Da weiterhin $\partial\Omega \cup A$ kompakt ist, ist $\rho := \text{dist}(y, f(\partial\Omega \cup A)) > 0$. Wähle nun $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\sup_{\Omega} |f - f_0| < \frac{1}{3}\rho$ und einen regulären Wert y_0 von f_0 mit $|y - y_0| < \frac{2}{9}\rho$. Wie im Beweis von Teil (iii) folgt $d(f, \Omega \setminus A, y) = d(f_0, \Omega \setminus A, y_0)$. Aus $y_0 \notin f_0(\partial\Omega \cup A)$ folgt die erste Gleichheit in

$$d(f_0, \Omega, y_0) = d(f_0, \Omega \setminus A, y_0) = d(f, \Omega \setminus A, y). \quad \square$$

Die Homotopieinvarianz impliziert, dass $d(f, \Omega, y)$ nicht von f insgesamt sondern nur von $f|_{\partial\Omega}$ abhängt.

Korollar 4.10. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Seien $f_0, f_1 \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $f_0|_{\partial\Omega} = f_1|_{\partial\Omega}$. Dann gilt

$$d(f_0, \Omega, y) = d(f_1, \Omega, y)$$

für $y \notin f_0(\partial\Omega) = f_1(\partial\Omega)$.

Beweis. Wende die Homotopieinvarianz auf die Homotopie $F(x, t) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$ an und berücksichtige, dass $F(x, t) = f_0(x) = f_1(x)$ für alle $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$ gilt. \square

4.1. Anwendungen des Abbildungsgrades.

Theorem 4.11 (Brouwerscher Fixpunktsatz). Sei $f: \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt, d. h. es gibt ein $x \in B_1(0)$ mit $f(x) = x$.

Beweis. Definiere $F(x, t) := x - tf(x)$ für $(x, t) \in \overline{B_1(0)} \times [0, 1]$. Für $|x| = 1$ und $0 \leq t < 1$ ist $|F(x, t)| \geq 1 - t > 0$. Nehme an, dass f keinen Fixpunkt auf $\partial B_1(0)$ besitzt. Dann gilt $F(x, t) \neq 0$ für $(x, t) \in \partial B_1(0) \times [0, 1]$. Somit ist aufgrund der Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades

$$d(\text{id} - f, B_1(0), 0) = d(\text{id}, B_1(0), 0) = 1 \neq 0$$

und somit existiert ein $x \in B_1(0)$ mit $(\text{id} - f)(x) = 0$. \square

Korollar 4.12. Sei X homöomorph zu $\overline{B_1(0)}$. Dann besitzt jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow X$ einen Fixpunkt.

Beweis. Übung. \square

Theorem 4.13 (Perron-Frobenius). Sei $A = (a_{ij}^i)_{1 \leq i, j \leq n}$ mit $a_{ij}^i \geq 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Dann gibt es $\lambda \geq 0$ und $x \neq 0$ mit $x^i \geq 0$ für alle $1 \leq i \leq n$, so dass $Ax = \lambda x$.

Beweis. Setze $D := \mathbb{S}^{n-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x^i \geq 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}$. D ist homöomorph zu $\overline{B^{n-1}(0)}$. Sei ohne Einschränkung $Ax \neq 0$ für alle $x \in D$, denn sonst folgt die Behauptung direkt für ein $x_0 \in D$ mit $Ax_0 = 0$ und $\lambda = 0$. Definiere $f: D \rightarrow D$ durch $f(x) := \frac{Ax}{|Ax|}$. Dann besitzt f einen Fixpunkt x_0 und die Behauptung folgt aus $\lambda x_0 \equiv |Ax_0|x_0 = Ax_0$. \square

Theorem 4.14. *Sei n ungerade. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $0 \in \Omega$. Sei $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ stetig. Dann gibt es $x \in \partial\Omega$ und $\lambda \neq 0$, so dass $f(x) = \lambda x$ gilt.*

Beweis. Sei ohne Einschränkung f zu $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ fortgesetzt. Da n ungerade ist, gilt $d(-\text{id}, \Omega, 0) = -1$. Ist $d(f, \Omega, 0) \neq -1$, so besitzt die Homotopie $H(x, t) := (1-t)f(x) + t(-x)$ eine Nullstelle $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0, 1)$. Es folgt $f(x_0) = \frac{t_0}{1-t_0}x_0$. Ist $d(f, \Omega, 0) = -1$, so wenden wir dasselbe Argument mit der Identität und $H(x, t) := (1-t)f(x) + tx$ an. \square

Korollar 4.15 (Satz vom Igel). *Sei n ungerade. Sei $V: \partial B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges tangentes Vektorfeld an die Sphäre, d. h. gelte $\langle V(x), x \rangle = 0$ für alle $x \in \partial B_1(0)$. Dann besitzt V eine Nullstelle.*

Bemerkung 4.16. Ist n gerade, so gibt es ein nicht verschwindendes tangentes Vektorfeld auf \mathbb{S}^{n-1} , nämlich

$$V(x^1, \dots, x^{2m}) = (-x^2, x^1, -x^4, x^3, \dots, -x^{2m}, x^{2m-1}).$$

Definition 4.17 (Abbildungsgrad für Sphären). Sei $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ stetig und $\tilde{f}: \overline{B_1^n(0)} \rightarrow \overline{B_1^n(0)}$ sei eine stetige Fortsetzung von f , z. B.

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} |x|f\left(\frac{x}{|x|}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Definiere den **Grad** von f , $\deg(f)$, durch

$$\deg(f) := d(\tilde{f}, B_1(0), 0).$$

Bemerkung 4.18.

- (i) Seien \tilde{f}_0 und \tilde{f}_1 zwei verschiedene Fortsetzungen von f . Dann ist $H(x, t) := (1-t)\tilde{f}_0(x) + t\tilde{f}_1(x)$ eine Homotopie zwischen diesen beiden Fortsetzungen mit festen Randwerten. Somit ist $d(\tilde{f}_0, B_1(0), 0) = d(\tilde{f}_1, B_1(0), 0)$ und $\deg f$ ist wohldefiniert.
- (ii) Seien $f_0, f_1: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ zwei homotope Abbildungen. Setzen wir eine Homotopie $F(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$ mit $F(\cdot, 0) = f_0$ und $F(\cdot, 1) = f_1$ zu einer Homotopie $\tilde{F}(x, t)$, $(x, t) \in \overline{B_1(0)} \times [0, 1]$, fort, so folgt

$$\deg f_0 = d(\tilde{F}(\cdot, 0), B_1(0), 0) = d(\tilde{F}(\cdot, 1), B_1(0), 0) = \deg f_1.$$

Somit hängt $\deg f$ nur von der Homotopieklasse von f ab.

- (iii) Für $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ besteht $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1}) \supset \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$ wegen $f(\mathbb{S}^{n-1}) \subset \mathbb{S}^{n-1}$ aus maximal zwei Zusammenhangskomponenten. Handelt es sich um nur eine Zusammenhangskomponente, so ist f nicht surjektiv und es gilt $\deg f = 0$. Die Umkehrung ist i. a. falsch (warum?).

Der Abbildungsgrad charakterisiert eine Abbildung $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ sogar bis auf Homotopie.

Theorem 4.19 (Satz von Hopf). *Seien $f, g: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ stetig. Dann sind f und g genau dann homotop, wenn $\deg f = \deg g$ gilt.*

Beweis. Siehe [5, Kor. 4.25]. (Dort wird unter Verwendung von Homotopietheorie gezeigt, dass $\pi_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ gilt.) \square

Der im Satz von Hopf verwendete Abbildungsgrad ist als die Zahl definiert, die man erhält, wenn man $f_*: \pi_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow \pi_n(\mathbb{S}^n)$ vermöge $\pi_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ als Multiplikation mit einer ganzen Zahl auffasst. Weil beide Abbildungsgrade jedoch übereinstimmen, haben wir keine neue Bezeichnung eingeführt.

Lemma 4.20. *Der mit Hilfe von Homotopiegruppen und im Satz von Hopf verwendete Abbildungsgrad \deg_H stimmt mit dem bisher definierten Abbildungsgrad überein.*

Wahrscheinlich gibt es auch einen deutlich einfacheren Beweis, der ohne den Satz von Hopf auskommt.

Beweisskizze. Für Äquivalenzklassen von homotopen Abbildungen $f, g: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, also für $[f], [g] \in \pi_n(\mathbb{S}^n)$, erklärt man wie folgt eine Gruppenstruktur: Zunächst einmal kann man jede Abbildung $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ so stetig deformieren, dass ein fester Referenzpunkt N im Definitionsbereich auf einen (möglicherweise anderen) festen Referenzpunkt, hier aber wieder N , abgebildet wird. Weiterhin können wir die Gebiete um N , die auf N abgebildet werden, so vergrößern, dass sich der Teil, der nicht auf N abgebildet wird, in einer kleinen Kreisscheibe befindet. Wir wollen dies für f und g annehmen.

Fixiere nun zwei disjunkte Kreisscheiben auf \mathbb{S}^n . Definiere nun $[f + g] \in \pi_n(\mathbb{S}^n)$, als die Äquivalenzklasse der Abbildung, die außerhalb dieser beiden Kreisscheiben alles auf N abbildet und die die Punkte in der ersten Kreisscheibe genauso wie die Punkte in der ausgezeichneten Kreisscheibe der Abbildung f abbildet und analog für die zweite Kreisscheibe und g . (Übung: Rechne nach, dass dies wohldefiniert ist und mit dem neutralen Element $[f] \in \pi_1(\mathbb{S}^n)$, $f(x) = N$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$, eine Gruppe bildet. Für $n \geq 2$ ist diese Gruppe abelsch.)

(Es gilt auch allgemein, dass die Homotopieklassen von Abbildungen $\mathbb{S}^n \rightarrow A$, A ein einfach zusammenhängender topologischer Raum (oder wir betrachten punktierte Räume), mit dieser Verknüpfung eine Gruppe bilden, $\pi_n(A)$. Auch sie ist für $n \geq 2$ abelsch.)

(Identifizieren wir an zwei Sphären einen Punkt, so bezeichnen wir den so entstandenen topologischen Raum als Einpunktvereinigung $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$. Dies ist der Raum, den man erhält, wenn man auf \mathbb{S}^n alles außer zwei disjunkten Kreisscheiben identifiziert. Dies zeigt anschaulich, warum es sich um eine Addition von Abbildungen handelt.)

Da beide Abbildungsgrade nur von der Homotopieklasse von f abhängen, können wir besonders einfache Vertreter wählen. Der Satz von Hopf liefert, dass in der Liste

$$\dots, -\text{id} - \text{id}, -\text{id}, 0, \text{id}, \text{id} + \text{id}, \dots$$

für alle Homotopieklassen ein Vertreter steht. Da beide Abbildungsgrade Gruppenhomomorphismen sind, also $\deg(f + g) = \deg f + \deg h$ bzw. $\deg_H(f + g) = \deg_H f + \deg_H h$ erfüllen, genügt der Nachweis von $\deg \text{id} = \deg_H \text{id}$. $\deg \text{id} = 1$ ist bekannt. Der Satz von Hopf, Theorem 4.19 mit Kommentar, liefert $\deg_H \text{id} = 1$. \square

Theorem 4.21. *Seien $f, g: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ stetig. Dann gilt*

$$\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g.$$

Beweisidee. Mit algebraischer Topologie: Eine weitere äquivalente Definition des Abbildungsgrades benutzt Homologiegruppen. Wie bei Homotopiegruppen ist

$$f_*: H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n)$$

vermöge $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ Multiplikation mit einem $a \in \mathbb{Z}$. Setze $\deg f := a$. Dann folgt die Behauptung aus der Funktorialität: $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

Mit unseren Mitteln kann man auf einer orientierbaren Mannigfaltigkeit wie \mathbb{S}^n Karten fixieren und den Abbildungsgrad dann wie in der allerersten Definition einführen. Da der Abbildungsgrad lokal (und damit auf \mathbb{S}^n global) konstant ist, folgt die Behauptung dann aus dem noch zu zeigenden Lerayschen Produktsatz 4.25. \square

Bemerkung 4.22. Ist $f \in O(n)$, so ist $\deg f = \operatorname{sgn} \det f$, insbesondere gilt $\deg(\operatorname{id}) = 1$ und $\deg(-\operatorname{id}) = (-1)^n$. (Die Sphäre ist $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.)

Mit Hilfe des topologischen Index erhalten wir eine Summenformel, die der ursprünglichen Definition des Abbildungsgrades ähnelt.

Definition 4.23. Sei $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und sei $x_0 \in \Omega$ ein isolierter Punkt von $f^{-1}(f(x_0))$, so definieren wir den **Index** von f im Punkt x_0 als

$$\operatorname{ind}(f, x_0) := d(f, U, f(x_0)),$$

wobei $U \Subset \Omega$ eine offene Umgebung von x_0 mit $\bar{U} \cap f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$ ist.

Bemerkung 4.24.

- (i) $\operatorname{ind}(f, x_0)$ hängt nicht von der Auswahl von U ab.
- (ii) Sei Ω offen und beschränkt. Sei $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und sei $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Gelte $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$ für paarweise verschiedene Punkte x_i , so gilt

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^N \operatorname{ind}(f, x_i).$$

Beweis.

- (i) Folgt aus der Ausschneidungseigenschaft (Übung).
- (ii) Wähle paarweise disjunkte Umgebungen U_j von x_j , $U_j \subset \Omega$ und setze $U := \bigcup_j U_j$. Dann ist $A := \bar{\Omega} \setminus U$ abgeschlossen und es gilt $f(x) \neq y$ für alle $x \in A$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, y) &= d(f, \underbrace{\bar{\Omega} \setminus A}_{=\dot{\bigcup}_j U_j}, y) && \text{(Ausschneidung)} \\ &= \sum_j d(f, U_j, y) && \text{(disjunkte Mengen)} \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_j \operatorname{ind}(f, x_j). && \square \end{aligned}$$

Theorem 4.25 (Produktsatz von Leray). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und seien Z_0, Z_1, \dots die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Sei Z_0 die unbeschränkte Komponente. Sei $g \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eigentlich (d. h. Urbilder kompakter Mengen sind kompakte $\iff |g(x)| \rightarrow \infty$ für $|x| \rightarrow \infty$). Sei $y \in \mathbb{R}^n \setminus (g \circ f(\partial\Omega))$. Dann ist $y \notin g(\partial Z_i)$ und es gilt

$$d(g \circ f, \Omega, y) = \sum_{i \geq 1} d(g, Z_i, y) \cdot d(f, \Omega, Z_i),$$

wobei $d(f, \Omega, Z_i)$ den konstanten Wert von $d(f, \Omega, \cdot)$ auf Z_i bezeichnet.

Die wesentliche Beweisidee ist, geeignet zu approximieren und Kettenregel und Determinantenmultiplikationssatz zu verwenden.

Beweis. Beachte zunächst, dass $d(f, \Omega, Z_0) = 0$ ist, da Z_0 unbeschränkt und $f(\Omega)$ beschränkt ist, siehe Eigenschaft (iii) des Brouwer-Grades.

Wegen $\partial Z_i \subset f(\partial\Omega)$ folgt $y \notin g(\partial Z_i)$ für alle i . Setze $\rho := \text{dist}(y, g \circ f(\partial\Omega)) > 0$. Dann ist $\text{dist}(y, g(\partial Z_i)) \geq \rho$ für alle i . Es ist $g^{-1}(\{y\}) \equiv g^{-1}(y) \subset \bigcup_{i \geq 1} Z_i$. Da $g^{-1}(y)$

kompakt ist, existiert m , so dass $g^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=1}^m Z_i$ gilt. Somit ist $d(g, Z_i, y) = 0$ für $i > m$ und die obige Summe ist endlich. (Beachte, dass die Anzahl der Zusammenhangskomponenten selbst für $f \in C^\infty$ nicht endlich zu sein braucht.) Wähle $R > 0$, so dass $f(\bar{\Omega}) \subset B_R(0)$ gilt. Wähle $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eigentlich mit $\sup_{|x| \leq R} |g(x) - g_0(x)| < \rho$. Es folgt $\sup_{x \in \Omega} |g \circ f(x) - g_0 \circ f(x)| < \rho$. Weiterhin folgt $y \notin g_0(f(\partial\Omega))$. Aufgrund der Homotopieinvarianz erhalten wir $d(g \circ f, \Omega, y) = d(g_0 \circ f, \Omega, y)$ und $d(g, Z_i, y) = d(g_0, Z_i, y)$ für alle $i \geq 1$. Daher wollen wir ohne Einschränkung $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ annehmen.

Es ist $g^{-1}(y) \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$ und $g^{-1}(y)$ ist kompakt. Daher ist

$$\delta := \text{dist}(g^{-1}(y), f(\partial\Omega)) > 0.$$

Wegen $\partial Z_i \subset f(\partial\Omega)$ folgt insbesondere auch $\text{dist}(g^{-1}(y), \partial Z_i) \geq \delta$. Definiere $V_i := B_{\delta/2}(Z_i \cap g^{-1}(y)) \subset Z_i$. Dann gelten $V_i = \emptyset$ für $i > m$ und $V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Aufgrund der Ausschneidungseigenschaft erhalten wir

$$(4.2) \quad d(g, Z_i, y) = d(g, V_i, y).$$

und

$$(4.3) \quad \text{dist}(V_i, f(\partial\Omega)) \geq \frac{\delta}{2}.$$

Wähle jetzt $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\sup_{\Omega} |f(x) - f_0(x)| < \frac{\delta}{2}$$

und

$$\sup_{\Omega} |g \circ f(x) - g \circ f_0(x)| < \rho = \text{dist}(y, g \circ f(\partial\Omega)).$$

Aufgrund der Homotopieinvarianz und (4.3) erhalten wir

$$(4.4) \quad d(g \circ f, \Omega, y) = d(g \circ f_0, \Omega, y)$$

und

$$(4.5) \quad d(f, \Omega, Z_i) = d(f, \Omega, v) = d(f_0, \Omega, v) \quad \text{für alle } v \in V_i.$$

Wähle einen regulären Wert y_0 von $g \circ f_0$ so nahe bei y , so dass $g^{-1}(y_0) \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$,

$$(4.6) \quad d(g, V_i, y) = d(g, V_i, y_0)$$

und

$$(4.7) \quad d(g \circ f_0, \Omega, y) = d(g \circ f_0, \Omega, y_0)$$

gelten. Nach Kettenregel gilt $d(g \circ f_0)(x) = dg(f_0(x)) \cdot df_0(x)$. Da y_0 ein regulärer Wert von $g \circ f_0$ ist, ist y_0 auch ein regulärer Wert von g (Kettenregel). Setze

$g^{-1}(y_0) =: \{z_1, \dots, z_N\}$. Weiterhin sind die Punkte z_i für f regulär (wieder Kettenregel). Wir setzen $f_0^{-1}(z_j) \cap \Omega = \{x_{jk} : k = 1, \dots, M_j\}$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
d(g \circ f, \Omega, y) &\stackrel{(4.4), (4.7)}{=} d(g \circ f_0, \Omega, y_0) \\
&= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{M_j} \operatorname{sgn} \det d(g \circ f_0)(x_{jk}) \\
&= \sum_i \sum_{z_j \in V_i} \sum_{x \in f^{-1}(z_j)} \operatorname{sgn} \det dg(z_j) \cdot \operatorname{sgn} \det df_0(x) \\
&= \sum_i \sum_{z_j \in V_i} \operatorname{sgn} \det dg(z_j) \cdot \left(\sum_{x \in f^{-1}(z_j)} \operatorname{sgn} \det df_0(x) \right) \\
&= \sum_i \sum_{z_j \in V_i} \operatorname{sgn} \det dg(z_j) \cdot d(f_0, \Omega, z_j).
\end{aligned}$$

Nun ist $z_j \in V_i$ und nach (4.5) folgt daher $d(f_0, \Omega, z_j) = d(f, \Omega, Z_i)$. Wegen $d(f, \Omega, Z_0) = 0$ kann die Summation bei $i = 1$ starten. Es folgt weiter

$$\begin{aligned}
d(g \circ f, \Omega, y) &= \sum_{i \geq 1} d(f, \Omega, Z_i) \cdot \sum_{z_j \in V_i} \operatorname{sgn} \det dg(z_j) \\
&= \sum_{i \geq 1} d(f, \Omega, Z_i) \cdot d(g, V_i, y_0) \\
&\stackrel{(4.6), (4.2)}{=} \sum_{i \geq 1} d(f, \Omega, Z_i) \cdot d(g, Z_i, y)
\end{aligned}$$

wie behauptet. \square

Als Korollar erhalten wir eine n -dimensionale Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes.

Theorem 4.26 (Satz von Jordan-Brouwer). *Sei $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und eineindeutig (= injektiv). Dann besitzt $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1})$ genau zwei Zusammenhangskomponenten.*

Als Vorbereitung/Wiederholung halten wir folgendes fest

Bemerkung 4.27.

- (i) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und sei $f: A \rightarrow [a, b]$ stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow [a, b]$.
- (ii) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, so existiert eine eigentliche stetige Fortsetzung nach \mathbb{R}^n .
- (iii) Sei $f: A \rightarrow B$ eine stetige bijektive Abbildung zwischen kompakten (= überdeckungskompakt und T_2) Mengen A und B . Dann ist f^{-1} stetig.

Beweis.

- (i) Dies ist der Fortsetzungssatz von Tietze.
- (ii) Benutze den Fortsetzungssatz; Übung.
- (iii) Topologievorlesung oder Übung. \square

Beweis des Satzes von Jordan-Brouwer, Theorem 4.26.

Seien Z_0, Z_1, \dots die (Zusammenhangs-)komponenten von $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1})$. Sei Z_0 die unbeschränkte Komponente. Betrachte $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass die Abbildungen $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g := f^{-1}: f(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und eigentlich auf ganz \mathbb{R}^n fortgesetzt sind. Wähle $z_j \in Z_j$. Es gilt $g \circ f = \operatorname{id}$ auf

$\mathbb{S}^{n-1} = \partial B_1(0)$ und $f \circ g = \text{id}$ auf $\partial Z_i \subset f(\mathbb{S}^{n-1})$. Somit folgt nach Homotopieinvarianz

$$d(g \circ f, B_1(0), 0) = d(\text{id}, B_1(0), 0) = 1$$

und

$$(4.8) \quad d(f \circ g, Z_i, z_j) = d(\text{id}, Z_i, z_j) = \delta_{ij}.$$

Fixiere $i \geq 0$. Es ist $g(\partial Z_i) \subset \mathbb{S}^{n-1}$. Somit besitzt $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial Z_i)$ maximal zwei Komponenten.

Wir wollen zunächst ausschließen, dass $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial Z_i)$ aus nur einer Komponente besteht. Nehme dies an. Eine einzelne Komponente ist unbeschränkt. Somit liefert der Produktsatz von Leray, Theorem 4.25,

$$d(f \circ g, Z_i, z_i) = \sum_{\emptyset} = 0.$$

Dies widerspricht (4.8).

Also besteht $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial Z_i)$ aus genau zwei Komponenten. Dies ist nur möglich, wenn $g(\partial Z_i) = \mathbb{S}^{n-1}$ gilt. Wir erhalten $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial Z_i) = B_1(0) \dot{\cup} (\mathbb{R}^n \setminus B_1(0))$. Nun liefert der Leraysche Produktsatz

$$1 = d(g \circ f, B_1(0), 0) = \sum_{i \geq 1} \underbrace{d(g, Z_i, 0)}_{=: a_i} \cdot d(f, B_1(0), Z_i)$$

und

$$\delta_{ij} = d(f \circ g, Z_i, z_j) = \underbrace{d(f, B_1(0), z_j)}_{=: b_j} \cdot \underbrace{d(g, Z_i, B_1(0))}_{=: a_i}$$

Wir erhalten also $a_i b_j = \delta_{ij}$ und $\sum_{i \geq 1} a_i b_i = 1$. Dies ist nur möglich, wenn die

Summe nur den Term für $i = 1$ enthält. $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1})$ besteht also aus genau zwei Zusammenhangskomponenten: Z_0 und Z_1 . \square

4.2. Satz von Borsuk.

Definition 4.28.

- (i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt Ω **symmetrisch**, falls $\Omega = -\Omega$ gilt.
- (ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ symmetrisch. Sei $f: \Omega \rightarrow V$ für einen Vektorraum V . Dann heißt f **ungerade**, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \Omega$ gilt.

Als Vorbereitung zeigen wir zwei technische Lemmata: Ist die Dimension des Zielraumes groß genug, so kann man stetige Abbildungen so fortsetzen, dass auch die Fortsetzung einen Punkt vermeidet.

Lemma 4.29. Sei $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, $f \in C^0(K, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ mit $n > m$. Dann existiert eine Fortsetzung $F \in C^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ von f .

Beweis. Setze $\delta := \inf_K |f| > 0$. Wähle $g_0 \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ mit $\sup_K |f - g_0| < \frac{\delta}{4}$.

Wegen $g_0 \in C^1$ und $m < n$ ist $g_0(\mathbb{R}^m)$ eine Lebesgue-Nullmenge in \mathbb{R}^n . Somit gibt es $y_0 \in B_{\delta/4}(0) \setminus g_0(\mathbb{R}^m)$. Setze $g := g_0 - y_0$. Dann ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$. Nach Dreiecksungleichung gilt $\rho := \sup_K |f - g| < \frac{\delta}{2}$. Somit ist $\inf_K |g| > \frac{\delta}{2}$. Definiere nun

$$G(x) := \begin{cases} g(x), & \text{falls } |g(x)| \geq \frac{\delta}{2}, \\ \frac{\delta}{2} \cdot \frac{g(x)}{|g(x)|} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist $G \in C^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. In ganz \mathbb{R}^m gilt $|G(x)| \geq \frac{\delta}{2}$. In K ist $|g| \geq \frac{\delta}{2}$ und somit gilt dort $G = g$. Nach dem Fortsetzungssatz von Tietze gibt es ein $H \in C^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

mit $H|_K = f - g$ und $|H(x)| \leq \rho$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$. Definiere $F := G + H$. Dann ist $F|_K = g + (f - g) = f$ und es gilt $|F(x)| \geq |G(x)| - |H(x)| \geq \frac{\delta}{2} - \rho > 0$ nach Definition von ρ . \square

Außerhalb des Ursprunges existiert auch eine ungerade Fortsetzung.

Lemma 4.30. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen, beschränkt und symmetrisch. Sei $0 \notin \overline{\Omega}$. Sei $f \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ungerade mit $n > m$. Dann existiert eine ungerade Fortsetzung $F \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.*

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis nach m .

Sei $m = 1$. Setze $\Omega^+ := \{x \in \Omega : x > 0\}$ und $\Omega^- := -\Omega^+$. Ω^+ besteht aus höchstens abzählbar vielen offenen Intervallen $I_k = (a_k, b_k)$. Setze $\rho := \inf_{\partial\Omega} |f| > 0$ ($\partial\Omega$ ist kompakt). Nochmals aufgrund der Kompaktheit gibt es $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \frac{\rho}{2}$ für $|x - y| \leq \delta$. Auf allen Intervallen I_k der Länge $\leq \delta$ wählen wir F als affin lineare Fortsetzung von $F|_{\partial I_k}$. Dann ist F auf $\bigcup_{|I_k| \leq \delta} I_k$ stetig (Übung).

Wegen $|F(x) - F(a_k)| = |F(x) - f(a_k)| \leq \frac{\rho}{2}$ für $x \in I_k$ folgt $|F(x)| \geq |f(a_k)| - \frac{\rho}{2} \geq \frac{\rho}{2}$. Somit ist F dort auch nullstellenfrei.

Auf den verbleibenden endlich vielen Intervallen I_k wählen wir F als eine beliebige stetige Kurve in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit Endpunkten $f(a_k)$ und $f(b_k)$. Wegen $n \geq 2$ geht dies. Auf Ω^- definieren wir $F(x) := -F(-x)$. Wegen $0 \notin \overline{\Omega}$ ist F stetig.

Induktionsschritt: Setze $\Omega_0 := \{x \in \Omega : x^m = 0\} \subset \mathbb{R}^{m-1}$. Es ist $\partial\Omega_0 \subset \partial\Omega$. $f|_{\partial\Omega_0} \in C^0(\partial\Omega_0, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ist ungerade. Somit existiert nach Induktionsannahme eine ungerade Fortsetzung $F_0 \in C^0(\overline{\Omega_0}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ mit $F_0|_{\partial\Omega_0} = f|_{\partial\Omega_0}$. Setze $\Omega^+ := \{x \in \Omega : x^m \geq 0\}$. Dann ist $\partial\Omega^+ = \partial^+\Omega \cup \overline{\Omega_0}$ mit $\partial^+\Omega := \{x \in \partial\Omega : x^m > 0\}$. Definiere $f^+ : \partial\Omega^+ \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ durch

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \partial^+\Omega, \\ F_0(x) & \text{für } x \in \overline{\Omega_0}. \end{cases}$$

Es gilt $f^+ \in C^0(\partial\Omega^+, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Nach Lemma 4.29 existiert eine Funktion $F^+ \in C^0(\overline{\Omega^+}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ mit $F^+|_{\partial\Omega^+} = f^+$. Setze nun

$$F(x) := \begin{cases} F^+(x), & x \in \overline{\Omega^+}, \\ -F^+(-x), & x \in \overline{\Omega^-} \equiv \{x \in \Omega : x^m < 0\}. \end{cases} \quad \square$$

Ist $m = n$, so gibt es eine ungerade Fortsetzung, die auf einer Hyperebene keine Nullstellen hat.

Korollar 4.31. *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und symmetrisch mit $0 \notin \overline{\Omega}$ und $f \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ungerade, so existiert eine ungerade Fortsetzung $F \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ von f mit $F(x) \neq 0$ für $x^n = 0$.*

Beweis. Setze $\Omega_0 := \Omega \cap \{x^n = 0\}$, $\Omega^+ := \Omega \cap \{x^n > 0\}$ und $\Omega^- := -\Omega^+$. Nach Lemma 4.30 gibt es eine ungerade Abbildung $F_0 \in C^0(\overline{\Omega_0}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ mit $F_0|_{\partial\Omega_0} = f|_{\partial\Omega_0}$. Setze

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x), & x \in \partial\Omega \cap \overline{\Omega^+}, \\ F_0(x), & x \in \overline{\Omega_0}. \end{cases}$$

Nach dem Tietzeschen Fortsetzungssatz gibt es $F^+ \in C^0(\overline{\Omega^+}, \mathbb{R}^n)$ mit $F^+|_{\partial\Omega^+} = f^+ = f^+|_{\partial\Omega^+}$. Die gesuchte Fortsetzung ist dann

$$F(x) := \begin{cases} F^+(x), & x \in \overline{\Omega^+}, \\ -F^+(-x), & x \in \overline{\Omega^-}. \end{cases} \quad \square$$

Nun können wir den Abbildungsgrad für ungerade Abbildungen berechnen.

Lemma 4.32. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und symmetrisch mit $0 \notin \bar{\Omega}$. Sei $f \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ungerade. Dann ist $d(f, \Omega, 0) \equiv 0 \pmod{2}$.*

Beweis. Setze $\Omega^\pm := \Omega \cap \{\pm x^n > 0\}$. Sei $F \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ eine ungerade Fortsetzung von f mit $F(x) \neq 0$ für $x \in \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-$. Sei $F_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine Folge mit $\sup_{\Omega} |F_k - F| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Nach Ersetzen von F_k durch $\frac{1}{2}(F_k(x) - F_k(-x))$ dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass F_k ungerade ist. Für $k \geq k_0$ ist dann $F_k(x) \neq 0$ für $x \in \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-$. Somit gilt $d(F, \Omega^\pm, 0) = d(F_k, \Omega^\pm, 0)$. Mit Hilfe der Ausschneidungseigenschaft und der Additivität des Abbildungsgrades erhalten wir

$$(4.9) \quad d(F_k, \Omega, 0) = d(F_k, \Omega^+, 0) + d(F_k, \Omega^-, 0).$$

Sei Z^\pm die Zusammenhangskomponente von 0 in $\mathbb{R}^n \setminus F_k(\partial\Omega^\pm)$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(0) \subset Z^+ \cap Z^-$ und einen regulären Wert $z \in B_\varepsilon(0)$ von F_k . Ein $x \in \Omega^+$ erfüllt $F_k(x) = z$ genau dann, wenn $-x \in \Omega^-$ die Gleichung $F_k(-x) = -z$ erfüllt. Dies bedeutet, dass $\Omega^+ \cap F_k^{-1}(z) = -(\Omega^- \cap F_k^{-1}(-z))$ ist. Die Funktion F_k ist ungerade, also ist $\frac{\partial F_k}{\partial x^j}$ gerade und somit folgt $\det dF_k(x) = \det dF_k(-x)$. Insbesondere ist $-z$ ein regulärer Wert von F_k . Es gilt

$$\begin{aligned} d(F, \Omega^+, 0) &= d(F_k, \Omega^+, 0) = d(F_k, \Omega^+, z) \\ &= \sum_{x \in F_k^{-1}(z) \cap \Omega^+} \det dF_k(x) = \sum_{x \in F_k^{-1}(-z) \cap \Omega^-} \det dF_k(x) \\ &= d(F_k, \Omega^-, -z) = d(F_k, \Omega^-, 0) = d(F, \Omega^-, 0). \end{aligned}$$

Benutzen wir nun (4.9), so folgt, dass $d(F_k, \Omega, 0) = d(F, \Omega, 0)$ gerade ist. \square

Theorem 4.33 (Satz von Borsuk). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und symmetrisch mit $0 \in \Omega$. Sei $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ungerade und $0 \notin f(\partial\Omega)$. Dann ist $d(f, \Omega, 0)$ ungerade.*

Beweis. Wir wollen ohne Einschränkung annehmen dürfen, dass f glatt ist und $df(0) \neq 0$ gilt. Dazu approximieren wir f und addieren $\delta \cdot \text{id}$ für ein kleines $\delta > 0$. Somit gilt

$$d(f, \Omega, 0) = d(f, \Omega \setminus B_\varepsilon(0), 0) + d(f, B_\varepsilon(0), 0)$$

für ein kleines $\varepsilon > 0$ mit $0 \notin f(\partial B_\varepsilon(0))$. Nach Lemma 4.32 ist der erste Term auf der rechten Seite gerade. Der zweite Term ist ungerade, da für kleines $\varepsilon > 0$ genau ein Urbild existiert und 0 ein regulärer Wert ist. Die Behauptung folgt. \square

Korollar 4.34. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und symmetrisch mit $0 \in \Omega$. Sei $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und gelte $f(x) \neq 0$ für $x \in \partial\Omega$. Ist*

$$\frac{f(x)}{|f(x)|} \neq \frac{f(-x)}{|f(-x)|}$$

für alle $x \in \partial\Omega$, so ist $d(f, \Omega, 0)$ ungerade.

Beweis. Betrachte die Homotopie

$$\begin{aligned} h(x, t) &= (1-t)f(x) + \frac{t}{2}(f(x) - f(-x)) \\ &= \left(1 - \frac{t}{2}\right)f(x) - \frac{t}{2}f(-x) \end{aligned}$$

zwischen f und seinem ungeraden Anteil. Dann folgt die Aussage aus dem Satz von Borsuk, Theorem 4.33, wenn wir nachweisen können, dass $h \neq 0$ auf $\partial\Omega \times [0, 1]$ gilt. Falls dies doch der Fall ist, so erhalten wir für ein solches $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$ mit $h(x, t) = 0$ auch $\frac{t}{2}f(-x) = \left(1 - \frac{t}{2}\right)f(x)$. Aus $f(x) \neq 0$ für $x \in \partial\Omega$ folgt $0 < t$. Damit sind $f(x)$ und $f(-x)$ aber positive Vielfache voneinander. Widerspruch. \square

Wir erhalten weitere wichtige Korollare. Vergleiche auch [3]. Häufig wird der Satz von Borsuk-Ulam auch nur für $\Omega = B_1(0)$ formuliert.

Theorem 4.35 (Satz von Borsuk-Ulam). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und symmetrisch mit $0 \in \Omega$. Sei $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und sei $m < n$. Dann gibt es ein $x \in \partial\Omega$ mit $f(x) = f(-x)$.*

Beweis. Sei f ohne Einschränkung nach $\bar{\Omega}$ fortgesetzt. Vermöge $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ ist.

Definiere $g(x) := f(x) - f(-x)$. Dann ist g ungerade. Wir dürfen annehmen, dass $g(x) \neq 0$ auf dem Rand gilt, denn sonst sind wir fertig. Nach dem Satz von Borsuk ist dann aber $0 \neq d(g, \Omega, 0) = d(g, \Omega, y)$ für alle $y \in B_\varepsilon(0)$ für $\varepsilon > 0$ klein genug. Somit ist $B_\varepsilon^n(0) \subset g(\bar{\Omega}) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Dies ist aus Dimensionsgründen unmöglich. \square

Wir können die Gebietsinvarianz für stetige Funktionen folgern.

Theorem 4.36 (Satz von der Gebietsinvarianz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal injektiv (d. h. für jeden Punkt $x \in \Omega$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $f|_{B_\varepsilon(x)}$ injektiv ist). Dann ist f eine offene Abbildung. Insbesondere ist $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

Beweis. Sei ohne Einschränkung $0 \in \Omega$ und $f(0) = 0$. Wir wollen zeigen, dass für jedes $r > 0$ eine Kugel um $0 = f(0)$ existiert, die in $f(B_r(0))$ enthalten ist. Sei $r > 0$, so dass $f|_{\overline{B_r(0)}}$ injektiv ist. Betrachte

$$h(x, t) := f\left(\frac{1}{1+t}x\right) - f\left(-\frac{t}{1+t}x\right) \quad \text{für } (x, t) \in \overline{B_r(0)} \times [0, 1].$$

h ist stetig und es gilt $h(\cdot, 0) = f$ sowie $h(x, 1) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(-\frac{x}{2}\right)$. Somit ist $h(\cdot, 1)$ ungerade. Es gilt $h(x, t) \neq 0$ für $(x, t) \in \partial B_r(0) \times [0, 1]$, da dies aufgrund der Injektivität von f nur für (x, t) mit $\frac{x}{1+t} = -\frac{xt}{1+t}$, also für $0 = x \notin \partial B_r(0)$ möglich ist. Aufgrund der Homotopieinvarianz erhalten wir daher aus dem Satz von Borsuk

$$0 \neq d(h(\cdot, 1), B_r(0), 0) = d(f, B_r(0), y)$$

für alle $y \in B_\delta(0)$ für ein geeignetes $\delta > 0$. Also ist $B_\delta(0) \subset f(B_r(0))$. Die Behauptung folgt. \square

Unter Homöomorphismen ist die Dimension invariant. (Somit ist auch die Dimension einer C^0 -Mannigfaltigkeit wohldefiniert.)

Korollar 4.37. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ nichtleere offene Mengen. Sei $f: U \rightarrow V$ ein (lokaler) Homöomorphismus. Dann gilt $m = n$.*

Beweis. Im Falle $m < n$ wenden wir Theorem 4.36, den Satz von der Gebietsinvarianz, auf $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ an. \square

Als letztes Korollar erhalten wir einen Satz, dessen Autoren in unterschiedlichen Schreibweisen auftreten.

Theorem 4.38 (Satz von Ljusternik-Schnirelman). *Sei $\mathbb{S}^{n-1} = \bigcup_{j=1}^m A_j$, $m \leq n$, wobei A_j abgeschlossene Mengen sind. Dann enthält wenigstens eine der Mengen A_j ein Antipodenpaar.*

Beweis. $\{x, -x\} \in A_j$ ist äquivalent zu $x \in A_j \cap (-A_j)$. Nehme also an, dass $A_j \cap (-A_j) = \emptyset$ für $j = 1, \dots, m-1$ ist. Dann existieren stetige Abbildungen $f_j: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow [0, 1]$ mit $f_j|_{A_j} = 0$ und $f_j|_{-A_j} = 1$ für $j = 1, \dots, m-1$. Setze $f := (f_1, \dots, f_{m-1})$. Nach dem Satz von Borsuk-Ulam existiert daher ein $\bar{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit $f_j(\bar{x}) = f_j(-\bar{x})$ für $j = 1, \dots, m-1$. Also ist $\bar{x} \notin A_j \cup (-A_j)$. Aufgrund der Überdeckungseigenschaft und durch Betrachtung von $-\bar{x}$ erhalten wir $\bar{x} \in A_m \cap (-A_m)$ oder, äquivalent dazu, $\{\bar{x}, -\bar{x}\} \subset A_m$. \square

5. DEFORMATIONSLEMMA

Vergleiche [14, Lemma 1.14]. Wir werden $\varphi^{-1}([a, b]) = \{x : a \leq \varphi(x) \leq b\}$ benutzen. Definiere die Subniveaumenge $\varphi^d := \varphi^{-1}((-\infty, d])$. Sei weiterhin S eine Teilmenge eines metrischen Raumes. Dann werden wir

$$S_\delta := \{x : d(x, S) < \delta\}$$

für eine δ -Umgebung um die Menge S benutzen.

Lemma 5.1 (Deformationslemma). *Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$. Seien $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \delta > 0$ und $\zeta \geq \frac{\varepsilon}{\delta}$. Nehme an, dass*

$$\|\varphi'(x)\| \geq 2\delta$$

für alle $x \in \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\zeta}$ gilt. Dann gibt es eine stetige Abbildung $\sigma : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass

- (i) $\sigma(x, t) = x$ für $t = 0$ oder falls $x \notin \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\zeta}$ und $t \in [0, 1]$,
- (ii) $\sigma(\varphi^{c+\varepsilon} \cap S, 1) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$,
- (iii) $\|\sigma(x, t) - x\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$ für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, 1]$,
- (iv) $t \mapsto \varphi(\sigma(x, t))$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ nicht wachsend ist,
- (v) $\varphi(\sigma(x, t)) < c$ für alle $x \in \varphi^c \cap S_\zeta$ und $t \in (0, 1]$.

Beweis. Definiere

$$\begin{aligned} A &:= \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\zeta}, \\ B &:= \varphi^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap S_\zeta, \\ \psi(x) &:= \frac{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus A)}{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus A) + \text{dist}(x, B)}. \end{aligned}$$

(Setze $\psi \equiv 1$, falls $A = \mathbb{R}^n$ ist und nehme ohne Einschränkung $B \neq \emptyset$ an, da dann $\sigma(\cdot, t) = \text{id}$ für alle $t \in [0, 1]$ die Behauptung liefert.) Dann ist ψ lokal Lipschitz, erfüllt $1 \geq \psi \geq 0$ und es gilt $\psi = 1$ auf B und $\psi = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus A$. Definiere das Vektorfeld

$$V(x) := \begin{cases} -\psi(x) \frac{\nabla \varphi(x)}{\|\nabla \varphi(x)\|^2} & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

V ist lokal Lipschitz und es gilt $\|V(x)\| \leq \frac{1}{2\delta}$.

Betrachte für $x \in \mathbb{R}^n$ die Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\sigma}(x, t) = V(\tilde{\sigma}(x, t)), \\ \tilde{\sigma}(x, 0) = x. \end{cases}$$

Diese Cauchyprobleme besitzen für festes $x \in \mathbb{R}^n$ eine für $t \in \mathbb{R}$ definierte Lösung $\tilde{\sigma}(x, \cdot)$. Aufgrund der stetigen Abhängigkeit von Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen vom Anfangswert ist $\tilde{\sigma} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.

Definiere $\sigma : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\sigma(x, t) := \tilde{\sigma}(x, 2\varepsilon t)$. Nach Definition folgt dann (i). Wir erhalten $\frac{\partial}{\partial t} \sigma(x, t) = 2\varepsilon V(\sigma(x, t))$. Da $\|V(x)\| \leq \frac{1}{2\delta}$ gilt, folgt hieraus (iii). Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\sigma(x, t)) &= \langle \nabla \varphi(\tilde{\sigma}(x, 2\varepsilon t)), \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\sigma}(x, 2\varepsilon t) \rangle \\ (5.1) \quad &= \langle \nabla \varphi(\sigma(x, t)), 2\varepsilon V(\sigma(x, t)) \rangle \\ &= -2\varepsilon \psi(\sigma(x, t)). \end{aligned}$$

Daher ist $t \mapsto \varphi(\sigma(x, t))$ nicht wachsend und (iv) und (v) folgen. Sei nun $x \in \varphi^{c+\varepsilon} \cap S$. Falls es ein $t \in [0, 1]$ gibt, so dass $\varphi(\sigma(x, t)) \leq c - \varepsilon$ gilt, dann ist nach (5.1) auch $\varphi(\sigma(x, 1)) \leq c - \varepsilon$ und (ii) folgt. Ansonsten gilt wegen (iii)

$$\sigma(x, t) \in \varphi^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap S_\zeta$$

für alle $t \in [0, 1]$. Nach (5.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma(x, 1)) &= \varphi(x) + \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi(\sigma(x, t)) dt = \varphi(x) - 2\varepsilon \int_0^1 \psi(\sigma(x, t)) dt \\ &\leq c + \varepsilon - 2\varepsilon = c - \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit folgt (ii). \square

Bemerkung 5.2.

- (i) Ist φ im Deformationslemma, Lemma 5.1, glatt und wählen wir im Beweis ψ als glatte Funktion mit $\psi = 1$ auf B , $\psi = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus A$ sowie $0 \leq \psi \leq 1$, so ist σ glatt. Aufgrund des lokalen Eindeutigkeitssatzes und der Rückwärtslösbarkeit für gewöhnliche Differentialgleichungen ist $\sigma(\cdot, t)$ für alle $t \in [0, 1]$ sogar ein Diffeomorphismus.
- (ii) Ebenso folgt unter den Voraussetzungen von Lemma 5.1, dass $\sigma(\cdot, t)$ für alle $t \in [0, 1]$ ein Homöomorphismus ist.
- (iii) Das Deformationslemma gilt auch in Hilberträumen und wird im Zusammenhang mit Minimax-Theoremen benutzt um partielle Differentialgleichungen zu lösen. In Banachräumen muss man einen geeigneten Ersatz für $\nabla\varphi$ verwenden, sogenannte Pseudogradientenvektorfelder.

Lemma 5.3 (Deformationslemma auf Mannigfaltigkeiten). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Sei $S \subset M$. Sei $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt (und ohne Einschränkung glatt in den \mathbb{R}^n fortgesetzt). Seien $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \delta > 0$ und $\zeta \geq \frac{\varepsilon}{\delta}$. Nehme an, dass*

$$\|P\varphi'(x)\| \geq 2\delta$$

für alle $x \in \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap M \cap S_{2\zeta}$ gilt, wobei P die orthogonale Projektion auf den Tangentialraum von M bezeichne. Dann gibt es eine stetige Abbildung $\sigma: M \times [0, 1] \rightarrow M$, so dass

- (i) $\sigma(x, t) = x$ für $t = 0$ oder falls $x \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap M \cap S_{2\zeta}$ und $t \in [0, 1]$,
- (ii) $\sigma(\varphi^{c+\varepsilon} \cap M \cap S, 1) \subset \varphi^{c-\varepsilon} \cap M$,
- (iii) $\|\sigma(x, t) - x\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$ für alle $(x, t) \in M \times [0, 1]$,
- (iv) $t \mapsto \varphi(\sigma(x, t))$ für alle $x \in M$ nicht wachsend ist,
- (v) $\varphi(\sigma(x, t)) < c$ für alle $x \in \varphi^c \cap M \cap S_\zeta$ und $t \in (0, 1]$.

Beweis. Ersetze im Beweis des ursprünglichen Deformationslemmas $\nabla\varphi(x)$ durch die orthogonale Projektion $P\nabla\varphi(x)$ auf $T_x M$ und setze dies glatt in den \mathbb{R}^n fort. Die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\sigma}(x, t) = V(\tilde{\sigma}(x, t))$, die in M starten, bleiben aufgrund der Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen und da M eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist, in M , siehe auch Bemerkung 5.4. Der Rest des Beweises funktioniert wie beim Beweis von Lemma 5.1. \square

Bemerkung 5.4. Erfülle $\varphi(x, t)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \varphi(x, t) = V(\varphi(x, t)).$$

Nach Anwendung eines Diffeomorphismusses Φ des umgebenden Raumes, der die Mannigfaltigkeit lokal in einen linearen Unterraum abbildet, folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi(\varphi(x, t)) &= d\Phi|_{\varphi(x, t)} \left\langle \frac{d}{dt} \varphi(x, t) \right\rangle \\ &= d\Phi|_{\varphi(x, t)} \langle V(\varphi(x, t)) \rangle \end{aligned}$$

$$= d\Phi|_{\Phi^{-1}(\Phi(\varphi(x,t)))} \langle V(\Phi^{-1}(\Phi(\varphi(x,t)))) \rangle.$$

Daher definieren wir

$$\tilde{V}(y) := d\Phi|_{\Phi^{-1}(y)} \langle V(\Phi^{-1}(y)) \rangle$$

und sehen, dass $\alpha(x,t) := \Phi(\varphi(x,t))$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\alpha(x,t) = \tilde{V}(\alpha(x,t))$$

erfüllt. Umgekehrt gilt für eine solche Lösung $\alpha(x,t)$, dass $\Phi^{-1}(\alpha(x,t))$ die ursprüngliche Differentialgleichung erfüllt: Aus $a = \Phi^{-1} \circ \Phi(a)$ folgt $\text{id} = d\Phi^{-1}|_{\Phi(a)} \circ d\Phi|_a$ und somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi^{-1}(\alpha(x,t)) &= d(\Phi^{-1})|_{\alpha(x,t)} \left\langle \frac{d}{dt}\alpha(x,t) \right\rangle \\ &= d(\Phi^{-1})|_{\alpha(x,t)} \langle \tilde{V}(\alpha(x,t)) \rangle \\ &= d(\Phi^{-1})|_{\alpha(x,t)} d\Phi|_{\Phi^{-1}(\alpha(x,t))} \langle V(\Phi^{-1}(\alpha(x,t))) \rangle \\ &= V(\Phi^{-1}(\alpha(x,t))). \end{aligned}$$

Wir behaupten nun, dass \tilde{V} lokal tangential an $\Phi(M)$ ist, da V tangential an M ist:

Wir zeigen, dass für beliebige $y \in \Phi(M)$ eine Kurve γ in $\Phi(M)$ mit $\gamma(0) = y$ und $\gamma'(0) = \tilde{V}(y)$ existiert. Setze $z := \Phi^{-1}(y)$. $V(z)$ ist tangential an M . Somit gibt es eine Kurve β in M mit $\beta(0) = z$ und $\beta'(0) = V(z)$. Setze $\gamma(t) := \Phi(\beta(t))$. Es folgen $\gamma(0) = \Phi(\beta(0)) = \Phi(z) = y$ und

$$\gamma'(0) = d\Phi|_z \langle \beta'(0) \rangle = d\Phi|_z \langle V(z) \rangle = d\Phi|_{\Phi^{-1}(y)} \langle V(\Phi^{-1}(y)) \rangle = \tilde{V}(y).$$

Es folgt, dass die Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen in M bleiben, da α eine gewöhnliche Differentialgleichung in einem Unterraum löst, der $\Phi(M)$ enthält und Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen (für lipschitzstetige Daten) eindeutig sind. Also ist $\Phi^{-1}(\alpha(x,t))$ gerade die Lösung, die in M bleibt.

Bemerkung 5.5. Der Einbettungssatz für Riemannsche Mannigfaltigkeiten von J. Nash [8, 9] besagt, dass sich eine Riemannsche Metrik isometrisch in den \mathbb{R}^n einbetten lässt. Damit überträgt sich Lemma 5.3 direkt auf vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

In den folgenden beiden Korollaren wählen wir $S = \mathbb{R}^n$, deformieren also überall.

Korollar 5.6. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 5.1 oder Lemma 5.3 gilt:*

- $\varphi^{c+\varepsilon}$ und $\varphi^{c-\varepsilon}$ sind homöomorph bzw. diffeomorph. Der Homöomorphismus bzw. Diffeomorphismus ist durch $x \mapsto \sigma(x, 1)$ gegeben.
- $\varphi^{-1}(\{a\})$ und $\varphi^{-1}(\{b\})$ sind für alle $a, b \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ homöomorph bzw. diffeomorph. Der Homöomorphismus von $\varphi^{-1}(\{a\})$ nach $\varphi^{-1}(\{b\})$ ist für $a > b$ durch $x \mapsto \sigma(x, \frac{a-b}{2\varepsilon})$ gegeben.
- Seien $a, b \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ mit $a > b$ gegeben. Dann ist $\varphi^{-1}([b, a])$ homöomorph bzw. diffeomorph zu $\varphi^{-1}(\{a\}) \times [b, a]$. Die Inverse des Homöomorphismusses ist durch $(x, t) \mapsto \sigma(x, \frac{a-t}{2\varepsilon})$ gegeben. Entsprechendes gilt für halboffene oder offene Intervalle.

Korollar 5.7. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 5.1 oder Lemma 5.3 gilt für den Hausdorffabstand*

$$d_{\mathcal{H}}(\varphi^{c+\varepsilon}, \varphi^{c-\varepsilon}) \leq \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Insbesondere konvergiert $\varphi^{a_i} \rightarrow \varphi^a$ im Hausdorffabstand für alle $a_i, a \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ mit $a_i \rightarrow a$.

Beweis. Benutze im \mathbb{R}^n Gleichung (5.1) aus Lemma 5.1. \square

Wie man am Beispiel des Torusses M und der Höhenfunktion φ sieht, brauchen zwei Mengen $\varphi^{c+\varepsilon}$ und $\varphi^{c-\varepsilon}$ nicht diffeomorph zu sein, wenn φ in $\varphi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ kritische Punkte hat. Mit Hilfe der Morsetheorie kann man aber trotzdem beschreiben, wie sich $\varphi^{c-\varepsilon}$ und $\varphi^{c+\varepsilon}$ unterscheiden.

6. MORSETHEORIE

Vergleiche [7]. Auch hier kann man dieselben Resultate wieder für abstrakte Mannigfaltigkeiten mit Hilfe eines Einbettungssatzes bekommen. Wir untersuchen aber weiterhin Untermannigfaltigkeiten.

Definition 6.1 (Morsefunktion). Sei M^m eine glatte Mannigfaltigkeit, z. B. eine glatte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt.

- (i) $x \in M$ heißt **kritischer Punkt** von f , wenn in einer Karte (U, φ) der Punkt $\varphi(x)$ ein kritischer Punkt ist, wenn also die Ableitung von $f \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(x)$ verschwindet.
- (ii) $x \in M$ heißt **nicht degenerierter kritischer Punkt** von f , wenn x ein kritischer Punkt von f ist und die Hessesche von $f \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(x)$ eine $m \times m$ -Matrix vom Rang m ist.
- (iii) $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Morsefunktion**, falls f in allen kritischen Punkten nicht degeneriert ist.
- (iv) Der Index der Hessischen einer Morsefunktion in Koordinaten in einem kritischen Punkt x heißt **Index** von f in x .

(Man rechnet direkt nach, dass die Definition nicht von der Wahl einer Karte abhängt, da eine Kartenwechselabbildung $\psi \circ \varphi^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist.)

Wir wollen zunächst zeigen, dass jede glatte Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Morsefunktion besitzt. Dazu werden wir zunächst einen Zusammenhang mit fokalen Punkten herstellen.

Definition 6.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Untermannigfaltigkeit. Definiere das **Normalenbündel** $NM \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ durch

$$NM := \{(q, v) : q \in M, v \text{ ist in } q \text{ senkrecht zu } M\}.$$

Dann ist NM eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Definiere $E: NM \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$E(q, v) := q + v.$$

Wir nennen $x \in \mathbb{R}^n$ einen fokalen Punkt von (M, q) , falls $x = q + v$ für ein $(q, v) \in NM$ gilt und falls das Differential von E in (q, v) nicht surjektiv ist. $x \in \mathbb{R}^n$ heißt fokaler Punkt von M , falls es ein $q \in M$ gibt, so dass x ein fokaler Punkt von (M, q) ist.

Aus dem Sardischen Satz erhalten wir somit

Korollar 6.3. Sei M eine glatte Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n . Dann ist die Menge der fokalen Punkte von M eine Nullmenge in \mathbb{R}^n .

Wir wollen nun die fokalen Punkte geometrisch charakterisieren. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $q \in M$. Sei l eine Gerade, die M in q senkrecht schneidet. Durch Drehen und Verschieben dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass M lokal als

$$\{(x, f(x)) \equiv X(x) : x \in \mathbb{R}^m\}$$

mit $q = 0$, $f(0) = 0$, $df(0) = 0$ gegeben ist und dass $l = \{t(0, \dots, 0, 1) : t \in \mathbb{R}\}$ gilt. Schreibe $f = (f^{m+1}, \dots, f^n)$. Nehme weiterhin an, dass $\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^i \partial x^j}(0)$ diagonal ist und

dass die Eigenwerte $(\kappa_i)_{1 \leq i \leq m}$ sind. (κ_i sind dann geometrisch die Hauptkrümmungen von M in q in Richtung von e_n .) Wir erhalten:

Lemma 6.4. *Die fokalen Punkte von $(M, 0)$ entlang der Geraden l sind gerade die Punkte $\frac{1}{\kappa_i}e_n$ für alle i mit $\kappa_i \neq 0$.*

Beweis. Sei ν_{m+1}, \dots, ν_n eine lokale differenzierbare Orthonormalbasis des Raumes senkrecht zu M mit $\nu_n(0) = e_n$. Dann können wir NM lokal durch

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \ni (x, t) \mapsto \left(x, f(x), \sum_{i=m+1}^n t^i \nu_i \right)$$

parametrisieren, d. h. das Bild dieser Abbildung ist lokal gerade MN . In diesen Koordinaten hat E die Form

$$(x, t) \mapsto (x, f(x)) + \sum_{i=m+1}^n t^i \nu_i = X(x) + \sum_{i=m+1}^n t^i \nu_i.$$

Die partiellen Ableitungen nach x^i sind $\frac{\partial X}{\partial x^i} + \sum_{j=m+1}^n t^j \frac{\partial \nu_j}{\partial x^i}$, die nach t^i sind ν_i .

Nun ist $\frac{\partial X}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial x^m}, \nu_{m+1}, \dots, \nu_n$ eine Basis und in $x = 0$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n . Betrachte nun die partiellen Ableitungen als Zeilen einer Matrix und die Orthonormalbasis als Spalten einer Matrix. Das Resultat nach Matrixmultiplikation enthält die entsprechenden Skalarprodukte. Das Differential von E ist genau dann nicht surjektiv, wenn diese Matrix nicht den Rang n hat. Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{c} \left(\left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right\rangle + \sum_{k=m+1}^n t^k \left\langle \frac{\partial \nu_k}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right\rangle \right)_{1 \leq i, j \leq m} \\ 0 \\ \left(\sum_{k=m+1}^n t^k \left\langle \frac{\partial \nu_k}{\partial x^i}, \nu_l \right\rangle \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ m+1 \leq l \leq n}} \\ \text{id} \end{array} \right)$$

Aus $\langle \nu_k, \frac{\partial X}{\partial x^j} \rangle = 0$ erhalten wir

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^i} \left\langle \nu_k, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \nu_k}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right\rangle + \left\langle \nu_k, \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle.$$

Im Punkt $(x, t) = (0, (0, \dots, 0, \tau))$, $\tau \in \mathbb{R}$, hat die untersuchte Matrix also genau dann nicht den (vollen) Rang n , falls

$$\left(\delta_{ij} - \tau \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

nicht den vollen Rang hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\tau = \kappa^{-1}$ für ein i gilt. \square

Dieser Beweis ergibt auch, dass die Vielfachheit des Eigenwertes κ_i mit dem Null-eigenraum der oben betrachteten Matrix im jeweiligen Fokalfunkt übereinstimmt.

Lemma 6.5. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Untermannigfaltigkeit. Dann ist*

$$d : M \ni x \mapsto \|x - p\|^2$$

für fast alle Punkte $p \in \mathbb{R}^n$ eine Morsefunktion für M .

Beweis. Wir zeigen, dass d eine Morsefunktion ist, falls p kein fokaler Punkt von M ist. Die Behauptung folgt dann aus Korollar 6.3.

In Koordinaten wie oben gilt

$$\frac{\partial d}{\partial x^i} = 2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, X - p \right\rangle.$$

Somit besitzt d einen kritischen Punkt in $X = q$ genau dann, wenn $q - p$ in q normal an M ist. Die zweiten Ableitungen sind

$$\frac{\partial^2 d}{\partial x^i \partial x^j} = 2 \left(\left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j}, X - p \right\rangle \right).$$

Nach Drehung und Verschiebung wie oben, so dass 0 und $X - p$ auf der Geraden l liegen folgt in $X = q$ in Koordinaten wie in Lemma 6.4

$$\frac{\partial^2 d}{\partial x^i \partial x^j} = 2\delta_{ij} - 2\|X - p\| \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Dies ist nicht ausgeartet, da p kein fokaler Punkt von M ist. \square

Das folgende Lemma ist auf kritische Punkte einer Morsefunktion anwendbar. In geeigneten Karten besitzt diese also immer eine Gestalt wie angegeben.

Lemma 6.6 (Morselemma). *Sei $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Sei 0 ein nicht degenerierter kritischer Punkt von f . Dann gibt es einen lokalen Diffeomorphismus φ einer Umgebung von 0 mit $\varphi(0) = 0$ und $0 \leq \lambda \leq m$, so dass*

$$f \circ \varphi(x) = f(0) - \sum_{i=1}^{\lambda} (x^i)^2 + \sum_{i=\lambda+1}^m (x^i)^2.$$

λ ist der Index von f im Ursprung.

Für den Beweis des Morselemmas benötigen wir noch

Lemma 6.7. *Sei $f: B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$, $B_r(0) \subset \mathbb{R}^m$, glatt. Dann gibt es glatte Funktionen g_i in $B_r(0)$ mit $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)$ und*

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^m x^i g_i(x).$$

Beweis. Es gilt

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(tx)) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) x^i dt.$$

Setze daher

$$g_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) dt.$$

Die Behauptung folgt. \square

Beweis von Lemma 6.6. Die Aussage über den Index ist offensichtlich.

Gelte ohne Einschränkung $f(0) = 0$. Nach Lemma 6.7 gilt

$$f(x) = \sum_{i=1}^m x^i g_i(x).$$

Wegen $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) = 0$ können wir dieses Lemma nochmals anwenden und erhalten

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^m x^i x^j h_{ij}(0)$$

für eine ohne Einschränkungen symmetrische Matrix (h_{ij}) . Wegen $h_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ (leite dazu die obige Gleichung zweimal ab) ist h_{ij} nicht singulär.

Wir gehen nun per Induktion vor. Gelte schon

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r-1} \pm (x^i)^2 + \sum_{i,j=r}^m x^i x^j h_{ij}(x).$$

Setze $y^k = x^k$ für $k \neq r$ und

$$y^r(x) = \sqrt{|h_{rr}(x)|} \left(x^r + \sum_{i=r+1}^m x^i \frac{h_{ir}(x)}{h_{rr}(x)} \right).$$

Aufgrund des Satzes über implizite Funktionen und $\frac{\partial y^r}{\partial x^r}(0) \neq 0$ liefert dies tatsächlich neue Koordinaten in einer Umgebung des Ursprungs. In diesen Koordinaten erhalten wir durch direktes Einsetzen aus

$$x^r = \frac{y^r}{\sqrt{|h_{rr}(x)|}} - \sum_{i=r+1}^m x^i \frac{h_{ir}(x)}{h_{rr}(x)}$$

die Identität

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=r}^m x^i x^j h_{ij}(x) \\ &= x^r x^r h_{rr}(x) + 2 \sum_{i=r+1}^m x^i x^r h_{ir}(x) + \sum_{i,j=r+1}^m x^i x^j h_{ij}(x) \\ &= \left(\frac{y^r}{\sqrt{|h_{rr}(x)|}} - \sum_{i=r+1}^m x^i \frac{h_{ir}(x)}{h_{rr}(x)} \right) \left(\frac{y^r}{\sqrt{|h_{rr}(x)|}} - \sum_{j=r+1}^m x^j \frac{h_{jr}(x)}{h_{rr}(x)} \right) h_{rr}(x) \\ & \quad + 2 \sum_{i=r+1}^m x^i \left(\frac{y^r}{\sqrt{|h_{rr}(x)|}} - \sum_{j=r+1}^m x^j \frac{h_{jr}(x)}{h_{rr}(x)} \right) h_{ir}(x) + \sum_{i,j=r+1}^m x^i x^j h_{ij}(x) \\ &= \frac{h_{rr}(x)}{|h_{rr}(x)|} (y^r)^2 - 2 \sum_{i=r+1}^m \frac{x^i y^r}{\sqrt{|h_{rr}(x)|}} h_{ir}(x) + \sum_{i,j=r+1}^m x^i x^j \frac{h_{ir}(x) h_{jr}(x)}{h_{rr}(x)} \\ & \quad + 2 \sum_{i=r+1}^m \frac{x^i y^r}{\sqrt{|h_{rr}(x)|}} h_{ir}(x) - 2 \sum_{i,j=r+1}^m x^i x^j \frac{h_{ir}(x) h_{jr}(x)}{h_{rr}(x)} \\ & \quad + \sum_{i,j=r+1}^m x^i x^j h_{ij}(x) \\ &= \frac{h_{rr}(x)}{|h_{rr}(x)|} (y^r)^2 - \sum_{i,j=r+1}^m x^i x^j \frac{h_{ir}(x) h_{jr}(x)}{h_{rr}(x)} + \sum_{i,j=r+1}^m x^i x^j h_{ij}(x) \\ &\equiv \frac{h_{rr}(x)}{|h_{rr}(x)|} (y^r)^2 + \sum_{i,j=r+1}^m y^i y^j \tilde{h}_{ij}(x). \end{aligned}$$

Da der Übergang zu den Variablen y eine Variablentransformation mittels eines Diffeomorphismusses ist, ist auch $\tilde{h}_{ij}(x)$ in einer Umgebung des Ursprungs nicht ausgeartet. Per Induktion erhalten wir Koordinaten wie behauptet. \square

Vergleichen wir $f^{c-\varepsilon}$ und $f^{c+\varepsilon} \equiv M^{c+\varepsilon}$ und ist c ein kritischer Wert von f , so sind diese beiden Mengen i. a. nicht diffeomorph. Im Modellfall einer Funktion wie im Morselemma mit einem kritischen Punkt erhalten wir f^ε aus $f^{-\varepsilon}$ durch „Einkleben“ einer (aufgedickten) Zelle D^λ , wobei λ der Index des kritischen Punktes ist.

Genauer gilt:

Theorem 6.8. *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^k$ eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Sei p ein nicht degenerierter kritischer Punkt mit Index λ und $f(p) = c$. Nehme an, dass $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ für ein $\varepsilon > 0$ kompakt ist und dass p der einzige kritische Punkt von f in dieser Menge ist. Dann ist der Homotopietyp von $M^{c+\varepsilon}$ der von $M^{c-\varepsilon}$ mit einer geeignet angeklebten λ -Zelle. $M^{c-\varepsilon}$ mit einer geeignet angeklebten λ -Zelle ist sogar Deformationsretrakt von $M^{c+\varepsilon}$.*

Beweis. Wegen des des Morselemmas dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass f in Koordinaten um p durch

$$f(x) = c - \sum_{i=1}^{\lambda} (x^i)^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n (x^i)^2 \equiv c - |y|^2 + |z|^2$$

gegeben ist. Im Fall $\lambda = 0$ oder $\lambda = n$ ist die Behauptung lokal klar und folgt global mit Hilfe des Deformationslemmas. Weiterhin nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass $\overline{B_{\sqrt{2\varepsilon}}(0)}$ im Bild U dieser Karte enthalten ist. Für das ursprüngliche $\varepsilon > 0$ erhalten wir die Behauptung dann mit Hilfe des Deformationslemmas, da p bzw. der Ursprung der einzige kritische Punkt im betrachteten Bereich ist.

Definiere die abgeschlossene λ -Zelle D^λ durch

$$D^\lambda = \{(y, z) : |y|^2 \leq \varepsilon \text{ und } z = 0\}.$$

In einem zweidimensionalen Bild sind $f^{-1}(\{c + \varepsilon\})$ und $f^{-1}(\{c - \varepsilon\})$ durch je zwei Hyperbeln gegeben, von denen die zu $c - \varepsilon$ durch e^λ (die offene λ -Zelle) verbunden werden. Genauer ist D^λ an (den Rand von) $M^{c-\varepsilon}$ angeheftet. Die Gebiete mit $f < 0$ und $f > 0$ werden durch die Winkelhalbierenden voneinander getrennt.

Wir modifizieren nun f in einer Umgebung des Ursprungs und erhalten eine weitere glatte Funktion $F: M \rightarrow \mathbb{R}$: Sei $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und erfülle

$$\begin{cases} \mu(0) > \varepsilon, \\ \mu(t) = 0 & \text{für } t \geq 2\varepsilon, \\ -1 < \mu'(t) \leq 0 & \text{für alle } t. \end{cases}$$

Definiere F durch

$$F = f - \mu(|y|^2 + 2|z|^2)$$

innerhalb der betrachteten Koordinatenumgebung. Setzen wir F außerhalb durch f fort, so ist F glatt. Wir setzen $\xi := |y|^2 = \sum_{i=1}^{\lambda} (x^i)^2$ und $\eta := |z|^2 = \sum_{i=\lambda+1}^n (x^i)^2$.

Lokal gilt damit

$$F(y, z) = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta).$$

Behauptung 1. *Es gilt $F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon]) = f^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$.*

Beweis. Außerhalb von $\xi + 2\eta \leq 2\varepsilon$ stimmen die Funktionen F und f überein. Innerhalb des Ellipsoids gilt

$$F \leq f = c - \xi + \eta \leq c + \frac{1}{2}\xi + \eta \leq c + \varepsilon.$$

Somit gehört das Ellipsoid zu beiden Mengen und die Behauptung folgt. \square

Behauptung 2. *Die kritischen Punkte von F und f stimmen überein.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi} &= -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} &= 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1 \end{aligned}$$

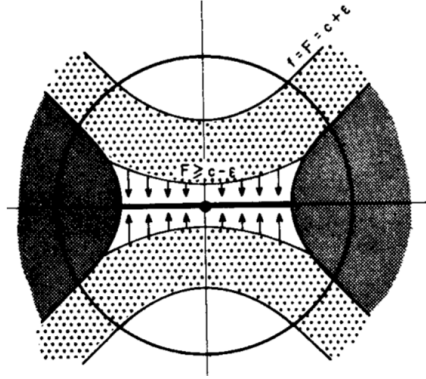


ABBILDUNG 1. Illustration aus [7].

und nach Kettenregel folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x^i} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x^i}.$$

Nur im Ursprung gilt $\frac{\partial \xi}{\partial x^i} = 0$ und $\frac{\partial \eta}{\partial x^i} = 0$ für alle i . Somit hat F in U den Ursprung als einzigen kritischen Punkt. Die Behauptung folgt. \square

Behauptung 3. Die Menge $F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon])$ ist homöomorph bzw. diffeomorph zu $M^{c+\varepsilon} = f^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$.

Beweis. Nach Behauptung 1 gilt $F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon]) = f^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$. Wegen $F \leq f$ folgt somit

$$F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \subset f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]).$$

Damit ist diese Menge nach Voraussetzung kompakt und enthält außer p keine weiteren kritischen Punkte von F . Wegen $F(p) = c - \mu(0) < c - \varepsilon$ enthält $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ somit keine kritischen Punkte von F . Aufgrund des Deformationslemmas für F folgt damit die Behauptung. \square

Wir wollen $F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon])$ als $M^{c-\varepsilon} \cup H$ beschreiben und setzen daher $H := F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon]) \setminus M^{c-\varepsilon}$. Nach Definition von F und μ ist H damit in der Menge enthalten, in der f und F nicht übereinstimmen, also insbesondere in $B_{\sqrt{2\varepsilon}}(0)$.

Nach Behauptung 3 ist $M^{c-\varepsilon} \cup H$ homöomorph (bzw. im glatten Fall diffeomorph) zu $M^{c+\varepsilon}$.

Wir hatten die λ -dimensionale Zelle als $D^\lambda := \{q: \xi(q) \leq \varepsilon, \eta(q) = 0\}$ definiert. Bis auf den Rand $\{q: \xi(q) = \varepsilon, \eta(q) = 0\}$ ist D^λ in H enthalten. Es gilt nämlich $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$ und daher folgt $F(q) \leq F(p) < c - \varepsilon$ für $q \in D^\lambda$. Weiterhin gilt für $q \in D^\lambda$ mit $\xi(q) < \varepsilon$ die Ungleichung $f(q) > c - \varepsilon$.

Behauptung 4. $M^{c-\varepsilon} \cup D^\lambda$ ist Deformationsretrakt von $M^{c-\varepsilon} \cup H = F^{c-\varepsilon} \cup M^{c-\varepsilon} = F^{c-\varepsilon}$.

Beweis. Die gesuchte Deformationsretraktion $r_t: M^{c-\varepsilon} \cup H \rightarrow M^{c-\varepsilon} \cup H \supset M^{c-\varepsilon} \cup D^\lambda$ ist wie folgt definiert. Außerhalb der Koordinatenumgebung U ist r_t für alle $t \in [0, 1]$ die Identität. Sonst unterscheiden wir verschiedene Fälle.

(i) In $H \cap \{\xi \leq \varepsilon\}$ setzen wir

$$r_t(x^1, \dots, x^n) = r_t(y, z) = (x^1, \dots, x^\lambda, (1-t)x^{\lambda+1}, \dots, (1-t)x^n) = (y, (1-t)z).$$

Dann ist r_0 dort die Identität und r_1 bildet alle Punkte nach D^λ ab. Punkte, die bereits in D^λ sind, bleiben fest.

(ii) In $H \cap \{\varepsilon \leq \xi\} = H \cap \{\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon\}$ definieren wir

$$r_t(x^1, \dots, x^n) = r_t(y, z) := (x^1, \dots, x^\lambda, s_t x^{\lambda+1}, \dots, s_t x^n) \equiv (y, s_t z),$$

wobei

$$s_t := (1 - t) + t\sqrt{\frac{\xi - \varepsilon}{\eta}} \in [0, 1]$$

ist. Wiederum gilt $r_0 = \text{id}$ und r_1 bildet direkt nach Definition nach $f^{-1}(\{c - \varepsilon\})$ ab, denn es gilt

$$f(r_1(y, z)) = f\left(y, \sqrt{\frac{\xi - \varepsilon}{\eta}} z\right) = c - |y|^2 + \frac{\xi - \varepsilon}{\eta} |z|^2 = c - \xi + \xi - \varepsilon.$$

Zur Stetigkeit von r_t : Geht $\eta = |z|^2 \rightarrow 0$, so folgt auch $\xi \rightarrow \varepsilon$. In diesem Bereich ist r_t stetig, denn es gilt $t\sqrt{\frac{\xi - \varepsilon}{\eta}} z = t\sqrt{\xi - \varepsilon} \cdot \frac{z}{|z|}$. Für $\xi = \varepsilon$ stimmt diese Definition mit der aus (i) überein.

Wegen $\frac{\partial F}{\partial \eta} > 0$ und $\dot{s}_t \leq 0$ (direkte Rechnung und Definition des Definitionsgebietes) bleiben in beiden Fällen Punkte, die bereits in $F^{c-\varepsilon}$ sind, auch dort.

(iii) Für $\eta + \varepsilon \leq \xi$ setze $r_t = \text{id}$. Diese Punkte sind ohnehin bereits in $M^{c-\varepsilon}$ enthalten und die neue Definition stimmt für $\xi = \eta + \varepsilon$ mit der aus (ii) überein. \square

Wir haben also folgende Deformationsretraktionen gefunden:

In Behauptung 3 von $M^{c+\varepsilon}$ auf $F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon]) = M^{c-\varepsilon} \cup H$ (Definition von H). In Behauptung 4 weiter nach $M^{c-\varepsilon} \cup D^\lambda$.

Dies beweist, dass $M^{c-\varepsilon} \cup D^\lambda$ wie behauptet ein Deformationsretrakt von $M^{c+\varepsilon}$ ist. \square

Bemerkung 6.9. Das Argument aus dem Beweis von Theorem 6.8 funktioniert auch, wenn es in der Menge $f^{-1}(\{c\})$ statt einem k nicht degenerierte kritische Punkte p_1, \dots, p_k mit Indices $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gibt. Dann hat $M^{c+\varepsilon}$ den Homotopietyp von $M^{c-\varepsilon} \cup D^{\lambda_1} \cup \dots \cup D^{\lambda_n}$.

6.1. Darstellung als CW-Komplex.

Definition 6.10 (Finale Topologie, Quotiententopologie). Sei Y eine Menge und seien (X_i, \mathcal{O}_i) , $i \in I$, topologische Räume. Seien $f_i : X_i \rightarrow Y$ Abbildungen. Dann existiert eine feinste Topologie auf Y , die **finale** Topologie, so dass alle f_i stetig werden, nämlich $\mathcal{O} := \{A \subset Y : f_i^{-1}(A) \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I\}$.

Spezialfall Quotientenraum: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Sei \bar{x} die Äquivalenzklasse von x und $\bar{X} := \{\bar{x} : x \in X\}$. Definiere die Projektion $p : X \rightarrow \bar{X}$ durch $x \mapsto \bar{x}$. Die zugehörige finale Topologie heißt **Quotiententopologie**. $U \subset \bar{X}$ ist genau dann offen, wenn $p^{-1}(U) \subset X$ offen ist.

Definition 6.11 (Zusammenkleben von Räumen). Seien X und Y disjunkte topologische Räume, $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f : A \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Wir definieren auf $X \cup Y$ eine Äquivalenzrelation \sim durch

$$z_1 \sim z_2 : \iff \begin{cases} (z_1, z_2 \in A & \text{und } f(z_1) = f(z_2)) \text{ oder} \\ (z_1 \in A, z_2 \in f(A) & \text{und } f(z_1) = z_2) \text{ oder} \\ (z_2 \in A, z_1 \in f(A) & \text{und } f(z_2) = z_1) \text{ oder} \\ & (z_1 = z_2). \end{cases}$$

Den Faktorraum $(X \cup Y)/\sim$ bezeichnen wir mit $Y \cup_f X$. $Y \cup_f X$ heißt der durch **Zusammenkleben** von X mit Y mittels f entstandene Raum.

Bemerkung 6.12. Insbesondere werden beim Zusammenkleben von $X \cup Y$ zu $Y \cup_f X$ die Punkte aus $f(A)$ mit allen ihren Urbildern identifiziert.

Beispiele 6.13.

- (i) Sei $X = [0, 1]$, $A = \{0\} \cup \{1\}$, $Y = [2, 3]$ und $f(0) = 2$, $f(1) = 3$. Dann ist $X \cup_f Y$ homöomorph zu \mathbb{S}^1 .
- (ii) Sei $X = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$, $A = \partial B_1(0)$, $Y = \{p\}$ eine einpunktige Menge und sei $f(x) = p$ für alle $x \in A$. Dann ist $Y \cup_f X$ homöomorph zu \mathbb{S}^n .

Definition 6.14 (Ankleben von Zellen). Definiere $D^n := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ als die abgeschlossene n -dimensionale Einheitskugel, $e^n := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ als die offene n -dimensionale Einheitskugel und $\mathbb{S}^{n-1} := \partial B_1(0) \equiv D^n \setminus \dot{D}^n$ als die $(n-1)$ -dimensionale Sphäre. Wir nennen auch D^n eine n -dimensionale Kugel, e^n eine n -dimensionale Zelle und \mathbb{S}^n eine n -dimensionale Sphäre.

Sei X ein topologischer Raum und $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Wir sagen, dass $X \cup_f D^n$ (oder ein dazu homöomorpher Raum) durch **Ankleben** (oder **Anheften**) einer n -Zelle mittels f entstanden sei. Man schreibt auch laxerweise $X \cup_f e^n$ statt $X \cup_f D^n$.

Bemerkung 6.15. Sei $p : X \cup D^n \rightarrow X \cup_f D^n$ die kanonische Projektion. Dann ist $p|_{e^n} : e^n \rightarrow p(e^n)$ ein Homöomorphismus. Dies erklärt, warum man vom Anheften/Ankleben einer n -Zelle spricht.

Beispiele 6.16.

- (i) Sei $X = D^n$ und $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow D^n$ die kanonische Inklusionsabbildung (in einen zweiten n -Ball). Dann ist $X \cup_f D^n$ homöomorph zu einer n -dimensionalen Sphäre.
- (ii) Sei $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $A := \{(x, y) \in X : x = 0 \vee x = 1\}$, $Y := [0, 1]$. Sei $f : A \rightarrow Y$ durch $f(0, y) := y$ und $f(1, y) := 1 - y$ definiert. Dann ist $M := Y \cup_f X$ homöomorph zu dem (abgeschlossenen) Möbiusband.

Der Rand $\partial M = M \setminus \dot{M}$ des Möbiusbands ist homöomorph zu \mathbb{S}^1 . Somit lässt sich an M eine 2-Zelle mittels einer Abbildung $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \partial M$ injektiv ankleben. Wir können für g einen Homöomorphismus wählen. Wir erhalten einen neuen Raum. (Dieser ist homöomorph zu $\mathbb{R}P^2$.)

Wir können auch mehrere Zellen gleichzeitig ankleben.

Definition 6.17. Seien $D^n \times \{i\}$, $i \in I$, n -Bälle und $f_i : \mathbb{S}^{n-1} \times \{i\} \rightarrow X$ stetige Abbildungen der dazugehörigen $(n-1)$ -Sphären in einen topologischen Raum X . $\mathbb{S}_I^{n-1} = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{S}^{n-1} \times \{i\})$ ist ein Unterraum von $D_I^n := \bigcup_{i \in I} (D^n \times \{i\})$. Wir erhalten eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}_I^{n-1} \rightarrow X$ durch die Definition $f(x, i) := f_i(x)$. Man sagt, dass $X' := X \cup_f D_I^n$ durch **Ankleben** der n -Zellen $e^n \times \{i\}$, $i \in I$, an X entstanden sei.

CW-Komplexe wurden von J. H. C. Whitehead eingeführt. Sie werden induktiv definiert. (CW steht für "closure-finite weak topology".)

Definition 6.18 (endliche CW-Komplexe). Ein nulldimensionaler **CW-Komplex** ist eine endliche Menge von Punkten, die mit der diskreten Topologie versehen ist.

Ein n -dimensionaler **CW-Komplex** ist ein Raum der Form $X \cup_f e_I^n$, wobei f stetig, X ein k -dimensionaler CW-Komplex mit $k < n$ und $e_I^n = \bigcup_{i \in I} (e^n \times \{i\})$,

$|I| < \infty$, die topologische Summe von n -Zellen mit $n \geq 1$ ist.

Die Menge aller Punkte in einem CW-Komplex, die bereits in einem k -dimensionalen CW-Komplex enthalten sind heißt **k -Skelett** oder **k -Gerüst**.

Für unendliche CW-Komplexe verwendet man die folgende Definition.

Definition 6.19 (CW-Komplex). Ein **CW-Komplex** ist ein Hausdorffraum X mit einer (disjunkten) Zerlegung \mathcal{E} in Zellen, so dass

- (i) es zu jeder n -Zelle e eine stetige Abbildung $\Phi_e: \bar{e} \rightarrow X$ gibt, die e homöomorph auf e und ∂e in die Vereinigung der maximal $(n-1)$ -dimensionalen Zellen abbildet. Die Abbildungen Φ_e bezeichnet man auch als charakteristische Abbildungen.
- (ii) \bar{e} (oder genauer $\Phi_e(\bar{e})$) für jedes $e \in \mathcal{E}$ nur endlich viele andere Zellen in \mathcal{E} trifft (Hüllenendlichkeit).
- (iii) $A \subset X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $A \cap \bar{e}$ (genauer $A \cap \Phi_e(\bar{e})$) für jede Zelle $e \in \mathcal{E}$ abgeschlossen ist (schwache Topologie).

Beispiele 6.20.

- (i) \mathbb{S}^2 ist homöomorph zu einem zweidimensionalen CW-Komplex. Man klebt zunächst eine 1-Zelle e^1 an einen Punkt und erhält einen zu \mathbb{S}^1 homöomorphen Raum. Durch Ankleben von zwei 2-Zellen e_1^2 und e_2^2 an den entstandenen Raum erhält man einen zu \mathbb{S}^2 homöomorphen Raum.
- (ii) Man erhält auch einen zu einer \mathbb{S}^2 homöomorphen CW-Komplex, indem man eine 2-Zelle an einen Punkt klebt.
- (iii) Klebt man eine n -Zelle an einen Punkt, so erhält man einen n -dimensionalen CW-Komplex homöomorph zu \mathbb{S}^n .

Lemma 6.21 (Zelluläre Approximation). Sei X ein endlich dimensionaler CW-Komplex. Sei e^n mit Hilfe einer Abbildung f an X angeheftet. Dann ist f zu einer Abbildung ins $(n-1)$ -Skelett von X homotop.

Beweis. Sei D^m eine m -Zelle in X . Bezeichne ohne Einschränkung $f|_V$ mit $V := f^{-1}(B_1^m(0))$ wieder mit f . Können wir zeigen, dass f zu einer Abbildung mit $0 \notin \text{im } f$ homotop ist, so können wir f mit einer Homotopie von $D^m \setminus \{0\}$ auf ∂D^m verknüpfen und die Behauptung folgt. (Der Rest des Beweises ist etwas technisch.)

Da die Menge $f^{-1}(\overline{B_{1/2}(0)})$ kompakt ist, gibt es eine glatte Abschneidefunktion $\psi: D^{m-1} \rightarrow [0, 1]$ mit $\text{supp } \psi \Subset V$ und ein $\delta > 0$ so dass $\psi = 1$ oder $|f| \geq \frac{1}{2}$ in $B_\delta(x)$ für alle $x \in V$ gilt. Definiere

$$f_\varepsilon(x) := \psi \cdot f * \eta_\varepsilon(x) + (1 - \psi(x)) \cdot f(x),$$

wobei η_ε einen Glättungskern bezeichnet. Ist $\varepsilon > 0$ klein genug, so ist f_ε nach Definition in einer Umgebung von $f_\varepsilon^{-1}(B_{1/4}(0))$ glatt, da $f_\varepsilon \rightarrow f$ lokal gleichmäßig für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert. (Genauer: Aus $|f_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{4}$ folgt $|f(x)| \leq \frac{3}{8}$ für $\varepsilon > 0$ klein genug. Daher ist $\psi = 1$ in $B_\delta(x)$ und somit gilt dort $f_\varepsilon(x) = f * \eta_\varepsilon(x)$.)

Da f eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit $m \geq n$ abbildet und somit nirgends regulär ist, gibt es nach dem Sardischen Satz (auf $f_\varepsilon|_{f_\varepsilon^{-1}(B_{1/4}(0))} \rightarrow D^m$ angewandt, so dass f_ε dort glatt ist) einen Punkt p nahe 0 mit $p \notin \text{im } f$. Sei $\varphi: D^m \rightarrow D^m$ ein aus dem Fluss eines Vektorfeldes mit kompaktem Träger gewonnener Diffeomorphismus mit $\varphi(p) = 0$. Dann ist $\varphi \circ f_\varepsilon$ die gesuchte zu f homotope Abbildung mit $0 \notin \text{im}(\varphi \circ f_\varepsilon)$. Die Behauptung folgt. \square

Theorem 6.22. Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine glatte Untermannigfaltigkeit. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und ohne degenerierte kritische Punkte. Sei M^a für alle $a \in \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist der Homotopietyp von M der eines CW-Komplexes, in dem für jeden kritischen Punkt vom Index λ eine Zelle der Dimension λ auftritt.

Wir werden diesen Satz nur für kompakte Mannigfaltigkeiten M beweisen. Im Allgemeinen Fall benötigt der Beweis zusätzliche topologische Hilfsmittel, siehe [7, I §3].

Beim Beweis von Theorem 6.22 werden wir die folgenden beiden Lemmata benutzen.

Lemma 6.23 (Whitehead). *Seien $\varphi_0, \varphi_1: \partial D^\lambda \rightarrow X$ homotope Abbildungen in einen topologischen Raum X und sei $D^\lambda = \{x \in \mathbb{R}^\lambda: |x| \leq 1\}$ die abgeschlossene λ -Zelle. Dann gibt es eine Fortsetzung von $\text{id}: X \rightarrow X$,*

$$k: X \cup_{\varphi_0} D^\lambda \rightarrow X \cup_{\varphi_1} D^\lambda,$$

die eine Homotopieäquivalenz ist.

Beweis. Definiere k durch

$$k(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in X, \\ 2x & \text{für } x \in B_{1/2}(0), \\ \varphi_{2-2|x|}\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{für } x \in B_1(0) \setminus B_{1/2}(0), \end{cases}$$

wobei φ_t eine Homotopie zwischen φ_0 und φ_1 ist. Nahe $x \in \partial B_{1/2}(0)$ und $x \in \partial B_1(0)$ ist k stetig. Damit ist k überall stetig.

Definiere analog

$$l: X \cup_{\varphi_1} D^\lambda \rightarrow X \cup_{\varphi_0} D^\lambda$$

durch

$$l(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in X, \\ 2x & \text{für } x \in B_{1/2}(0), \\ \varphi_{2|x|-1}\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{für } x \in B_1(0) \setminus B_{1/2}(0). \end{cases}$$

Wir behaupten, dass $l \circ k: X \cup_{\varphi_0} D^\lambda \rightarrow X \cup_{\varphi_0} D^\lambda$ und $k \circ l: X \cup_{\varphi_1} D^\lambda \rightarrow X \cup_{\varphi_1} D^\lambda$ jeweils homotop zur Identität sind. Es gilt

$$l \circ k(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in X, \\ 4x & \text{für } x \in B_{1/4}(0), \\ \varphi_{4|x|-1}\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{für } x \in B_{1/2}(0) \setminus B_{1/4}(0), \\ \varphi_{2-2|x|}\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{für } x \in B_1(0) \setminus B_{1/2}(0). \end{cases}$$

Die gesuchte Homotopie erhält man, indem man zunächst in die Abbildungen φ einen Faktor t einführt, etwa $\varphi_{t(4|x|-1)}\left(\frac{x}{|x|}\right)$. Da φ_0 im zusammengeklebten Raum die Identität ist, genügt es nun, eine weitere Homotopie zu betrachten, die in D^λ alles um den Faktor 4 bis zum Rand verschiebt. Durch geeignete Hintereinanderausführung dieser beiden Homotopien sieht man, dass $l \circ k$ homotop zur Identität ist.

Eine analoge Argumentation funktioniert für $k \circ l$. Daher ist k eine Homotopieäquivalenz. \square

Lemma 6.24. *Sei $\varphi: \partial D^\lambda \rightarrow X$ eine anheftende Abbildung. Dann liefert jede Homotopieäquivalenz $f: X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz*

$$F: X \cup_{\varphi} D^\lambda \rightarrow Y \cup_{f \circ \varphi} D^\lambda.$$

Beweis. Definiere F durch

$$\begin{cases} F|_X = f, \\ F|_{e^\lambda} = \text{id}. \end{cases}$$

Nach Definition ist F stetig. Sei $g: Y \rightarrow X$ eine Homotopieinverse von f . Definiere

$$G: Y \cup_{f \circ \varphi} D^\lambda \rightarrow X \cup_{g \circ f \circ \varphi} D^\lambda,$$

durch

$$\begin{cases} G|_Y = g, \\ G|_{e^\lambda} = \text{id}. \end{cases}$$

Die Abbildung $g \circ f \circ \varphi$ ist homotop zu φ . Sei h_t eine Homotopie zwischen $h_0 = g \circ f$ und $h_1 = \text{id}$. Dann ist $h_t \circ \varphi$ eine Homotopie zwischen $g \circ f \circ \varphi$ und φ . Nach Lemma 6.23 gibt es daher eine Homotopieäquivalenz

$$k: X \cup_{g \circ f \circ \varphi} D^\lambda \rightarrow X \cup_\varphi D^\lambda.$$

Wir zeigen zunächst, dass

$$k \circ G \circ F: X \cup_\varphi D^\lambda \rightarrow X \cup_\varphi D^\lambda$$

homotop zur Identität ist: Nach Definition von k (Lemma 6.23 mit $h_t \circ \varphi$ statt φ_t angewandt), G und F erhalten wir

$$k \circ G \circ F(x) = \begin{cases} g \circ f(x) & \text{für } x \in X, \\ 2x & \text{für } x \in B_{1/2}(0), \\ h_{2-2|x|} \circ \varphi\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{für } x \in B_1(0) \setminus B_{1/2}(0). \end{cases}$$

Die gesuchte Homotopie

$$q_\tau: X \cup_\varphi D^\lambda \rightarrow X \cup_\varphi D^\lambda,$$

$0 \leq \tau \leq 1$, ist dann durch

$$q_\tau(x) = \begin{cases} h_\tau(x) & \text{für } x \in X, \\ \frac{2}{1+\tau}x & \text{für } x \in B_1(0) \text{ mit } 0 \leq |x| \leq \frac{1+\tau}{2}, \\ h_{2-2|x|+\tau} \circ \varphi\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{für } x \in B_1(0) \text{ mit } \frac{1+\tau}{2} \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

gegeben, denn $q_0 = k \circ G \circ F$, $q_1 = \text{id}$ und q_τ ist stetig. Somit ist $k \circ G \circ F$ homotop zur Identität und F besitzt eine linke Homotopieinverse: $k \circ G$.

Der Rest des Beweises besteht aus mehreren kleinen recht formalen Schritten:

- (i) Wie im obigen Beweis folgt auch, dass G eine linke Homotopieinverse besitzt.
- (ii) k ist eine Homotopieäquivalenz, besitzt also insbesondere eine linke Homotopieinverse. Daher folgt aus $k \circ (G \circ F) \simeq \text{id}$ (\simeq bedeutet hier homotop), dass auch $(G \circ F) \circ k \simeq \text{id}$ gilt.
- (iii) Aus (i) und $G \circ (F \circ k) \simeq \text{id}$ folgt $(F \circ k) \circ G \simeq \text{id}$.
- (iv) Es folgt $F \circ (k \circ G) \simeq \text{id}$. Da $k \circ G$ auch eine linke Homotopieinverse zu F ist, ist F wie behauptet eine Homotopieäquivalenz. \square

Beweis von Theorem 6.22; kompakter Fall. Seien $c_1 < c_2 < c_3 < \dots$ die kritischen Werte von $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Da f eine Morsefunktion ist und M^a kompakt ist, hat die Menge $\{c_i\}_i$ keine Häufungspunkte. Für $a < c_1$ gilt $M^a = \emptyset$, ist also homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex. Nehme nun an, dass $a \notin \{c_i\}_i$ ist und (per Induktion), dass M^a homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex K vermöge einer Abbildung $h': M^a \rightarrow K$ ist. Wähle nun i , so dass $c_i > a$ minimal ist und nehme an, dass $[c_i - \varepsilon, c_i + \varepsilon] \cap \{c_j\}_j$ nur den Punkt c_i enthält. Nach Theorem 6.8 (in der Form für mehrere kritische Punkte auf dem Level c_i) sind $M^{c_i+\varepsilon}$ und $M^{c_i-\varepsilon} \cup_{\varphi_1} D^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\varphi_j(c_i)} D^{\lambda_j(c_i)}$ für geeignete Abbildungen φ_i homotopieäquivalent. Nach Deformationslemma gibt es eine Homotopieäquivalenz $h: M^{c_i-\varepsilon} \rightarrow M^a$. Nach Lemma 6.24 ist $M^{c_i+\varepsilon}$ zum CW-Komplex K mit vermöge $h' \circ h \circ \varphi_j$ angehefteten Zellen homotopieäquivalent. Die anheftenden Abbildungen $h' \circ h \circ \varphi_j$ sind zu anheftenden Abbildungen

$$\psi_j: \partial D^{\lambda_j} \rightarrow (\lambda_j - 1) - \text{Skelett von } K$$

homotop. Folglich hat der CW-Komplex

$$K \cup_{\psi_1} D^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\psi_j(c)} D^{\lambda_j(c)}$$

denselben Homotopietyp wie $M^{c_i+\varepsilon}$.

Nach endlich vielen Schritten erhalten wir das Theorem für kompakte Mannigfaltigkeiten M . \square

6.2. Anwendungen. Auch das folgende Theorem gilt nicht nur für Untermannigfaltigkeiten.

Theorem 6.25 (Reeb). *Sei $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit. Habe $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ nur zwei nicht degenerierte kritische Punkte. Dann ist M homöomorph zur Sphäre \mathbb{S}^m .*

Beweis. Die beiden kritischen Punkte sind Minimum und Maximum von f . Nehme ohne Einschränkung an, dass $f(M) = [0, 1]$ gilt. Nach Theorem 6.8 (oder aufgrund des Morselemmas) sind $M^\varepsilon = f^{-1}([0, \varepsilon])$ und $f^{-1}([1 - \varepsilon, 1])$ abgeschlossene m -Zellen, falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist. Aufgrund des Deformationslemmas ist M^ε homöomorph (und im glatten Fall sogar diffeomorph) zu $M^{1-\varepsilon}$. Also ist M homöomorph zur Vereinigung von zwei m -Zellen, $M^{1-\varepsilon}$ und $f^{-1}([1 - \varepsilon, 1])$, die entlang ihres gemeinsamen Randes zusammengeklebt sind. Sei $h: M^{1-\varepsilon} \rightarrow \mathbb{S}^m \setminus B_\delta(N)$ ein Homöomorphismus, (oder Diffeomorphismus) der eine kleine Polkappe $B_\delta(N)$ um den Nordpol N auslässt. Ohne Einschränkung sei die Polkappe flachgedrückt und reskaliert, also $B_1(0) \subset \mathbb{R}^m$. Sei $g: f^{-1}([1 - \varepsilon, 1]) \rightarrow \overline{B_1(0)}$ ein Homöomorphismus. Setze nun h nach $f^{-1}([1 - \varepsilon, 1])$ durch

$$h(g^{-1}(y)) := \begin{cases} |y| \cdot h \circ g^{-1}\left(\frac{y}{|y|}\right) & \text{für } y \neq 0, \\ N & y = 0 \end{cases}$$

für $y \in \overline{B_1(0)}$ fort. Wir erhalten einen Homöomorphismus $h: M \rightarrow \mathbb{S}^m$. \square

Bemerkung 6.26. Im allgemeinen ist h kein Diffeomorphismus. Gegenbeispiele sind die von J. Milnor gefundenen exotischen Sphären. Im obigen Beweis ist nicht klar, ob die beiden zu m -Zellen diffeomorphen Teile auch so zusammengeklebt sind, dass wir über die Klebestelle hinweg einen Diffeomorphismus haben.

Lemma 6.27. *$\mathbb{C}P^n$ hat denselben Homotopietyp wie ein CW-Komplex, der durch geeignetes Verkleben aus geraddimensionalen Zellen aufgebaut ist*

$$D^0 \cup D^2 \cup D^4 \cup \dots \cup D^{2n}.$$

Beweis. Wir benutzen das folgende Modell: $\mathbb{C}P^n$ besteht aus Äquivalenzklassen von $(n+1)$ -Tupeln komplexer Zahlen (z^0, \dots, z^n) mit $\sum_{j=0}^n |z^j|^2 = 1$. Aus einem Vertreter erhalten wir die gesamte Äquivalenzklasse durch Multiplikation aller Komponenten mit einer komplexen Zahl vom Betrag 1. Wir bezeichnen die Äquivalenzklassen von (z^0, z^1, \dots, z^n) mit $(z^0 : z^1 : \dots : z^n)$.

Seien c_0, c_1, \dots, c_n verschiedene reelle Zahlen. Definiere $f: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(z^0 : z^1 : \dots : z^n) := \sum_{j=0}^n c_j |z^j|^2.$$

Beachte, dass f auf jeder Äquivalenzklasse konstant ist.

Wir wollen nun die kritischen Punkte von f bestimmen. Betrachte dazu das folgende Koordinatensystem. Sei U_0 die Menge aller Punkte $(z^0 : z^1 : \dots : z^n)$ mit $z^0 \neq 0$. Definiere x^j, y^j durch

$$\frac{|z^0|}{z^0} z^j = x^j + iy^j.$$

Dann ist die Kartenabbildung φ_0 durch

$$\begin{aligned} \varphi_0: U_0 &\rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \\ (z^0 : z^1 : \dots : z^n) &\mapsto (x^1, y^1, x^2, y^2, \dots, x^n, y^n) \end{aligned}$$

gegeben. φ_0 bildet U_0 nach $B_1(0) \subset \mathbb{R}^{2n}$ ab. Es gelten $|z^j|^2 = (x^j)^2 + (y^j)^2$ und $|z^0|^2 = 1 - \sum_{j=1}^n ((x^j)^2 + (y^j)^2)$. Somit erhalten wir in ganz U_0

$$f = c_0 + \sum_{j=0}^n (c_j - c_0) ((x^j)^2 + (y^j)^2).$$

Somit hat $f|_{U_0}$ als einzigen kritischen Punkt $p_0 = (1 : 0 : \dots : 0)$. Dieser Punkt ist nicht degeneriert und sein Index ist

$$2 \cdot |\{j : c_j < c_0\}|.$$

Analog erhalten wir in einem Koordinatensystem U_j für Punkte mit $z_j \neq 0$, dass $p_j = (0 : \dots : 0 : 1 : 0 : \dots : 0)$ der einzige kritische Punkt mit einem entsprechenden Index ist. Da die Mengen U_j die Mannigfaltigkeit $\mathbb{C}P^n$ überdecken, sind dies die einzigen kritischen Punkte von f . Jeder gerade Index zwischen 0 und $2n$ kommt also genau einmal vor. Theorem 6.24 liefert daher, dass der Homotopietyp von $\mathbb{C}P^n$ der eines CW-Komplexes der Form

$$D^0 \cup D^2 \cup D^4 \cup \dots \cup D^{2n}$$

mit geeigneten anheftenden Abbildungen ist. \square

Korollar 6.28. Die Homologiegruppen von $\mathbb{C}P^n$ sind

$$H_i(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } i = 0, 2, 4, \dots, 2n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Die Homologiegruppen jedes Komplexes

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

sind wie angegeben, da die Randabbildungen bei diesem Komplex bereits festgelegt sind. Benutze nun zelluläre Homologie. \square

6.3. Bemerkungen zur Triangulierbarkeit differenzierbarer Mannigfaltigkeiten.

Definition 6.29 (Triangulierbarkeit).

- (i) Seien v_0, \dots, v_n Punkte in \mathbb{R}^m , die nicht in einer affinen Ebene mit Dimension $< n$ liegen, d. h. die Vektoren $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ sollen linear unabhängig sein. Dann ist die konvexe Hülle dieser Punkte, $[v_0, \dots, v_n]$, ein n -Simplex und v_i sind die Ecken des Simplexes.
 $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$ heißt Seite eines Simplexes.
- (ii) Ein n -dimensionaler **Polyeder** ist die Vereinigung endlich vieler n -Simplices, so dass der Schnitt zweier beliebiger verschiedener n -Simplices entweder leer oder eine gemeinsame Seite beider Simplices ist oder durch Auslassen von mehr als einem Punkt entsteht (Seite einer Seite, ...). (Die Endlichkeitsforderung kann auch entfallen.)
- (iii) Ein topologischer Raum (eine Mannigfaltigkeit) heißt **triangulierbar**, falls er (sie) homöomorph zu einem Polyeder ist.

Bemerkung 6.30. Alternativ aber äquivalent kann man Triangulierbarkeit wie folgt definieren:

Eine Mannigfaltigkeit heißt stückweise linear, wenn das Bild jeder Karte ein Polytop (unterschiedliche Definitionen, hier: = eine beschränkte offene Menge mit

stückweise affin linearem Rand aus Polytopen einer Dimension niedriger; 0-Polytop = endliche Punktmenge) ist und wenn Kartenwechsel stückweise affin-linear sind.

Bemerkung 6.31. Ähnlich wie beim Beweis von Theorem 6.8 können wir mit Hilfe einer Morsefunktion zeigen, dass sich jede Mannigfaltigkeit triangulieren lässt. Die hier verwendeten Methoden funktionieren für kompakte Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n . Die Ideen dafür sind:

- (i) Sei M^a bereits trianguliert.
- (ii) Hat f keine kritischen Werte im Intervall $[a, b]$, so ist $f^{-1}([a, b])$ diffeomorph zu $f^{-1}(\{b\}) \times [0, 1]$ und daher triangulierbar, denn $f^{-1}(\{b\})$ ist triangulierbar und eine triangulierbare Menge $\times [0, 1]$ ist wieder triangulierbar.
- (iii) Da wir das Verhalten von f in der Nähe eines isolierten kritischen Punktes genau kennen, können wir die Triangulierung über diesen Punkt hinaus fortsetzen.
- (iv) Per Induktion erhalten wir eine Triangulierung der gesamten Mannigfaltigkeit.

Bemerkung 6.32. Im Zusammenhang mit Triangulierungen treten zwei überraschende Phänomene auf:

- (i) Topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \leq 3$ lassen sich triangulieren, für $n = 4$ funktioniert das im allgemeinen nicht und für $n \geq 5$ ist unbekannt, ob eine topologische Mannigfaltigkeit triangulierbar ist.
- (ii) Zu zwei Triangulierungen gibt es im allgemeinen keine gemeinsame Verfeinerung, also eine Triangulierung, so dass man jede der ursprünglichen Triangulierungen durch Vereinigungen von Simplexes der Verfeinerung erhält (Hauptvermutung, Milnor).

6.4. Morseungleichungen. Wir werden hier ein wenig algebraische Topologie benutzen. In allen hier auftretenden Paaren von Räumen (X, A) mit $A \subset X$ ist A Deformationsretrakt einer Umgebung von A und daher ist (X, A) ein gutes Paar. Nach [5, Prop. A.5] bilden CW-Komplexe und Unter-CW-Komplexe stets gute Paare. Daher wollen wir dies in diesem Kapitel nicht weiter erwähnen.

Definition 6.33. Sei S eine \mathbb{Z} -wertige Funktion auf Paaren von Räumen. Seien $X \supset Y \supset Z$ topologische Räume. Dann heißt S **subadditiv**, falls

$$S(X, Z) \leq S(X, Y) + S(Y, Z)$$

gilt und additiv, falls stets Gleichheit gilt.

Beispiel 6.34. Sei $H_\lambda(X, Y)$ die singuläre Homologiegruppe. Dann ist die λ -te Bettizahl $R_\lambda(X, Y)$ die Anzahl der Summanden in $H_\lambda(X, Y)$, die isomorph zu \mathbb{Z} sind, $R_\lambda(X, Y) \equiv \text{rang } H_\lambda(X, Y)$. Für endliche CW-Komplexe sind alle Bettizahlen endlich. Wir behaupten, dass $R_\lambda(X, Y)$ subadditiv ist: Die lange exakte Homologiesequenz für Tripel liefert die folgende lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_{\lambda+1}(X, Y) \rightarrow H_\lambda(Y, Z) \rightarrow H_\lambda(X, Z) \rightarrow H_\lambda(X, Y) \rightarrow H_{\lambda-1}(Y, Z) \rightarrow \dots$$

Aus der Exaktheit bei den mittleren drei Gruppen folgt die Subadditivität

$$R_\lambda(X, Z) \leq R_\lambda(Y, Z) + R_\lambda(X, Y).$$

Die relative Eulercharakteristik

$$\chi(X, Y) = \sum_{\lambda} (-1)^\lambda R_\lambda(X, Y)$$

ist additiv: Dies überlegt man sich direkt an der langen exakten Homologiesequenz für Tripel.

Lemma 6.35. *Sei S subadditiv und gelte $X_0 \subset \dots \subset X_n$. Dann folgt*

$$S(X_n, X_0) \leq \sum_{i=1}^n S(X_i, X_{i-1}).$$

Ist S additiv, so gilt Gleichheit.

Beweis. Dies ist für $n = 0$ trivial, für $n = 1$ die Definition der Subadditivität und der Induktionsschritt

$$S(X_n, X_0) \leq S(X_{n-1}, X_0) + S(X_n, X_{n-1}) \leq \sum_{i=1}^n S(X_i, X_{i-1})$$

liefert die Behauptung. □

Wir setzen $X_0 = \emptyset$ und setzen $S(X, \emptyset) = S(X)$. Dann folgt

$$(6.1) \quad S(X_n) \leq \sum_{i=1}^n S(X_i, X_{i-1})$$

mit Gleichheit im additiven Fall.

Bemerkung 6.36. In der Nähe eines kritischen Punktes können wir eine Morsefunktion aufgrund des Morselemmas, Lemma 6.6, genau. Durch Addition von einer Funktion $f_{\delta, \zeta}$ für kleines $\zeta > 0$ und sehr kleines $\delta > 0$, die lokal in einer Karte durch

$$f_{\delta, \zeta}(x) = \begin{cases} \delta & \text{für } |x| \leq \zeta, \\ \in [0, \delta], |\nabla f_{\delta, \zeta}| \leq \frac{2\delta}{\zeta} & \text{für } \zeta \leq |x| \leq 2\zeta, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist, können wir eine Morsefunktion auf einer kompakten Mannigfaltigkeit so abhändern, dass die kritischen Werte ohne Einschränkung alle nur einmal in einem kritischen Punkt angenommen werden.

Lemma 6.37. *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morsefunktion. Seien $a < b$ keine kritischen Werte von f und enthalte $f^{-1}([a, b])$ genau einen kritischen Punkt p . Dann ist $H_k(M^b, M^a) = \mathbb{Z}$ (genauer: $H_k(M^b, M^a) \cong \mathbb{Z}$), falls k der Index von p ist. Sonst gilt $H_k(M^b, M^a) = 0$.*

Beweis. Sei λ der Index von p . Dann gilt, da es sich um ein gutes Paar handelt,

$$\begin{aligned} H_k(M^b, M^a) &= H_k(M^a \cup D^\lambda, M^a) = \tilde{H}_k((M^a \cup D^\lambda)/M^a) \\ &= H_k(D^\lambda, \partial D^\lambda) = \tilde{H}_k(\mathbb{S}^\lambda) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = \lambda, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Theorem 6.38 (Schwache Morseungleichungen). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morsefunktion. Sei C_λ die Anzahl der kritischen Punkte von f vom Index λ und $R_\lambda(M)$ die λ -te Bettizahl von M . Dann gelten*

$$(6.2) \quad R_\lambda(M) \leq C_\lambda$$

und

$$(6.3) \quad \sum_{\lambda} (-1)^\lambda R_\lambda(M) = \sum_{\lambda} (-1)^\lambda C_\lambda.$$

Beweis. Seien $a_1 < \dots < a_k$ ohne Einschränkung so gewählt, dass M^{a_i} genau i kritische Punkte enthält. Nach (6.1) mit $\emptyset = M^{a_0} \subset \dots \subset M^{a_k} = M$ und für die Bettizahlen $S = R_\lambda$ folgt

$$R_\lambda(M) \leq \sum_{i=1}^k R_\lambda(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_\lambda.$$

Dies ist (6.2).

Im Falle der relativen Eulercharakteristik folgt

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^k \chi(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_0 - C_1 + C_2 \mp \dots \pm C_n.$$

Dies ist gerade (6.3). □

Diese Ungleichungen kann man mit Hilfe einer neuen subadditiven Funktion S_λ verschärfen. Definiere

$$\begin{aligned} S_\lambda(X, Y) &:= \sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-i} R_i(X, Y) \\ &\equiv R_\lambda(X, Y) - R_{\lambda-1}(X, Y) + R_{\lambda-2}(X, Y) \mp \dots \pm R_0(X, Y). \end{aligned}$$

Die Subadditivität werden wir in Lemma 6.43 beweisen.

Lemma 6.39. *Sei*

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$$

eine exakte Sequenz von Vektorräumen. Dann gilt

$$\text{rang } i + \text{rang } j = \dim B.$$

Beweis. Aus $\text{im } i = \ker j$ folgt

$$\text{rang } i = \dim \text{im } i = \dim \ker j.$$

Mit $\text{rang } j = \dim B - \dim \ker j$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 6.40. Um dies auf abelsche Gruppen anwenden zu können, wollen wir Lokalisierungen verwenden, siehe [1, Kap. 3]. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, M ein R -Modul und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, die die Eins enthält. Dann ist $S^{-1}M$ als R -Modul der Äquivalenzklassen aller „Brüche“ $(a, s) \equiv \frac{a}{s}$ mit $(a, s) \in M \times S$, üblicher Bruchrechnung und der Äquivalenzrelation $(a, s) \sim (b, t)$, falls es ein $r \in S$ mit $r(ta - sb) = 0$ gibt, definiert.

Wir benötigen hier insbesondere den Fall, wenn $R = \mathbb{Z}$ und $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sind und M eine abelsche Gruppe ist. Dann ist $S^{-1}R = \mathbb{Q}$.

Sei $\varphi: M \rightarrow N$ ein Modulhomomorphismus. Definieren wir den Funktor S^{-1} von der Kategorie der R -Moduln in die Kategorie der $S^{-1}R$ -Moduln durch

$$S^{-1}\varphi: S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N \quad \text{mit} \quad \frac{m}{s} \mapsto \frac{\varphi(m)}{s},$$

so ist S^{-1} exakt. Im Fall $R = \mathbb{Z}$ und $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist der Funktor S^{-1} bis auf eine natürliche Äquivalenz (= natürliche Transformation mit Inverse) Θ gleich $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, dem Tensorieren mit \mathbb{Q} . Die natürliche Transformation ist durch $S^{-1}A \ni \frac{a}{s} \mapsto a \otimes \frac{1}{s} \in A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ mit der Inverse $a \otimes \frac{p}{q} \mapsto \frac{pa}{q}$ auf Objekten gegeben. In unserem Spezialfall erhalten wir also aus der exakten Sequenz

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$$

abelscher Gruppen das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{-1}A & \xrightarrow{S^{-1}i} & S^{-1}B & \xrightarrow{S^{-1}j} & S^{-1}C \\
 \downarrow \Theta_A & \quad \quad \quad & \downarrow \Theta_B & \quad \quad \quad & \downarrow \Theta_C \\
 A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \xrightarrow{i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}} & B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \xrightarrow{j \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}} & C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}
 \end{array}$$

und links darin

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{a}{s} & \xrightarrow{\quad} & \frac{i(a)}{s} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 a \otimes \frac{1}{s} & \xrightarrow{\quad} & i(a) \otimes \frac{1}{s}.
 \end{array}$$

So erhalten wir aus einer exakten Sequenz abelscher Gruppen eine exakte Sequenz von Vektorräumen.

Wir beweisen nur ein Teilresultat:

Proposition 6.41. *Der Funktor S^{-1} ist exakt, d. h. ist $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$ in B exakt, so ist auch $S^{-1}A \xrightarrow{S^{-1}i} S^{-1}B \xrightarrow{S^{-1}j} S^{-1}C$ in $S^{-1}B$ exakt.*

Beweis. Aus $j \circ i = 0$ folgt $S^{-1}j \circ S^{-1}i = S^{-1}(0) = 0$. Somit ist $\text{im}(S^{-1}i) \subset \ker(S^{-1}j)$. Sei nun $\frac{b}{s} \in \ker(S^{-1}j)$, also $\frac{j(b)}{s} = 0$ in $S^{-1}C$. Daher gibt es ein $t \in S$ mit $tj(b) = 0$ in C . j ist ein R -Modulhomomorphismus. Also ist $tj(b) = j(tb)$. Es folgt $tb \in \ker j = \text{im } i$. Somit gibt es ein $a \in A$ mit $i(a) = tb$. Wir erhalten $\frac{b}{s} = \frac{i(a)}{st} = (S^{-1}i)\left(\frac{a}{st}\right) \in \text{im}(S^{-1}i)$. Also gilt auch $\ker(S^{-1}j) \subset \text{im}(S^{-1}i)$. \square

Also folgt

Korollar 6.42. *Sei*

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$$

eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Dann gilt

$$\text{rang } i + \text{rang } j = \text{rang } B.$$

Beweis. Tensoriere mit \mathbb{Q} , „ $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ “, und benutze Lemma 6.39. \square

Lemma 6.43. S_{λ} ist subadditiv.

Beweis. Sei

$$\dots \xrightarrow{h} A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{k} \dots \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

eine lange exakte Sequenz von Vektorräumen. Induktiv erhalten wir mit Lemma 6.39

$$\begin{aligned}
 \text{rang } h &= \dim A - \text{rang } i \\
 &= \dim A - \dim B + \text{rang } j \\
 &= \dim A - \dim B + \dim C - \text{rang } k \\
 &= \dots \\
 &= \dim A - \dim B + \dim C \mp \dots \pm \dim Z.
 \end{aligned}$$

Da der Rang einer Abbildung nichtnegativ ist, gilt dies auch für die rechte Seite.

Betrachte nun die lange exakte Homologiesequenz für das Tripel $X \supset Y \supset Z$

$$\dots \rightarrow H_{\lambda+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_{\lambda}(Y, Z) \rightarrow H_{\lambda}(X, Z) \rightarrow H_{\lambda}(X, Y) \rightarrow H_{\lambda-1}(Y, Z) \rightarrow \dots$$

Aus $\text{rang } \partial \geq 0$ folgt daher mit den obigen Überlegungen, analog zu Korollar 6.42 auf abelsche Gruppen ausgedehnt,

$$\text{rang } \partial = R_\lambda(Y, Z) - R_\lambda(X, Z) + R_\lambda(X, Y) - R_{\lambda-1}(Y, Z) \pm \dots \geq 0.$$

Umsortieren der Terme liefert nun

$$S_\lambda(Y, Z) - S_\lambda(X, Z) + S_\lambda(X, Y) \geq 0,$$

also die Subadditivität von S_λ . \square

Unter denselben Voraussetzungen wie für die schwachen Morsungleichungen bekommt man nun die folgende Verschärfung

Theorem 6.44 (Morseungleichung). *Sei M eine kompakte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morsefunktion. Sei C_λ die Anzahl der kritischen Punkte von f vom Index λ und $R_\lambda(M)$ die λ -te Bettizahl von M . Dann gilt*

$$(6.4) \quad R_\lambda(M) - R_{\lambda-1}(M) \pm \dots \pm R_0(M) \equiv S_\lambda(M) \leq C_\lambda - C_{\lambda-1} \pm \dots \pm C_0.$$

Beweis. Seien $a_0 < a_1 < \dots < a_k$ ohne Einschränkung so gewählt, dass M^{a_i} genau i kritische Punkte enthält. Nach (6.1) mit $\emptyset = M^{a_0} \subset \dots \subset M^{a_k} = M$ und $S = S_\lambda$ folgt

$$S_\lambda(M) \leq \sum_{i=1}^k S_\lambda(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_\lambda - C_{\lambda-1} \pm \dots \pm C_0. \quad \square$$

Bemerkung 6.45. Theorem 6.44 impliziert Theorem 6.38: $(6.4)_\lambda + (6.4)_{\lambda-1}$ liefert (6.2). Betrachtet man (6.4) für $\lambda > \dim M$, so erhält man (6.3) und zwar die eine Richtung für gerade λ und die andere für ungerade λ .

Das folgende Korollar kann man auch wieder auf $\mathbb{C}P^n$ anwenden.

Korollar 6.46. *Sei $C_{\lambda+1} = C_{\lambda-1} = 0$. Dann gelten $R_{\lambda+1} = R_{\lambda-1} = 0$ und $R_\lambda = C_\lambda$.*

Beweis. Aus $C_{\lambda+1} = 0$ und $C_{\lambda-1} = 0$ folgen jeweils $R_{\lambda+1} = 0$ und $R_{\lambda-1} = 0$. Aus $(6.4)_\lambda$ und $(6.4)_{\lambda+1}$ folgt wegen $R_{\lambda+1} = C_{\lambda+1} = 0$

$$R_\lambda - R_{\lambda-1} \pm \dots \pm R_0 = C_\lambda - C_{\lambda-1} \pm \dots \pm C_0.$$

Analog erhalten wir aus $R_{\lambda-1} = C_{\lambda-1} = 0$

$$R_{\lambda-2} - R_{\lambda-3} \pm \dots \pm R_0 = C_{\lambda-2} - C_{\lambda-3} \pm \dots \pm C_0.$$

Die Differenz liefert

$$R_\lambda = R_\lambda - R_{\lambda-1} = C_\lambda - C_{\lambda-1} = C_\lambda. \quad \square$$

7. KRÄGEN UND CHIRURGIE

Wir benutzen [6, 13].

Definition 7.1 (Mannigfaltigkeiten mit Rand).

- (i) Eine m -dimensionale topologische **Mannigfaltigkeit mit Rand** (oder eine berandete Mannigfaltigkeit) ist ein Hausdorffraum M (mit abzählbarer Basis der Topologie), so dass M lokal homöomorph zu

$$R_+^m := \{(x^1, \dots, x^m) : x^m \geq 0\}$$

ist.

- (ii) Sei $U \subset M$ offen und $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ mit $\varphi(U) \subset \mathbb{R}_+^m$ offen ein Homöomorphismus. Dann heißt φ Karte. Eine Familie von Karten $\varphi_i: U_i \rightarrow \varphi_i(U_i)$ heißt Atlas, wenn $\bigcup_i U_i = M$ gilt. Ein maximaler Atlas ist ein Atlas, der alle zu den gegebenen Karten kompatiblen Karten bereits enthält.

- (iii) Zur Definition einer glatten Struktur auf M benutzen wir folgende Konvention: Sei f auf einer offenen Teilmenge U von \mathbb{R}_+^m definiert. Dann nennen wir f glatt (von der Klasse C^k), wenn es für jeden Punkt $x \in U$ eine Umgebung in \mathbb{R}^m gibt, so dass eine geeignete Fortsetzung \tilde{f} von f dort glatt (von der Klasse C^k) ist. Die Ableitungen von f auf $\partial\mathbb{R}_+^m$ definieren wir als Ableitungen der Fortsetzung \tilde{f} ; diese hängen nicht von der Wahl der Fortsetzung ab.
- (iv) Sei M eine m -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Eine glatte (C^k -) Struktur auf M ist ein maximaler Atlas mit glatten (C^k -) Kartenwechselabbildungen zwischen Karten $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ und $\psi: V \rightarrow \psi(V)$:
- $$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V).$$
- (v) Eine glatte (C^k -) m -dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand** ist eine m -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand mit einer glatten (C^k -) Struktur.

Bemerkung 7.2. Seien $V, V' \subset \mathbb{R}_+^m$ offen. Setze $\partial V := V \cap (\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\})$ und definiere $\partial V'$ entsprechend. Sei $f: V \rightarrow V'$ ein Diffeomorphismus, so werden aufgrund des inversen Funktionensatzes Punkte aus $V \setminus \partial V$ auf Punkte in $V' \setminus \partial V'$ abgebildet. Unter Diffeomorphismen bleiben also der Rand und das Innere invariant.

Dies ist auch für Homöomorphismen richtig, aber etwas komplizierter zu beweisen.

Dies erlaubt es, den Rand einer Mannigfaltigkeit in einer Karte zu definieren und dabei eine kartenunabhängige Definition zu erhalten.

Definition 7.3 (Rand einer Mannigfaltigkeit).

- (i) Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand mit Karten $\varphi_i: U_i \rightarrow \varphi_i(U_i)$. Dann definieren wir den **Rand** ∂M als die Vereinigung der Mengen $\varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\})$.
- (ii) Sei M eine Mannigfaltigkeit. Dann setzen wir $\partial M := \emptyset$.

Bemerkung 7.4.

- (i) Nach obiger Definition ist $x \in U_i$ genau dann ein Randpunkt, wenn $\varphi_i(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} =: \partial\mathbb{R}_+^m$ gilt.
- (ii) Ist ∂M nichtleer, so ist ∂M eine $(m-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (ohne Rand). Sei $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ eine Karte von W . Dann sind Karten von ∂W durch

$$\varphi|_{\partial W}: U \cap \partial W \rightarrow \varphi(U \cap \partial W) \subset \partial\mathbb{R}_+^m \cong \mathbb{R}^{m-1}$$

gegeben. Mit diesen Karten wird ∂M zu einer glatten (C^k -) Mannigfaltigkeit.

Lemma 7.5. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Sei a ein regulärer Wert von f . Dann ist $f^{-1}((-\infty, a])$ eine berandete Mannigfaltigkeit mit Rand $f^{-1}(\{a\})$.

Beweis. Zu jedem $x \in f^{-1}(\{a\})$ und jeder Karte $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $x \in U$ gibt es nahe $\varphi(x)$ aufgrund des Satzes über implizite Funktionen einen lokalen Diffeomorphismus $\psi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, so dass lokal $f \circ (\psi \circ \varphi)^{-1}$ genau in $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ verschwindet, für $x^m > 0$ negativ und für $x^m < 0$ positiv ist. Verwende nun Karten der Form $\psi \circ \varphi$ für $x \in \varphi^{-1}(\{a\})$. \square

Bemerkung 7.6. Glatte Abbildungen, reguläre Werte und Diffeomorphismen definieren wir für Mannigfaltigkeiten mit Rand genauso wie für Mannigfaltigkeiten ohne Rand.

Definition 7.7 (Kragen). Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Ein **Kragen** von M ist eine Einbettung (d. h. eine Immersion, die ein Homöomorphismus bezüglich der Unterraumtopologie ist) $\Phi: \partial M \times [0, 1) \rightarrow M$ mit $\Phi(x, 0) = x$ für alle $x \in \partial M$.

Bemerkung 7.8. Zu einer Mannigfaltigkeit mit Rand gibt es stets einen Kragen: Man folge lokal dem Fluss eines Vektorfeldes, das entlang ∂M transversal zu ∂M und „nach innen“ gerichtet ist. Ohne Zusatzaufwand können wir dies aktuell nur für eingebettete Mannigfaltigkeiten ausführen.

Umgekehrt definiert jeder Kragen ein solches Vektorfeld nahe ∂M .

Indem wir zwei solche Vektorfelder in der Nähe von ∂M durch Konvexkombination ineinander überführen, können wir folgendes zeigen:

Sei M eine berandete Mannigfaltigkeit mit kompaktem Rand ∂M . Seien Φ_1 und Φ_2 zwei Krägen von M . Sei K eine kompakte Umgebung von ∂M , so gibt es $\varepsilon > 0$ und eine Diffeotopie (= eine differenzierbare Homotopie $H: M \times [0, 1] \rightarrow M$ mit $H(x, 0) = x$ für $x \in M$, so dass alle $H(\cdot, t): M \rightarrow M$ Diffeomorphismen sind) von M , die auf $\partial M \cup \mathring{K}$ jeden Punkt fest lässt und die in $\partial M \times [0, \varepsilon)$ den Kragen Φ_1 in Φ_2 überführt, d. h. es gilt $H(\Phi_1(x, \tau), 1) = \Phi_2(x, \tau)$ für alle $x \in \partial M$, $0 \leq \tau < \varepsilon$. (Siehe auch [2, Satz 13.7])

Damit ist die Verklebung von Mannigfaltigkeiten mit Hilfe eines Kragens bis auf solche Diffeotopien eindeutig definiert.

Bemerkung 7.9. Seien $M \times N$ berandete Mannigfaltigkeiten. Dann ist $M \times N$ auch eine Mannigfaltigkeit mit Rand.

Außerhalb von $\partial M \times \partial N$ kann man wie bei Mannigfaltigkeiten ohne Rand vorgehen. In einer „Ecke“ erhält man so ohne Einschränkung eine Abbildung auf $\{x \in \mathbb{R}^m: x^m \geq 0, x^{m-1} \geq 0\}$. Durch Aufbiegen des 90° -Winkels erhält man wieder den Modellraum \mathbb{R}_+^m . Dieses Aufbiegen ist jedoch kein Diffeomorphismus, da die Umkehrabbildung gewisse Geraden „abknickt“.

Mit Hilfe von Krägen können wir Mannigfaltigkeiten verkleben.

Lemma 7.10. Seien M_1, M_2 zwei glatte Mannigfaltigkeiten mit Krägen $\Phi_i: \partial M_i \times [0, 1] \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$. Sei $f: \partial M_1 \rightarrow \partial M_2$ ein Diffeomorphismus. Dann gibt es eine glatte Struktur auf $M_1 \cup_f M_2 := (M_1 \dot{\cup} M_2) / \sim$, wobei wir $x \in \partial M_1$ mit $f(x) \in \partial M_2$ identifizieren.

Beweis. Die Details sind eine Übung.

Sei Z eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Seien $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$ Homöomorphismen, wobei V_i eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist, so dass die Mengen U_i die Mannigfaltigkeit Z überdecken. Ist $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ für alle i, j ein Diffeomorphismus, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Struktur auf Z , die alle Karten φ_i zu Diffeomorphismen macht.

$M_1 \cup_f M_2$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit den unten verwendeten Karten. Setze $M := \partial M_1 = \partial M_2 \subset M_1 \cup_f M_2$. Die differenzierbare Struktur erhalten wir nun mit Hilfe der folgenden Homöomorphismen:

$$\begin{aligned} U_1 &:= M_1 \setminus M, & \varphi_1 &= \text{id}: U_1 \rightarrow U_1, \\ U_2 &:= M_2 \setminus M, & \varphi_2 &= \text{id}: U_2 \rightarrow U_2, \\ U_3 &:= \text{im } \Phi_1 \cap_f \text{im } \Phi_2, & \varphi_3 &: U_3 \rightarrow M \times (-1, 1), \\ \varphi_3(\Phi_1(x, t)) &:= (x, t), & \varphi_3(\Phi_2(x, t)) &:= (f(x), -t). \end{aligned}$$

Da die Verkettungen der Homöomorphismen φ_i nach Konstruktion Diffeomorphismen sind, ist $M_1 \cup_f M_2 \cong M_1 \cup_M M_2$ eine glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand. \square

Bemerkung 7.11. Mit dieser Methode kann man auch zwei Mannigfaltigkeiten zusammenkleben, deren Ränder diffeomorphe Zusammenhangskomponenten haben:

Gilt $\partial M_i = R_i \cup N_i$ und ist N_i eine Zusammenhangskomponente von ∂M_i , $i = 1, 2$, und ist $f: N_1 \rightarrow N_2$ ein Diffeomorphismus, so können wir mit derselben Methode wie oben $M_1 \cup_f M_2$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit mit Rand machen, indem wir M_1 und M_2 vermöge f entlang N_1 bzw. N_2 zusammenkleben.

Definition 7.12. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist die **Verdopplung** von M , $(M \times \{1\}) \cup_f (M \times \{2\})$ mit $f: \partial M \times \{1\} \rightarrow \partial M \times \{2\}$, $f(x, 1) = (x, 2)$, eine Mannigfaltigkeit ohne Rand.

7.1. Chirurgie. Chirurgie (engl. surgery) wurde u. a. beim Beweis der Poincaré-Vermutung benutzt. Mit Hilfe des Ricciflusses deformiert man dabei eine Mannigfaltigkeit und führt an geeigneten Stellen Chirurgie durch um Singularitäten zu vermeiden und um die Mannigfaltigkeit nach einer Folge chirurgischer Eingriffe in eine kanonische Form zu bringen.

Bemerkung 7.13. Grundlage für Chirurgie ist die folgende Beobachtung: Die Mannigfaltigkeit $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^{q-1}$ ist der Rand der Mannigfaltigkeiten $D^{p+1} \times \mathbb{S}^{q-1}$ oder $\mathbb{S}^p \times D^q$.

Definition 7.14 (Chirurgie). Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit $n = p + q$. Sei $\varphi: \mathbb{S}^p \times D^q \rightarrow M$ eine Einbettung. Hieraus erhalten wir durch (p -)Chirurgie eine Mannigfaltigkeit, indem wir das innere des Bildes von φ aus M entfernen und an die so entstandene Mannigfaltigkeit mit Rand eine Mannigfaltigkeit mit demselben Rand mit Hilfe von Krägen ankleben

$$M' := (M \setminus \text{int im } \varphi) \cup_{\varphi|_{\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^{q-1}}} (D^{p+1} \times \mathbb{S}^{q-1}).$$

Bemerkung 7.15. Ein chirurgischer Eingriff lässt sich auch wieder rückgängig machen: Führt man nach einer p -Chirurgie eine $(q - 1)$ -Chirurgie aus, schneidet also $\mathbb{S}^{q-1} \times D^{p+1}$ heraus und klebt dafür $D^q \times \mathbb{S}^p$ entlang einer von φ induzierten Einbettung von $\mathbb{S}^{q-1} \times \mathbb{S}^p$ ein, so erhält man wieder die ursprüngliche Mannigfaltigkeit bis auf einen Diffeomorphismus. Dieser kommt daher, dass wir für das Verkleben Krägen benötigen.

Definition 7.16 (Zusammenhängende Summe). Seien M, N zwei n -dimensionale Mannigfaltigkeiten. Dann definieren wir die **zusammenhängende Summe** wie folgt: Wir betrachten die disjunkte Vereinigung von M und N und eine Einbettung $\varphi: \mathbb{S}^0 \times D^n$, $\mathbb{S}^0 \equiv \{-1, 1\}$, mit $\varphi(\{-1\} \times D^n) \subset M$ und $\varphi(\{+1\} \times D^n) \subset N$. Die 0-Chirurgie liefert dann die zusammenhängende Summe von M und N , $M \# N$.

Bemerkung 7.17.

- (i) Sei p ein beliebiger Punkt in einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Einbettung von D^n in diese Mannigfaltigkeit, deren Bild beliebig nahe an p ist. Somit lassen sich zwei Mannigfaltigkeiten in der Nähe jedes beliebigen Punktes zusammenkleben.)
- (ii) Seien M und N zusammenhängende Mannigfaltigkeiten. Dann ist $M \# N$ bis auf Diffeomorphismen eindeutig definiert. (Übung.)

Bemerkung 7.18. Die wichtige Chirurgie bei der Lösung der Poincaré-Vermutung durch G. Perelman mit Hilfe des Ricciflusses ist folgende: Schneide aus einem „neck“ der Form $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ein Stück $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$ heraus und setze Kappen auf die Enden: Ersetze $\mathbb{S}^2 \times D^1$ durch $D^3 \times \mathbb{S}^0$.

So sieht auch die Chirurgie in einer Arbeit von G. Huisken und C. Sinestrari über den mittleren Krümmungsfluss aus, hier tritt aber allgemeiner $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ statt $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ auf.

Die Schwierigkeit bei chirurgischen Operationen bei geometrischen Flussgleichungen liegt darin, die sich bewegende Mannigfaltigkeit vor dem Eingriff so genau zu kennen, dass sich kompliziertere geometrische Größen durch den Eingriff nicht verschlechtern.

LITERATUR

1. M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

2. Theodor Bröcker and Klaus Jänich, *Einführung in die Differentialtopologie*, Springer-Verlag, Berlin, 1973, Heidelberger Taschenbücher, Band 143.
3. Klaus Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
4. Jean Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York, 1969, Enlarged and corrected printing, Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-I.
5. Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/>.
6. Matthias Kreck, *Differentialalgebraic Topology*, 2000, Lecture Notes.
7. John Milnor, *Morse theory*, Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
8. John Nash, C^1 isometric imbeddings, Ann. of Math. (2) **60** (1954), 383–396.
9. John Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math. (2) **63** (1956), 20–63.
10. Frank Quinn and Arthur Sard, *Hausdorff conullity of critical images of Fredholm maps*, Amer. J. Math. **94** (1972), 1101–1110.
11. Arthur Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942), 883–890.
12. Friedrich Tomi, *Nichtlineare Funktionalanalysis*, 1997, Lecture Notes.
13. Wikipedia, <http://www.wikipedia.org>.
14. Michel Willem, *Minimax theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

OLIVER C. SCHNÜRER, FACHBEREICH MATHEMATIK UND STATISTIK, UNIVERSITÄT KONSTANZ,
78457 KONSTANZ, GERMANY

Email address: Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de