Übungen zur Vorlesung Fundamentalgruppen

Aufgabe 1.1. Seien (X,d) und (Y,d') metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) f ist stetig.

(ii) $\underset{x\in X}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists} : a \in B_\delta(x) \Longrightarrow f(a) \in B_\varepsilon(f(x))$.

(iii) Für alle offenen Mengen $B \subset Y$ ist auch $f^{-1}(B)$ offen.

Aufgabe 1.2. Seien (X,d) und (Y,d') metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Kreuze bei den folgenden Aussagen genau die an, die äquivalent zur Stetigkeit von f sind und begründe dies:

(i) Für alle offenen Mengen $A \subset X$ ist auch $f(A)$ offen.

(ii) Für alle abgeschlossenen Mengen $B \subset Y$ ist auch $f^{-1}(B)$ abgeschlossen.

(iii) Für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset X$ ist auch $f(A)$ abgeschlossen.

(iv) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für x, $y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$ auch $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ folgt.

Aufgabe 1.3. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Sei $a \in X$ und $r > 0$. Definiere

$$B_r(a) := \{x \in X : d(x,a) < r\}$$

und

$$\mathcal{O} := \{A \in \mathcal{P}(X) : \forall\, x \in A\, \exists\, r > 0 : B_r(x) \subset A\}.$$

Zeige, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X definiert. $\mathcal{O}$ heißt von der Metrik d auf X induzierte Topologie.

Aufgabe 1.4. Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Definiere für $i = 1, 2$ die Mengen $\mathcal{O}_i$ als die von der Metrik d_i auf X_i induzierte Topologien. Sei $f : X_1 \to X_2$ eine Abbildung.

Zeige, dass f genau dann eine stetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen (X_1, d_1) und (X_2, d_2) ist, wenn f eine stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen $(X_1, \mathcal{O}_1)$ und $(X_2, \mathcal{O}_2)$ ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 17.12.2009, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung Fundamentalgruppen

Aufgabe 2.1. Seien X und Y topologische Räume. Zeige, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn für alle $A \subset X$ die Beziehung

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

gilt.

Kleiner Zusatz: Gilt für stetige Funktionen stets $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$?

Aufgabe 2.2. Seien f_0, f_1, g_0 und g_1 Wege in einem topologischen Raum. Gelten $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$ und $g_0 \simeq g_1$, so folgt auch $f_0 \simeq f_1$.

Aufgabe 2.3. Zeige, dass der Basispunktwechselhomomorphismus β_h nur von der Homotopieklasse von h abhängt.

Aufgabe 2.4. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn es einen Punkt $x_0 \in X$ gibt, so dass für alle $x \in X$ die Strecke von x nach x_0, also die Menge $\{tx + (1-t)x_0 : t \in [0,1]\}$, in X enthalten ist.

Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt lokal sternförmig, wenn jeder Punkt eine sternförmige Umgebung $U \subset X$ besitzt.

Ein Weg in einer lokal sternförmigen Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist homotop zu einem stückweise (affin) linearen Weg h, d. h. zu einem Weg, der aus endlich vielen geraden Strecken besteht, die mit konstanter Geschwindigkeit $\left|\frac{\partial}{\partial t} h(t)\right|$ (was außer in endlich vielen Punkten $t \in [0,1]$, die den Endpunkten der Strecken entsprechen, definiert ist) durchlaufen werden.

Eine Menge ist insbesondere dann lokal sternförmig, wenn sie offen ist oder wenn sie die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen konvexen Mengen ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 07.01.2010, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung Fundamentalgruppen

Definition 1. *Sei G ein topologischer Raum und eine Gruppe, so dass die Abbildungen*

$$G \times G \ni (x, y) \mapsto x \cdot y$$

und

$$G \ni x \mapsto x^{-1}$$

stetig sind. Dann ist G eine topologische Gruppe.

Beispiele 2.

(i) Die reellen Zahlen mit der Addition $(\mathbb{R}, +)$

(ii) Die invertierbaren $n \times n$-Matrizen $GL(n, \mathbb{R})$. Dabei betrachten wir $GL(n, \mathbb{R})$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit der induzierten Unterraumtopologie.

Aufgabe 3.1. Sei G eine topologische Gruppe und e die Eins. Dann ist $\pi_1(G, e)$ abelsch.

Hinweis: Seien α, β Repräsentanten von Elementen der Fundamentalgruppe. Betrachte dann die Abbildung

$$[0, 1]^2 \ni (s, t) \mapsto \alpha(s) \cdot \beta(t).$$

Aufgabe 3.2. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann ist $\pi_1(X)$ genau dann abelsch, wenn die Basispunktwechselhomomorphismen β_h nur von den Endpunkten des Weges h abhängen.

Aufgabe 3.3. Benutze Aufgabe 2.4 um zu zeigen, dass ein geschlossener Weg auf $\mathbb{S}^n$ homotop zu einem glatten Weg ist. Zeige, dass ein glatter Weg nicht surjektiv ist. Benutze dies, um nochmals zu zeigen, dass $\pi_1(\mathbb{S}^n)$ trivial ist, falls $n \geq 2$ ist.

Aufgabe 3.4. Sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass die folgenden drei Bedingungen äquivalent sind:

(i) Jede Abbildung $\mathbb{S}^1 \to X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung, d. h. zu einer Abbildung, deren Bild ein Punkt ist.

(ii) Jede Abbildung $\mathbb{S}^1 \to X$ lässt sich zu einer Abbildung $D^2 \to X$ fortsetzen.

(iii) Für jeden Punkt $x_0 \in X$ ist $\pi_1(X, x_0)$ einelementig.

Schließe, dass ein wegzusammenhängender Raum X genau dann einfach zusammenhängend ist, wenn alle Abbildungen $\mathbb{S}^1 \to X$ homotop sind. (In dieser Aufgabe bedeutet „homotop“, „homotop ohne Basispunkt“.)

Abgabe: Bis Donnerstag, 14.01.2010, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung Fundamentalgruppen

Aufgabe 4.1. Seien A_1, A_2, $A_3 \subset \mathbb{R}^3$ kompakt. Zeige mit Hilfe des Satzes von Borsuk-Ulam, dass es eine Ebene gibt, die gleichzeitig jede Menge A_i in zwei Teile gleichen Maßes zerlegt.

Dies besagt, dass man ein Sandwich mit zwei verschiedenen Belägen durch einen geraden Schnitt so in zwei Teile teilen kann, dass alle drei Zutaten gleichmäßig aufgeteilt sind.

Aufgabe 4.2. Der Isomorphismus $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ zeigt, dass geschlossene Wege in $X \times \{y_0\}$ und in $\{x_0\} \times Y$ kommutierende Elemente in $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ repräsentieren. Gib eine explizite Homotopie an, die dies zeigt.

Hinweis: Betrachte dies zunächst für $X = Y = \mathbb{S}^1$.

Aufgabe 4.3. Zeige, dass es in den folgenden Fällen keine Retraktionen $r : X \to A$ gibt:

(i) $X = \mathbb{R}^3$, A eine Teilmenge von X, die homöomorph zu $\mathbb{S}^1$ ist.

(ii) Der Volltorus $X = \mathbb{S}^1 \times D^2$ und sein Rand $A := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Die folgenden Betrachtungen werden wir später noch vertiefen.

Aufgabe 4.4.

(i) Sei A ein topologischer Raum. Durch Anheften einer Zelle e^n mit $n \geq 2$ erhalte man einen Raum X. Sei $a \in A$. Zeige, dass die Inklusion $i : A \hookrightarrow X$ eine Surjektion $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ induziert. Gib ein Beispiel an, dass die Abbildung im Allgemeinen nicht injektiv ist.

(ii) Betrachte einen endlichen CW-Komplex X. (Ohne die Endlichkeitsannahme wird es komplizierter.) Sei X^1 das 1-Skelett, d. h. der eindimensionale CW-Komplex, aus dem X durch Ankleben von Zellen der Dimension $n \geq 2$ entstanden ist. Ist X^1 wegzusammenhängend, so induziert die Inklusionsabbildung $X^1 \hookrightarrow X$ eine Surjektion $\pi_1\left(X^1\right) \to \pi_1(X)$.

Hinweis: Benutze Techniken wie beim Beweis, dass $\pi_1\left(\mathbb{S}^n\right)$ für $n \geq 2$ trivial ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 21.01.2010, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung Fundamentalgruppen

Aufgabe 5.1.

(i) Sei $n \geq 3$. Zeige, dass das Komplement endlich vieler Punkte in $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist.

(ii) Sei $X \subset \mathbb{R}^3$ diskret. Zeige, das $\mathbb{R}^3 \setminus X$ einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 5.2.

(i) Sei X die Vereinigung von m verschiedenen Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{R}^3$. Berechne $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X)$.

(ii) Sei X die disjunkte Vereinigung von m Geraden im $\mathbb{R}^3$. Berechne $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X)$.

Aufgabe 5.3. Sei $n \geq 3$. Sei X wegzusammenhängend und sei Y aus X durch Ankleben von e^n's entstanden. Zeige, dass die Inklusion $X \hookrightarrow Y$ einen Isomorphismus $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ induziert.

Aufgabe 5.4. Sei X ein wegzusammenhängender eindimensionaler CW-Komplex. Sei der Basispunkt x_0 eine 0-Zelle. Dann ist jeder geschlossene Weg mit Basispunkt x_0 homotop zu einer endlichen Folge von 1-Zellen, die monoton durchlaufen werden.

Schließe insbesondere, dass $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ eine zyklische Gruppe ist, die ein erzeugendes Element besitzt, das durch einen Weg repräsentiert wird, der den Kreis einmal durchläuft. (Der komplizierte Teil bei der Berechnung der Fundamentalgruppe ist der Nachweis, dass $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ nicht endlich ist.)

Hinweis: Benutze Techniken wie beim Beweis, dass $\pi_1\left(\mathbb{S}^n\right)$ für $n \geq 2$ trivial ist.

Aufgabe 5.5. Benutze den Satz von Seifert van Kampen um zu zeigen, dass für $n \geq 2$ für die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{S}^n) \cong \{1\}$ gilt.

Aufgabe 5.6. Zeige, dass $\pi_1(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für $n \geq 2$ gilt.

Aufgabe 5.7. Sei $X := \mathbb{S}^1 \times [0,1]$. Zeige, dass X homotopieäquivalent zu $\mathbb{S}^1$ ist. Zeige, dass $X \setminus \{(p, 1/2)\}$ für beliebiges $p \in \mathbb{S}^1$ homotopieäquivalent zu $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 28.01.2010, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung Fundamentalgruppen

Aufgabe 6.1. Sei $X := [0,2] \cup [3,5] \cup [6,8]/\sim$ mit der von $0 \sim 3 \sim 6$ und $2 \sim 5 \sim 8$ induzierten Äquivalenzrelation. Definiere $A_1 := X \setminus \{1\}$, $A_4 := X \setminus \{4\}$ und $A_7 := X \setminus \{7\}$. Skizziere X. Wende auf zwei dieser Mengen das van Kampen Theorem an um die Fundamentalgruppe zu berechnen. Zeige, dass die Bedingung an Dreifachschnitte der Mengen A_i im van Kampen Theorem nötig ist.

Aufgabe 6.2. Sei $X \subset \mathbb{R}^m$ die Vereinigung von endlich vielen offenen konvexen Menge $X_1, \ldots, X_n$, so dass die Dreifachschnitte $X_i \cap X_j \cap X_k \neq \emptyset$ für alle i, j, k erfüllen. Zeige, dass X einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 6.3. Untersuche die Komplemente aus Beispiel „Verschlingungen“ aus der Vorlesung nochmals, aber nun nicht $\mathbb{R}^3 \setminus A$ und $\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)$, sondern fasse $\mathbb{R}^3$ als Teilmenge von $\mathbb{S}^3$ auf, also $A, B \subset \mathbb{S}^3$. Bestimme also $\mathbb{S}^3 \setminus A$ und $\mathbb{S}^3 \setminus (A \cup B)$.

Aufgabe 6.4. Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ ein zusammenhängender Graph, der die Vereinigung von endlich vielen Geradenstücken ist. Zeige, dass $\pi_1(X)$ eine freie Gruppe ist. Eine Basis kann durch die beschränkten zusammenhängenden Komponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus X$ indiziert werden, wobei wir jedem solchen Gebiet die Äquivalenzklasses eines Weges zuordnen, der das Gebiet einmal umläuft und in geeigneter Weise mit dem Basispunkt verbunden ist. Zeige dies ebenfalls.

Benutze: Ein einfach geschlossener polygonaler Weg (genauer: das Bild davon) ist homöomorph zu $\mathbb{S}^1$. (Jordanscher Kurvensatz für polygonale Wege.)

Aufgabe 6.5. Sei G eine (endliche) Gruppe. Zeige, dass es einen topologischen Raum X gibt mit $\pi_1(X) \cong G$.

Anleitung: Finde zunächst einen topologischen Raum, dessen Fundamentalgruppe die freie Gruppe ist, die von Erzeugern von G erzeugt ist. G erhält man nun, indem man die Relationen, die auf G gelten aus der Fundamentalgruppe herausdividiert, indem man 2-Zellen „entlang der Relationen“ in diesen Raum hineinklebt.

Aufgabe 6.6. Sei

$$X := \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial B_n((n,0))$$

und $Y := \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{S}^1$. Zeige, dass beide Räume zu $*_n \pi_1(\mathbb{S}^n)$ isomorphe Fundamentalgruppen besitzen. Zeige, dass X und Y sogar homotopieäquivalent sind. Zeige aber auch, dass X und Y nicht homöomorph sind.

Abgabe: Bis Donnerstag, 04.02.2010, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.