

# SCHMUCKSTÜCKE DER ANALYSIS

OLIVER C. SCHNÜRER

ZUSAMMENFASSUNG. Inhalt dieser Vorlesung sind einige ausgewählte Kapitel der Analysis, die in den Grundvorlesungen der Analysis leider keinen Platz finden.

## INHALTSVERZEICHNIS

1. Raumfüllende Kurven	1
1.1. Algorithmus, Programm und Visualisierung	1
1.2. Begründung	4
2. Brouwerscher Fixpunktsatz	5
2.1. Sporners Lemma	5
2.2. Page Rank Algorithmus und Perron-Frobenius	8
3. Der Satz von Stone-Weierstraß	9
3.1. Vorbereitungen	9
3.2. Beweis	11
4. Sardischer Satz und Nullmengen	11
4.1. Nullmengen	11
4.2. Komplemente von Nullmengen sind dicht	12
4.3. Sardischer Satz	14
5. Abbildungsgrad	14
5.1. Definition und Eigenschaften	15
5.2. Anwendungen des Abbildungsgrades	20
5.3. Satz von Borsuk $\star$	24
Literatur	28

## 1. RAUMFÜLLENDE KURVEN

Ziel dieses Abschnitts ist der Nachweis, dass es eine stetige surjektive Abbildung  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  gibt. Dies widerspricht der naiven Vorstellung, dass die Dimension, geeignet definiert, unter einer stetigen Abbildung nicht wachsen kann.

**1.1. Algorithmus, Programm und Visualisierung.** Die zu Grunde liegende Konstruktion wollen wir anhand eines Computerprogramms vorführen. Es nutzt das freie `python`-nahe Computeralgebrasystem `sagemath`, das auch ohne Installation auf dem eigenen Rechner im Netz in einer online Version nutzbar ist.

**Bemerkung 1.1.1** (Der Algorithmus). Wir beschreiben die Bilder als Folge von aneinandergehängten Linien der Länge 1 in die Richtungen (englisch) `up`, `down`, `left` und `right` entsprechend den Buchstaben `u`, `d`, `l` und `r` in einer Zeichenkette.

Ist eine Kurve gegeben, so bestimmen wir daraus die nächste Kurve, indem wir

- zunächst die Kurve rückwärts und um  $90^\circ$  gedreht durchlaufen,

---

*Date:* 12. April 2026.

Eingesetzt in Konstanz: Sommer 2026.

- eine Einheit nach oben gehen,
- die bisherige Kurve an den neuen Endpunkt anhängen,
- eine Einheit nach rechts gehen,
- nochmals die bisherige Kurve an den neuen Endpunkt anhängen,
- eine Einheit nach unten gehen
- und schließlich die Kurve rückwärts und um  $270^\circ$  gedreht an den letzten Endpunkt anhängen.

Entscheidend ist die Zeile

```
aktuell = dreh1 + 'u' + aktuell + 'r' + aktuell + 'd' + dreh2
```

in der unter Verwendung der aktuellen Kurve, gespeichert als Buchstabenfolge, eine neue Kurve erzeugt wird.

Das zugehörige Programm ist:

```
# Nutzt up, down, left, right
aktuell = ''
for i in range(6):
    # umgedrehter string
    rueck = aktuell[::-1]
    rueck = rueck.replace('u','D').replace('d','U')
    rueck = rueck.replace('r','L').replace('l','R')
    rueck = rueck.lower()

    # Drehung um 90 Grad nach rechts
    dreh1 = rueck
    dreh1 = dreh1.replace('u','R').replace('d','L')
    dreh1 = dreh1.replace('r','D').replace('l','U')
    dreh1 = dreh1.lower()

    # Drehung um 90 Grad nach links
    dreh2 = rueck
    dreh2 = dreh2.replace('u','L').replace('d','R')
    dreh2 = dreh2.replace('r','U').replace('l','D')
    dreh2 = dreh2.lower()

    aktuell = dreh1 + 'u' + aktuell + 'r' + aktuell + 'd' + dreh2
punkte = [[0,0]]
x = 0
y = 0
for b in aktuell:
    if b == 'r':
        x = x + 1
    if b == 'l':
        x = x - 1
    if b == 'u':
        y = y + 1
    if b == 'd':
        y = y - 1
    punkte.append([x,y])

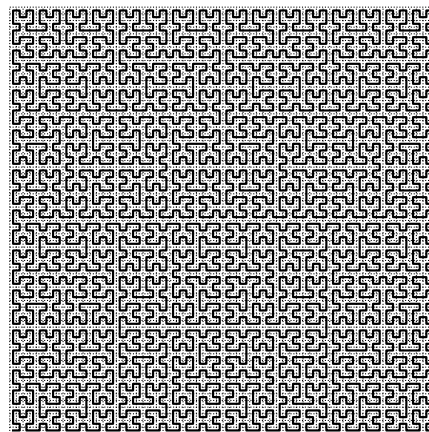
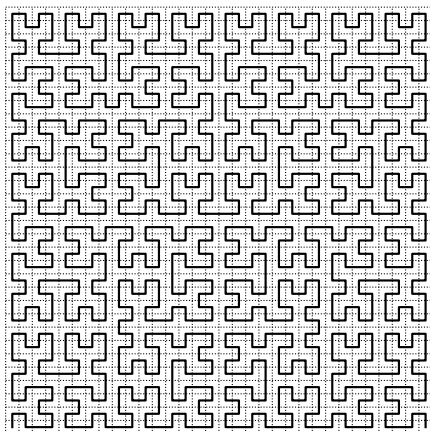
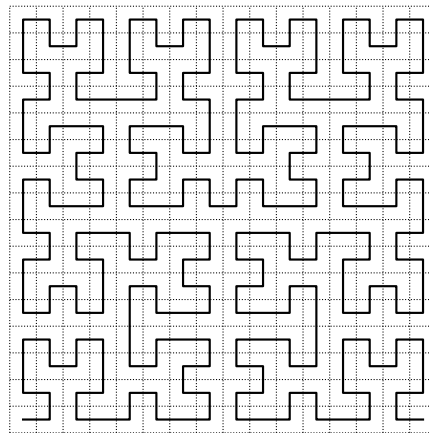
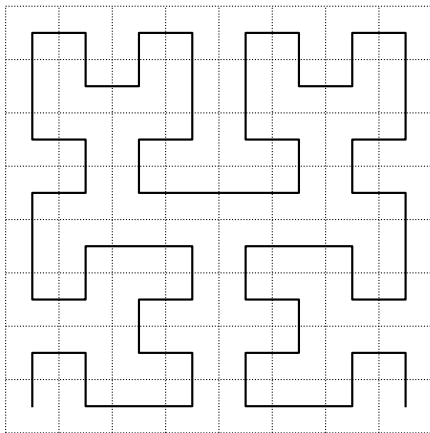
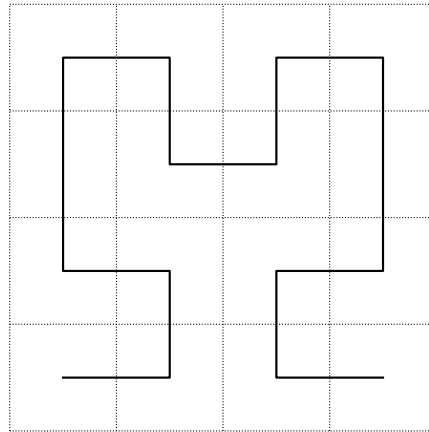
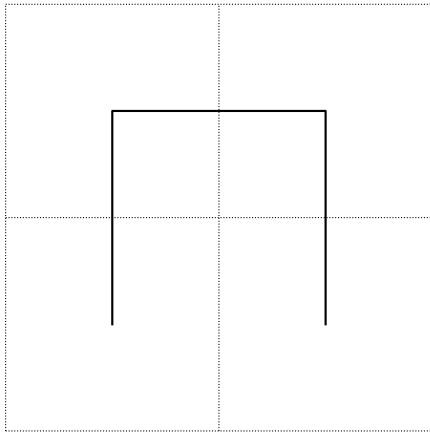
print(f"{i}: {aktuell}")
p = list_plot(punkte, plotjoined=True, thickness=2, \
    aspect_ratio=1, figsize=8, axes=False, color='black')
```

```

for n in range(2^(i+1)+1):
    p = p + line([(-0.5+n,-0.5), (-0.5+n,2^(i+1)-0.5)],
                color='black', linestyle='dotted')
    p = p + line([(-0.5,-0.5+n), (2^(i+1)-0.5,-0.5+n)],
                color='black', linestyle='dotted')
p.save('space-filling-curve-'+str(i)+'.pdf')

```

Das Programm erzeugt die folgende Ausgabe:



Die Ausgabe ist jeweils auf  $[0, 1]^2$  skaliert. Die Bilder zeigen im  $f_0, \dots$ , im  $f_4$  und im  $f_5$ .

1.2. **Begründung.** Wir wollen hier nicht formal vorgehen.

**Theorem 1.2.1** (Raumfüllende Kurven). *Es gibt eine surjektive Abbildung*

$$f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2.$$

*Beweisidee.*

- (i) Sei  $f_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  eine stetige Abbildung mit Bild wie bei der Programmausgabe. Wir unterteilen  $[0, 1]^2$  zunächst in vier Teilquadrate. Die Aufteilung in Teilquadrate ist dabei jeweils wie mit gepunkteten Linien angedeutet. Wir können die Parametrisierung der Kurve  $f_n$  so wählen, dass  $f_n|_{[0, \frac{1}{4}]}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  stets in das linke untere Teilquadrat abbildet,  $f_n|_{[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}]}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  stets in das linke obere Teilquadrat,  $\dots$ . Unter der Wahl einer Parametrisierung verstehen wir dabei die Verknüpfung von  $f_n$  mit einem Homöomorphismus  $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ; wir betrachten also  $f_n \circ \varphi$  statt  $f_n$ , bleiben jedoch bei der Bezeichnung  $f_n$ . Letzlich können wir die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen; lediglich beim ersten und letzten Geradenstück verwenden wir halbe Geschwindigkeit.
- (ii) Unterteilen wir  $[0, 1]^2$  in  $4 \times 4$  Quadrate, so können wir die Parametrisierungen sogar so wählen, dass  $f_n|_{[\frac{i}{16}, \frac{i+1}{16}]}$  für alle  $i \in \{0, \dots, 15\}$  für alle  $n \geq 1$  stets in eines dieser Teilquadrate abbildet und wir eine Bijektion  $i \longleftrightarrow$  Teilquadrate haben.

Unterteilen wir  $[0, 1]^2$  in  $2^k \times 2^k$  Quadrate, so können wir die Parametrisierungen so wählen, dass  $f_n|_{[\frac{i}{2^{2k}}, \frac{i+1}{2^{2k}}]}$  für alle  $i \in \{0, \dots, 2^{2k}\}$  und alle  $n \geq k - 1$  stets in eines dieser Teilquadrate abbildet und wir eine Bijektion  $i \longleftrightarrow$  Teilquadrate haben.

- (iii) **Cauchyfolge:** Unterteilen wir in  $2^{2k}$  Teilquadrate, so hat jedes den Durchmesser  $\frac{\sqrt{2}}{2^k}$ . Sei  $x \in [0, 1]$  fest. Da  $f_n(x)$  und  $f_m(x)$  für  $n, m \geq k - 1$  im gleichen der  $2^{2k}$  Teilquadrate liegen, folgt

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2^k}.$$

Umgedreht können wir  $k = \min\{m, n\} + 1$  wählen und erhalten

$$\|f_n - f_m\|_{C^0} \leq \frac{\sqrt{2}}{2^{\min\{m, n\} + 1}}.$$

Somit bilden die Funktionen  $f_n$  eine Cauchyfolge in  $C^0$  bzw. konvergieren gleichmäßig. Daher ist

$$f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2 \quad \text{mit} \quad f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen selbst wieder stetig.

- (iv) **Surjektivität:** Seien  $p \in [0, 1]^2$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wähle  $k \geq 1$ , so dass  $\frac{\sqrt{2}}{2^k} \leq \varepsilon$  ist. Dann folgt für alle  $n, m \geq k - 1$  die Abschätzung  $\|f_n - f_m\|_{C^0} \leq \varepsilon$  und daraus im Grenzwert  $m \rightarrow \infty$  auch  $\|f_n - f\|_{C^0} \leq \varepsilon$ . Da  $n \geq k - 1$  ist, gibt es  $x_\varepsilon \in [0, 1]$ , so dass  $f_n(x_\varepsilon)$  in einem Teilquadrat (Achtung: nur eindeutig, wenn  $p$  nicht auf der Seite eines Teilquadrates liegt) der  $2^{2k}$  Teilquadrate mit Durchmesser  $\frac{\sqrt{2}}{2^k}$  liegt, das auch  $p$  enthält. Somit folgt

$$|f(x_\varepsilon) - p| \leq |f(x_\varepsilon) - f_n(x_\varepsilon)| + |f_n(x_\varepsilon) - p| \leq 2\varepsilon.$$

Betrachte nun die Folge  $\left(x_{\frac{1}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ . Da  $[0, 1]$  kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge davon gegen ein  $x \in [0, 1]$ . Ohne Einschränkung gelte  $x_{\frac{1}{n}} \rightarrow x$

für  $n \rightarrow \infty$ . (Aufgrund unserer Konstruktion kann man sogar die gesamte Folge als Cauchyfolge wählen.) Aus  $\left| f\left(x_{\frac{1}{n}}\right) - p \right| \leq \frac{1}{n}$  erhalten wir vermöge der Stetigkeit von  $f$  für  $n \rightarrow \infty$  im Grenzwert  $|f(x) - p| = 0$ , also  $f(x) = p$  und daher die Surjektivität.  $\square$

**Bemerkung 1.2.2.**

- (i) Man überzeugt sich direkt anhand unserer Konstruktion, dass  $f$  nicht injektiv ist.
- (ii) Sei  $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  eine andere surjektive und stetige Abbildung. Dann ist auch  $g$  nicht injektiv. Sonst wäre nämlich  $g$  bijektiv und daher nach einem Satz aus der Topologie ein Homöomorphismus. Dies widerspricht aber einer Folgerung aus dem Satz über die Gebietsinvarianz, die wir im Kapitel über den Abbildungsgrad behandeln werden.

## 2. BROUWERSCHER FIXPUNKTSATZ

2.1. **Sperners Lemma.** Wir folgen [1].

**Bemerkung 2.1.1.** Seien  $v_i \in \mathbb{R}^l$ .

- (i) Wir definieren die **Konvexkombination** der Vektoren  $v_1, \dots, v_{n+1}$  durch

$$\text{Konv}\{v_1, \dots, v_{n+1}\} := \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot v_i : \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \text{ und } 0 \leq \lambda_i \text{ für alle } i = 1, \dots, n+1 \right\}.$$

(Man kann auch  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  fordern.)

- (ii) Seien  $v_1, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^l$  linear unabhängig. Dann heißt  $\text{Konv}\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$  ein  **$n$ -Simplex**.
- (iii) Sei  $\text{Konv}\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$  ein  $n$ -Simplex. Dann heißen die Vektoren  $v_1, \dots, v_{n+1}$  **Ecken** von  $\text{Konv}\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ .
- (iv) Die Menge  $\text{Konv}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}\}$  heißt  $i$ -te **Seite** des  $n$ -Simplex  $\text{Konv}\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ . Ein  $n$ -Simplex besitzt  $n+1$  Seiten. Jede Seite ist ein  $(n-1)$ -Simplex.
- (v) Wir teilen den Standard 2-Simplex  $\text{Konv}\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ , ein gleichseitiges Dreieck, in kleinere gleichseitige Dreiecke, und zwar im ersten Schritt in 4 Dreiecke, die durch Skalierung um den Faktor  $\frac{1}{2}$  und eine affin lineare Abbildung aus dem ursprünglichen Dreieck hervorgehen. Dann teilen wir wiederum jedes dieser 4 gleichseitigen kleineren Dreiecke in jeweils 4 noch kleinere gleichseitige Dreiecke und erhalten so im zweiten Schritt  $4^2$  Dreiecke. Iterativ erhalten wir damit im  $r$ -ten Schritt  $4^r$  Dreiecke. Dabei schrumpft der Durchmesser der Dreiecke jeweils um den Faktor 2.
- (vi) In  $n$  Dimensionen können wir nicht mehr in kleinere kongruente  $n$ -Simplices unterteilen, jedoch mit Hilfe einer baryzentrischen Unterteilung in kleinere nicht kongruente  $n$ -Simplices, deren Durchmesser ebenfalls beliebig klein werden. Bei dieser Unterteilung gehören Seiten stets zu genau zwei kleineren  $n$ -Simplices oder zum Rand des größten  $n$ -Simplex.
- (vii) Solch eine Unterteilung nennen wir **Triangulierung**.

**Theorem 2.1.2** (Sperners Lemma). *Eine Triangulierung eines  $n$ -Simplices  $\mathcal{S}$  kann mit den „Farben“  $\{1, \dots, n+1\}$  so eingefärbt werden, dass jede Ecke der kleinen  $n$ -Simplices auf eine Zahl in  $\{1, \dots, n+1\}$  abgebildet wird, so dass keine Ecke in der  $i$ -ten Seite von  $\mathcal{S}$  nach  $i$  abgebildet wird. Dann gibt es in der Triangulierung ein kleines  $n$ -Simplex, dessen Ecken  $n+1$  verschiedene Farben besitzen. Genauer: Die Anzahl der kleinen  $n$ -Simplices mit  $n+1$  verschiedenen Farben ist ungerade.*

*Beweis.* Wir gehen per Induktion vor.

- $n = 0$ : Ist klar, da es nur einen Punkt gibt, der nach 1 abgebildet wird.
- $n = 1$ : Hier haben wir eine Strecke, auf der endlich viele Punkte sind, die nach 0 oder 1 abgebildet werden. Einer der Endpunkte wird auf 0, der andere auf 1 abgebildet. Daher ändert sich die Farbe der Punkte ungerade oft, wenn wir der Strecke folgen. Dies liefert die Behauptung.
- $n = 2$ : Diese Situation veranschaulichen wir in Abbildung 1. Die Farben der Ecken sind Blau, Grün und Rot. Wir zeichnen hier nun eine dicke schwarze Linie zwischen solche Mittelpunkte kleiner benachbarter Dreiecke, deren Schnitt Ecken in Blau und Grün besitzt. Ebensolche Linien zeichnen wir nach draußen über Seiten/Kanten ein, deren Ecken Blau und Grün sind.

Die Regeln über das Einfärben verlangen, dass das große Dreieck genau eine rote, eine blaue und eine grüne Ecke besitzt. Die Seite zwischen der blauen und der grünen Ecke weist nur blaue und grüne Ecken kleinerer Dreiecke auf. Entsprechendes gilt für die anderen Seiten. Somit gibt es nach Induktionsannahme eine ungerade Anzahl von Linien von außen über die blau-grüne Seite in das Dreieck.

Unsere Regeln für das Einzeichnen von dicken schwarzen Linien liefern uns:

- In einem Mittelpunkt eines kleinen Dreiecks können sich maximal zwei schwarze Linien treffen.
- Endet ein Linienzug in einem Mittelpunkt, so weist das zugehörige kleine Dreieck Ecken in drei verschiedenen Farben auf.
- Linienzüge nach außen können wieder nach außen führen. Solche Linienzüge gehören zu einer geraden Zahl von Linien, die aus dem Dreieck nach außen führen.
- Da jedoch eine ungerade Anzahl schwarzer Linien von außen in das Dreieck hineinführt und sich Linienzüge nicht verzweigen können, muss eine ungerade Anzahl von Linienzügen in ein kleines Dreieck mit jeweils Ecken in drei verschiedenen Farben führen.
- Es mag weitere Linienzüge schwarzer Linien geben, die innerhalb des Dreiecks geschlossen sind. Diese ändern die Anzahl kleiner Dreiecke mit drei verschiedenen Eckfarben nicht.
- Linienzüge mit zwei Endpunkten innerhalb des Dreiecks enden in zwei verschiedenen kleinen Dreiecken mit jeweils drei verschiedenen Eckfarben.
- Da genau in kleinen Dreiecken mit drei verschiedenen Eckfarben ein schwarzer Linienzug endet, folgt, dass die Anzahl dieser Dreiecke ungerade sein muss.
- $n \geq 3$ : Wir verfahren nun wie im Falle  $n = 2$  und zeichnen dicke schwarze Linien zwischen Mittelpunkten kleiner  $n$ -Simplices ein, deren Schnitt ein  $n - 1$ -Simplex ist, dessen Ecken die Farben  $1, 2, \dots, n - 1$  aufweisen. Gemäß unserer Induktionsannahme kommt wiederum eine ungerade Anzahl schwarzer Linien von außen in das Dreieck hinein. Auch hier können sich nicht drei oder mehr dicke schwarze Linien in einem Mittelpunkt eines kleinen  $n$ -Simplexes treffen. Schwarze Linienzüge enden genau in den Mittelpunkten kleiner  $n$ -Simplices, deren Ecken  $n + 1$  verschiedene Farben aufweisen. Somit gibt es auch hier wieder eine ungerade Anzahl von kleinen  $n$ -Simplices, deren Ecken  $n + 1$  verschiedene Farben aufweisen.  $\square$

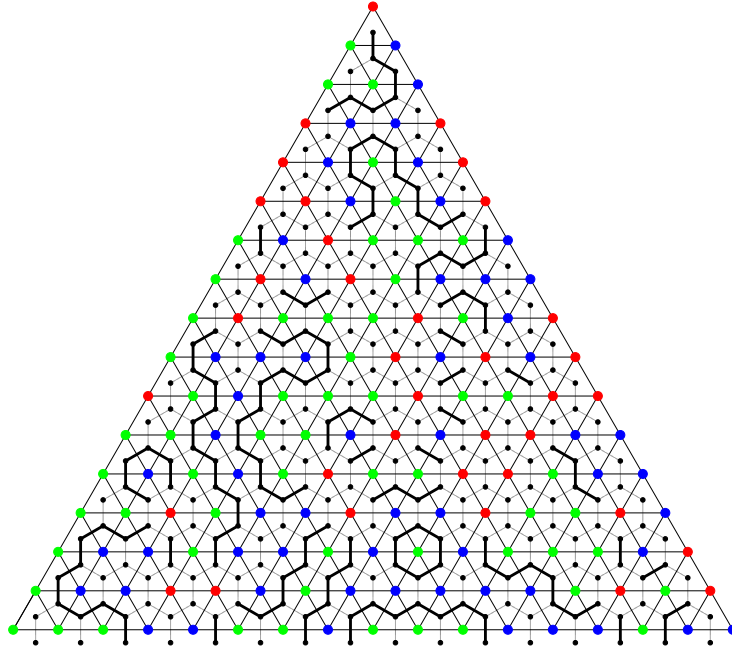


ABBILDUNG 1. Einfärbung einer Triangulierung wie in Spencers Lemma

**Theorem 2.1.3.** Sei  $r > 0$  und  $D := \overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Sei

$$f: D \rightarrow D$$

stetig. Dann gibt es einen Fixpunkt  $x_0 \in D$ , also einen Punkt  $x_0 \in D$  mit  $f(x_0) = x_0$ .

*Beweis.* Sei  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  das Standard  $n$ -Simplex. Dann gibt es (Übung) einen Homöomorphismus  $\varphi: D \rightarrow \mathcal{S}$ . Wir werden nachweisen, dass die Abbildung  $F := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  einen Fixpunkt  $x_1$  besitzt. Dann ist  $\varphi^{-1}(x_1)$  ein Fixpunkt von  $f$ . Daher werden wir nachfolgend die Existenz eines Fixpunktes für eine stetige Abbildung  $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  nachweisen.

Wir unterteilen nun das  $n$ -Simplex  $\mathcal{S}$  in kleinere  $n$ -Simplices, so dass bei jedem Schritt der Durchmesser dieser Simplices um einen festen Faktor reduziert wird und iterieren dies. Gegebenenfalls überspringen wir einen Schritt. So erhalten wir im  $k$ -ten Schritt,  $k = 1, 2, \dots$ , eine Triangulierung von  $\mathcal{S}$  in  $n$ -Simplices vom Durchmesser kleiner oder gleich  $\frac{1}{k}$ . Die Ecken der kleinen  $n$ -Simplices aus dem  $k$ -ten Schritt bezeichnen wir mit  $V_k$ .

Nun möchten wir die Ecken einfärben und Spencers Lemma anwenden. Dazu fixieren wir  $k \in \mathbb{N}$  und  $x \in V_k$  und betrachten die Komponenten  $f^i(x) - x^i$ . Da  $x$  und  $f(x)$  Punkt in  $\mathcal{S}$  sind, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n+1} (f^i(x) - x^i) = 1 - 1 = 0.$$

Gilt  $f^i(x) - x^i = 0$  für alle  $1 \leq i \leq n+1$ , so ist  $x$  ein Fixpunkt und die Behauptung folgt. Sonst gibt es ein minimales  $i_0$  mit  $1 \leq i_0 \leq n+1$ , so dass  $f^{i_0}(x) - x^{i_0} < 0$  gilt. Dieser Ecke  $x$  wollen wir die Farbe  $i_0$  zuweisen. Dies ist eine Färbung wie in Theorem 2.1.2: Gehört nämlich  $x$  zur  $l$ -ten Seite von  $\mathcal{S}$ , so gilt  $x^l = 0$  und somit  $i_0 \neq l$ . Daher können wir Theorem 2.1.2 anwenden und finden ein kleines

$n$ -Simplex mit den Ecken  $y_{k,1}, \dots, y_{k,n+1} \in V_k$  und  $n+1$  verschiedenen Farben. Nach Umbenennung dieser Ecken dürfen wir

$$f^i(y_{k,i}) - y_{k,i}^i < 0$$

für  $i$  mit  $1 \leq i \leq n+1$  annehmen. Da die Menge  $\mathcal{S}$  kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge von  $(y_{k,1})_{k \in \mathbb{N}}$  zu einem Punkt  $z \in \mathcal{S}$ . Ohne Einschränkung wollen wir annehmen, dass  $y_{k,1} \rightarrow z$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt. Für jedes  $i$  mit  $1 \leq i \leq n+1$  impliziert die Durchmesserschranke  $|y_{k,i} - y_{k,1}| \leq \frac{1}{k}$ . Folglich konvergieren auch die Folgen der anderen Ecken und wir erhalten  $y_{k,i} \rightarrow z$  für  $k \rightarrow \infty$  und jedes  $i$  mit  $1 \leq i \leq n+1$ . Nun gehen wir in den obigen Ungleichungen zum Grenzwert über, nutzen die Stetigkeit von  $f$  und erhalten

$$(2.1) \quad f^i(z) - z^i \leq 0$$

für alle  $1 \leq i \leq n$ . Wie oben benutzen wir  $z, f(z) \in \mathcal{S}$  und folgern  $\sum_{i=1}^{n+1} (f^i(z) - z^i) = 1 - 1 = 0$ . Das ist jedoch nur möglich, wenn wir in (2.1) für alle  $i$  bereits Gleichheit haben, wenn also  $f^i(z) - z^i = 0$  für alle  $1 \leq i \leq n$  gilt. Daher folgt

$$f(z) = z$$

und wir haben, wie behauptet, einen Fixpunkt von  $f$  gefunden.  $\square$

## 2.2. Page Rank Algorithmus und Perron-Frobenius.

**Theorem 2.2.1** (Perron-Frobenius). *Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit Einträgen  $a_j^i \geq 0$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Dann gibt es einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  mit Einträgen  $v^i \geq 0$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda \geq 0$ , so dass  $v$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  ist; es gilt also  $\lambda v = Av$  bzw.*

$$\lambda \cdot v^i = \sum_{j=1}^n a_j^i v^j \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n.$$

*Beweis.* Betrachte den abgeschlossenen positiven Orthanten

$$\Gamma_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x^i \geq 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}.$$

Gibt es  $w \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$  mit  $Aw = 0$ , so sind wir fertig. Sonst gilt für alle  $w \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$  auch  $Aw \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$ . Insbesondere gilt  $Aw \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$  für alle  $x \in \Gamma_+ \cap \mathbb{S}^{n-1}$ . Somit ist

$$\Gamma_+ \cap \mathbb{S}^{n-1} \ni w \mapsto \frac{Aw}{|Aw|} \in \Gamma_+ \cap \mathbb{S}^{n-1}$$

eine stetige Selbstabbildung. Nun sind  $\text{Konv}\{e_1, \dots, e_n\}$  und  $\Gamma_+ \cap \mathbb{S}^{n-1}$  vermöge

$$\text{Konv}\{e_1, \dots, e_n\} \ni w \mapsto \frac{w}{|w|} \equiv \frac{w}{\left(\sum_{i=1}^n (w^i)^2\right)^{1/2}} \in \Gamma_+ \cap \mathbb{S}^{n-1}$$

und

$$\Gamma_+ \cap \mathbb{S}^{n-1} \ni w \mapsto \frac{w}{\sum_{i=1}^n w^i} \in \text{Konv}\{e_1, \dots, e_n\}$$

homöomorph zueinander. (Den Nachweis der Stetigkeit und dass diese Abbildungen invers zueinander sind, lassen wir als kleine Übungsaufgabe.) Somit gibt es nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz einen Punkt  $v \in \Gamma_+ \cap \mathbb{S}^{n-1}$  mit  $v = \frac{Av}{|Av|}$ . Wir setzen  $\lambda = |Av| \geq 0$  und erhalten unsere Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 2.2.2** (Page Rank Algorithmus). Ziel ist es, Webseiten eine Wichtigkeit in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  zuzuordnen, so dass Treffer in einer Suchmaschine entsprechend ihrer Wichtigkeit angeordnet werden können. Grundidee ist, dass eine Webseite mit Wichtigkeit  $a \geq 0$  allen anderen Webseiten, auf die einer ihrer  $k$  Links führt, die Wichtigkeit  $\frac{a}{k}$  vermittelt. Für die Zielwebseiten werden diese vermittelten Wichtigkeiten aufsummiert.

Wir nummerieren die Webseiten mit  $i$  mit  $1 \leq i \leq n$  und bezeichnen ihre Wichtigkeiten mit  $v^i$ . Der Vektor der vermittelten Wichtigkeiten ergibt sich dann als  $Av$ , wobei  $A = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq n}$  ist und, falls von der Webseite  $j$  genau  $k$  Links starten,

$$a_j^i = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{falls es einen Link „}j \rightarrow i\text{“ gibt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Idealerweise sollten die Wichtigkeiten und die vermittelten Wichtigkeiten übereinstimmen, also  $Av = v$  gelten.

Nach dem Satz von Perron-Frobenius gibt es ein  $w \in \mathbb{R}^n \cap \Gamma_+$  und  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\lambda w = Aw$ . Nach Konstruktion der Matrix  $A$  gilt

$$\sum_{i=1}^n w^i = \sum_{i=1}^n (Aw)^i = \sum_{i,j=1}^n A_j^i w^j.$$

Summieren wir in der Eigenwertgleichung auf beiden Seiten, so folgt  $\lambda = 1$ . Daher gibt es solch einen Vektor von Wichtigkeiten, der dieselben Wichtigkeiten vermittelt.

### 3. DER SATZ VON STONE-WEIERSTRASS

Wir folgen [3] In diesem Kapitel sei  $E$  stets ein kompakter metrischer Raum. Der Satz von Stone-Weierstraß ist bereits für Intervalle  $E$  interessant.

#### 3.1. Vorbereitungen.

**Bemerkung 3.1.1.** Die Menge der stetigen Funktionen  $C^0(E, \mathbb{R}) = C^0(E)$  bilden eine  $\mathbb{R}$ -Algebra:

- Sie sind ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und
- das Produkt  $(f, g) \mapsto f \cdot g$  mit  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$  ist bilinear.

Wegen  $\|f \cdot g\|_{C^0} \leq \|f\|_{C^0} \cdot \|g\|_{C^0}$  ist das Produkt sogar stetig.

Nötig: Abschluss ist wieder Algebra?

**Definition 3.1.2.** Eine Teilmenge  $A \subset C^0(E)$  **trennt Punkte**, wenn für alle  $x, y \in E$  mit  $x \neq y$  ein  $f \in A$  mit  $f(x) \neq f(y)$  existiert.

Ziel dieses Kapitels ist der Beweis von

**Theorem 3.1.3** (Satz von Stone-Weierstraß).

*Sei  $E$  ein kompakter metrischer Raum. Sei  $A \subset C^0(E)$  eine Unter algebra, die alle konstanten Funktionen enthält und Punkte trennt, so ist  $A$  dicht in  $C^0(E)$ .*

**Lemma 3.1.4.** *Es gibt eine monoton wachsende Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^0([0, 1])$  reeller Polynome  $u_n$ , die auf  $[0, 1]$  gleichmäßig gegen  $t \mapsto \sqrt{t}$  konvergiert.*

**Bemerkung 3.1.5.** Die Monotonie bedeutet dabei, dass  $u_{n+1}(t) \geq u_n(t)$  für alle  $t \in [0, 1]$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Wir schreiben auch  $u_{n+1} \geq u_n$ .

*Beweis von Lemma 3.1.4.*

(i) Wir definieren induktiv  $u_0 := 0$  und

$$(3.1) \quad u_{n+1}(t) := u_n(t) + \frac{1}{2}(t - u_n^2(t)) \quad \text{für } n \geq 0.$$

Es ist klar, dass alle Funktionen  $u_n$  Polynome sind.

- (ii) Wir weisen zunächst per Induktion nach, dass  $u_n(t) \leq \sqrt{t}$  für alle  $t \in [0, 1]$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.
- (iii) Induktionsanfang  $n = 0$ : Es gilt  $u_0 = 0$ . Daher erhalten wir unsere Behauptung für  $n = 0$ .
- (iv) Induktionsschritt: Seien die Behauptung bereits für  $n \in \mathbb{N}$  nachgewiesen. Wir wollen sie nun für „ $n + 1$ “ ebenfalls zeigen. Wegen (3.1) gilt die Identität

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{\leq} \sqrt{t} - u_{n+1}(t) &= \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2} (t - u_n^2(t)) \\ &= (\sqrt{t} - u_n(t)) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} (\sqrt{t} + u_n(t))\right) \\ &\equiv A \cdot B. \end{aligned}$$

Aus der Induktionsannahme  $u_n(t) \leq \sqrt{t}$  folgern wir  $A \geq 0$ . Weiterhin ist  $\sqrt{t} \leq 1$ . Somit erhalten wir  $\sqrt{t} + u_n(t) \leq 2\sqrt{t} \leq 2$  und folglich  $B \geq 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$ . Daher ist  $u_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$ .

- (v) Wir behaupten nun, dass  $0 \leq u_n(t) \leq \sqrt{t}$  für alle  $t \in [0, 1]$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.
- (vi) Wir behaupten, dass  $0 \leq u_n$  für alle  $n$  gilt und zeigen dies ebenfalls per Induktion. Der Induktionsanfang ist wegen  $u_0 = 0$  klar.
- (vii) Induktionsschritt. Gelte  $0 \leq u_n$ . Dann erhalten wir zusammen mit (ii) durch Quadrieren  $0 \leq u_n^2(t) \leq t$  beziehungsweise  $t - u_n^2(t) \geq 0$ . Somit ist nach Definition (3.1) auch  $u_{n+1} \geq u_n \geq 0$ .
- (viii) Im Induktionsschritt haben wir bereits die Monotonie gezeigt: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $t \in [0, 1]$  gilt  $u_{n+1}(t) \geq u_n(t)$ .
- (ix) Für festes  $t \in \mathbb{N}$  ist die Folge  $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  monoton wachsend und beschränkt und konvergiert daher. Wir können daher in der Definition (3.1) zum Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  übergehen und erhalten mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) =: v(t)$  die Identität  $0 = t - v^2(t)$ . Wegen  $v(t) \geq u_0 = 0$  folgt daher  $v(t) = \sqrt{t}$ .
- (x) Da  $v$  stetig ist und  $u_n$  monoton wachsend ist, ist die Konvergenz aufgrund des Satzes von Dini wie behauptet gleichmäßig.  $\square$

**Lemma 3.1.6.** Sei  $E$  eine Menge,  $A \subset C^0(E)$  eine Unteralgebra und  $f \in A$ . Dann ist  $|f| \in \bar{A}$ .

*Beweis.* Wir setzen  $a := \|f\|_{C^0}$ . Betrachte  $u_n(f^2/a^2)$ . Da die Funktionen  $u_n$  Polynome sind, liegt auch  $u_n(f^2/a^2)$  in der Algebra. Nach Lemma 3.1.4 ist der gleichmäßige Grenzwert  $(f^2/a^2)^{1/2} = |f|/a$  und liegt in  $\bar{A}$ . Dies gilt dann auch für  $|f|$  wie behauptet.  $\square$

**Lemma 3.1.7.** Sei  $E$  eine Menge,  $A \subset C^0(E)$  eine Unteralgebra und  $f, g \in \bar{A}$ . Dann gilt auch  $\min\{f, g\}, \max\{f, g\} \in \bar{A}$ .

*Beweis.* Es gelten  $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$  sowie  $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ . Nach Lemma 3.1.6 können wir  $|f-g|$  gleichmäßig approximieren und somit auch  $\min\{f, g\}$  und  $\max\{f, g\}$ .  $\square$

**Lemma 3.1.8.** Sei  $E$  eine Menge und  $A \subset C^0(E)$  eine Unteralgebra, die Konstanten enthält und Punkte trennt. Seien  $x, y \in E$  mit  $x \neq y$  und seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann gibt es  $f \in A$  mit  $f(x) = \alpha$  und  $f(y) = \beta$ .

*Beweis.* Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass  $\alpha \neq \beta$  gilt; sonst leistet  $f \equiv \alpha$  das Gewünschte. Sei  $g \in A$  mit  $g(x) \neq g(y)$ . Wir definieren  $f$  durch

$$f(z) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)} (g(z) - g(x)), \quad \text{für } z \in E.$$

Wir sehen direkt, dass  $f$  die vorgegebenen Funktionswerte annimmt.  $\square$

**Lemma 3.1.9.** *Sei  $E$  ein kompakter metrischer Raum. Sei  $A \subset C^0(E)$  eine Unteralgebra, die Konstanten enthält und Punkte trennt. Seien  $x \in E$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $g \in C^0(E)$  beliebig. Dann gibt es eine Funktion  $f \in A$  mit  $f(x) = g(x)$  und  $f(y) \leq g(y) + \varepsilon$  für alle  $y \in E$ .*

*Beweis.* Nach Lemma 3.1.8 gibt es zu jedem  $z \in E \setminus \{x\}$  eine Funktion  $h_z \in A$  mit  $h_z(x) = g(x)$  und  $h_z(z) \leq g(z) + \varepsilon/2$ . Im Fall  $x = z$  gilt eine entsprechende Behauptung trivialerweise. Zu jedem  $z \in E$  gibt es aufgrund der Stetigkeit von  $g$  und  $h_z$  eine Umgebung  $U(z)$  von  $z$  mit  $h_z(y) \leq g(y) + \varepsilon$  für alle  $y \in U(z)$ . Endlich viele solche Umgebungen überdecken die kompakte Menge  $E$ : Es gibt  $N \in \mathbb{N}$  und Punkte  $z_i \in E$ ,  $0 \leq i \leq N$ , mit  $\bigcup_{i=0}^N U(z_i) = E$ . Nach Lemma 3.1.7 ist auch

$$f := \min_{0 \leq i \leq N} h_{z_i} \in \bar{A}.$$

Da jedes  $y \in E$  auch  $y \in U(z_{i_0})$  für ein  $i_0 \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq i_0 \leq N$  erfüllt, folgt die Behauptung.  $\square$

**3.2. Beweis.** Nach diesen Vorbereitungen können wir den Satz von Stone-Weierstraß beweisen. Dazu gehen wir nochmals ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.1.9 vor.

*Beweis von Theorem 3.1.3.* Seien  $\varepsilon > 0$  und  $f \in C^0(E)$  beliebig. Sei  $x \in E$ . Dann gibt es nach Lemma 3.1.9 eine Funktion  $g_x \in A$  mit  $g_x(x) = f(x)$  und  $g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon$  für alle  $y \in E$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $g_x$  und  $f$  finden wir eine Umgebung  $U(x)$  von  $x$  mit  $g_x(y) \geq f(y) - \varepsilon$  für alle  $y \in U(x)$ . Endlich viele solche Umgebungen überdecken die kompakte Menge  $E$ : Es gibt  $N \in \mathbb{N}$  und Punkte  $x_i \in E$ ,  $0 \leq i \leq N$ , mit  $\bigcup_{i=0}^N U(x_i) = E$ . Nach Lemma 3.1.7 ist auch  $\varphi := \sup_{0 \leq i \leq N} g_{x_i}$  in  $\bar{A}$ . Da jedes  $y \in E$  zu einer Menge der Form  $U(x_i)$  gehört, folgt  $f(y) - \varepsilon \leq \varphi(y) \leq f(y) + \varepsilon$  für alle  $y \in E$ . Wir erhalten also  $\|f - \varphi\|_{C^0(E)} \leq \varepsilon$ . Also gilt  $f \in \bar{A}$  wie behauptet.  $\square$

#### 4. SARDSCHER SATZ UND NULLMENGEN

##### 4.1. Nullmengen.

**Definition 4.1.1** (Erinnerung). Eine Teilmenge  $C \subset \mathbb{R}^n$  hat das **Maß Null**, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Folge von Würfeln  $W_i \subset \mathbb{R}^n$  mit

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |W_i| < \varepsilon.$$

gibt. Eine Menge  $C \subset \mathbb{R}^n$  vom Maß Null heißt **Nullmenge**.

##### Bemerkung 4.1.2.

- (i) Die abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge ( $2^{-i}\varepsilon$ -Argument).
- (ii) Eine äquivalente Definition erhält man für offene oder abgeschlossene Würfel, Quader oder Kugeln. Auch äquivalent ist die Definition, wenn man lediglich achsenparallele Würfel oder Quader betrachtet.

**Lemma 4.1.3.** *Sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $C \subset U$  habe Maß Null. Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  Lipschitz, dann hat auch  $f(C)$  das Maß Null.*

*Beweis.* Sei  $L \geq 0$  mit  $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$  für alle  $x, y \in U$ . Sei  $\varepsilon > 0$  und

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |W_i| < \varepsilon.$$

Habe der Würfel  $W_1$  die Kantenlänge  $a > 0$ . Dann gilt  $\text{diam}(W_1) \leq \sqrt{n} \cdot a$ . Aufgrund der Lipschitzstetigkeit folgt für  $x, y \in W_1$

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \leq L \cdot \sqrt{n} \cdot a.$$

Fixiere  $x \in W_1$ . Folglich ist  $f(W_1)$  in einem Würfel  $\tilde{W}_1$  der Kantenlänge  $2 \cdot L \cdot \sqrt{n} \cdot a$  um  $f(x)$  enthalten. Es folgt

$$|\tilde{W}_1| \leq 2^n \cdot L^n \cdot \sqrt{n}^n \cdot a^n = 2^n \cdot L^n \cdot \sqrt{n}^n \cdot |W_1| \equiv C(n, L) \cdot |W_1|.$$

Eine analoge Argumentation für die anderen Würfel liefert

$$f(C) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(W_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{W}_i$$

und

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{W}_i| \leq C(n, L) \cdot \sum_{i=1}^n |W_i| \leq C(n, L) \cdot \varepsilon.$$

Da  $C(n, L)$  eine feste Konstante ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**4.2. Komplemente von Nullmengen sind dicht.** Hauptanwendung für Nullmengen hier ist die Aussage, dass das Komplement einer Nullmenge dicht ist.

**Theorem 4.2.1.** *Sei  $N \subset \mathbb{R}^n$  eine Nullmenge. Dann ist  $\mathbb{C}N$  dicht in  $\mathbb{R}^n$ . Es gilt also  $\overline{\mathbb{C}N} = \mathbb{R}^n$  oder*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \forall \varepsilon > 0 \exists y \in B_\varepsilon(0): y \notin \mathbb{C}N.$$

Als Vorbereitung dazu starten wir mit einer Erinnerung.

**Lemma 4.2.2** (Lebesguezahl). *Sei  $X$  ein kompakter metrischer Raum und  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Dann gibt es  $\varepsilon > 0$ , so dass jede  $\varepsilon$ -Kugel um ein beliebiges  $x \in X$  vollständig in einer Menge  $U_i$  enthalten ist:*

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in X \exists i \in I: B_\varepsilon(x) \subset U_i.$$

*Beweis.* Falls nicht, so gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x \in X$  mit

$$B_{1/n}(x_n) \not\subset U_i \quad \text{für beliebige } i \in I.$$

Da  $X$  kompakt ist, gibt es eine Teilfolge von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ , ohne Einschränkung  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und ein  $x \in X$ , so dass

$$x_n \rightarrow x \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gilt. Daher existiert  $i \in I$  mit  $x \in U_i$ . Da  $U_i$  offen ist, gibt es  $\delta > 0$  mit  $B_\delta(x) \subset U_i$ . Sei nun  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n} \leq \frac{\delta}{3}$  und  $d(x_n, x) \leq \frac{\delta}{3}$ . Dann folgt aufgrund der Dreiecksungleichung

$$(4.1) \quad B_{\frac{1}{n}}(x_n) \subset B_\delta(x) \subset U_i.$$

Widerspruch. Die Behauptung folgt.

Details zu (4.1): Sei  $y \in B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ . Dann gilt aufgrund der Dreiecksungleichung

$$d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) \leq \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} < \delta.$$

Somit ist  $y \in B_\delta(x)$ .  $\square$

**Lemma 4.2.3.** *Sei  $K = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ . Seien  $Q_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i \in I$ , achsenparallele Quader mit positiven Volumina  $|Q_i|$ , definiert als das Produkt ihrer Kantenlängen. Ist*

$$K \subset \bigcup_{i \in I} Q_i,$$

so folgt

$$\sum_{i \in I} |Q_i| \geq |K| = 1.$$

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es zu jedem Quader  $Q_i$  einen offenen Quader  $\tilde{Q}_i$  mit

$$Q_i \subset \tilde{Q}_i \quad \text{und} \quad |\tilde{Q}_i| \leq (1 + \varepsilon) \cdot |Q_i|.$$

Diese offenen Quader finden wir, indem wir sämtliche Quaderseiten vorsichtig verlängern und  $|Q_i| > 0$  nutzen.

Da  $K$  kompakt ist, gibt es endlich viele Quader  $\tilde{Q}_i$ , die  $K$  überdecken. Gelte ohne Einschränkung

$$K \subset \bigcup_{i=1}^N \tilde{Q}_i.$$

Wir zerlegen nun  $[0, 1]$  in Teilintervalle  $[\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}]$ ,  $0 \leq j \leq m-1$ . Betrachte dann beliebige kartesische Produkte dieser Teilintervalle. So erhalten wir  $m^n$  Würfel mit jeweils gleichem Durchmesser  $\sqrt{n} \cdot \frac{1}{m}$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  die Lebesguezahl der Überdeckung  $(\tilde{Q}_i)_{1 \leq i \leq N}$ . Wir fixieren nun  $m \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $\sqrt{n} \cdot \frac{1}{m} < \varepsilon$  gilt. Jeder solche Würfel ist daher in (mindestens) einem Quader  $\tilde{Q}_i$  enthalten. Sei  $a_i$  die Anzahl solcher Würfel, die in  $\tilde{Q}_i$  enthalten sind. Dann erhalten wir

$$\sum_{i=1}^N a_i \geq m^n \quad \text{und} \quad |\tilde{Q}_i| \geq a_i \cdot \frac{1}{m^n} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq N.$$

Zusammengenommen folgt somit

$$1 = \frac{m^n}{m^n} \leq \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{m^n} \leq \sum_{i=1}^N |\tilde{Q}_i| \leq (1 + \varepsilon) \cdot \sum_{i=1}^N |Q_i| \leq (1 + \varepsilon) \cdot \sum_{i \in I} |Q_i|.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt die Behauptung.  $\square$

Analog oder durch Skalieren erhalten wir

**Korollar 4.2.4.** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein achsparalleler Würfel mit Kantenlänge  $L > 0$ . Seien  $Q_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i \in I$ , achsparallele Quader mit positiven Volumina  $|Q_i|$  und  $K \subset \bigcup_{i \in I} Q_i$ . Dann gilt

$$\sum_{i \in I} |Q_i| \geq L^n.$$

*Beweis von Theorem 4.2.1.* Wir benutzen hier, dass wir Nullmengen äquivalent mit Überdeckungen mit achsparallelen Quadern definieren können. Sei  $N \subset \mathbb{R}^n$  eine Nullmenge. Sei  $L > 0$ . Betrachte eine Zerlegung des  $\mathbb{R}^n$  in Würfel der Form

$$W_{a_m} := \prod_{i=1}^n [a_m^i \cdot L, (a_m^i + 1) \cdot L], \quad a_m \in \mathbb{Z}^n, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Da  $N$  eine Nullmenge ist, gibt es eine Überdeckung von  $N$  durch achsparallele Quader  $Q_i$ ,  $i \in I$ , mit

$$\sum_{i \in I} |Q_i| \leq \frac{1}{2} L^n.$$

Nach Korollar 4.2.4 überdecken die Quader  $Q_i$  keinen der Würfel  $W_{a_m}$  vollständig, da diese jeweils das Volumen  $L^n$  haben. Somit liegt in jedem Würfel  $W_{a_m}$  mindestens ein Punkt aus  $\mathbb{C}N$ . Da  $L > 0$  beliebig war, ist  $\mathbb{C}N \subset \mathbb{R}^n$  wie behauptet dicht.  $\square$

### 4.3. Sardischer Satz.

**Theorem 4.3.1** (Sard). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^k$ -Funktion mit  $k > \frac{m}{n} - 1$ . Sei  $C$  die Menge der kritischen Punkte. Dann hat  $f(C)$  das Maß Null.*

Den Sardischen Satz werden wir in Übungen weiterverfolgen. Hier zeigen wir nur eine einfacher zu zeigende Variante mit  $m = n$  und  $k = 2$ . Der Beweis dazu findet sich beispielsweise in [4].

**Theorem 4.3.2** (Sardischer Satz bei gleichen Dimensionen). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^2$ . Sei  $C \subset \Omega$  die Menge der kritischen Punkte von  $f$ . Dann hat  $f(C)$  das Maß Null.*

*Beweis.*

- (i) Sei ohne Einschränkung  $I^n \equiv [0, 1]^n \subset \Omega$ . Wir zeigen nur, dass  $f(C \cap I^n)$  eine Menge vom Maß Null ist. Die allgemeine Aussage folgt daraus, da  $\Omega$  abzählbare Vereinigung solcher Würfel ist und die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder Nullmengen sind.

- (ii) Auf der kompakten Menge  $I^n$  ist  $\|Df\|$  beschränkt. Somit gibt es  $M \geq 0$  mit

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \cdot \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in I^n.$$

- (iii) Sei  $c \in C$ . Dann gilt  $\text{rang } Df(c) < n$ . Somit ist das Bild von  $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto f(c) + Df(c)\langle x - c \rangle$  ein affiner Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  von einer Dimension strikt kleiner als  $n$ . Wir können daher eine affine Hyperebene  $H$  mit  $f(c) + Df(c)\langle x - c \rangle \subset H$  für alle  $x \in I^n$  fixieren. Wir definieren nun den Restterm  $R(x)$  durch

$$f(x) = f(c) + Df(c)\langle x - c \rangle + R(x).$$

Da  $f \in C^2$  ist, gibt es nach Taylor ein  $C \geq 0$  mit

$$\|R(x)\| \leq C \cdot \|x - c\|^2$$

für alle  $x \in I^n$ . Zusammengefasst erhalten wir für  $x \in I^n$

$$d(f(x), H) \leq \|f(x) - (f(c) + Df(c)\langle x - c \rangle)\| = \|R(x)\| \leq C \cdot \|x - c\|^2.$$

- (iv) Für  $x$  mit  $\|x - c\| \leq \varepsilon$  liegt  $f(x)$  also höchstens  $C \cdot \varepsilon^2$  von  $H$  und  $M \cdot \varepsilon$  von  $f(c)$  entfernt. Somit liegt das Bild von  $\{x: \|x - c\| \leq \varepsilon\}$  in einem Quader vom Volumen

$$(2C\varepsilon^2) \cdot (2M\varepsilon)^{n-1} = 2^n C M^{n-1} \varepsilon^{n+1}.$$

- (v) Sei  $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Wir teilen nun  $I^n$  in  $h^n$  Würfel der Kantenlänge  $\frac{1}{h}$  auf. Betrachte nun nur noch Würfel, in denen es mindestens einen kritischen Punkt  $c \in C$  gibt. Für  $x$  und  $c$  im gleichen Würfel der Kantenlänge  $\frac{1}{h}$  gilt  $\|x - c\| \leq \frac{\sqrt{n}}{h}$ . Wir wenden die obige Abschätzung nun für jeden der kleinen Würfel, die einen kritischen Punkt enthalten, an und erhalten mit  $\varepsilon = \frac{\sqrt{n}}{h}$ , da es maximal  $h^n$  solche Würfel gibt, für das Gesamtvolumen derer Bilder die obere Schranke

$$2^n C M^{n-1} \frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{h^{n+1}} \cdot h^n.$$

Da dies für  $h \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert, folgt die Behauptung.  $\square$

## 5. ABBILDUNGSGRAD

In diesem Kapitel wollen wir den Brouwergrad für Abbildungen zwischen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  untersuchen. Wir wählen einen analytischen Zugang und folgen [6]. Einen alternativen Zugang bietet die algebraische Topologie. Unterschiedliche Verallgemeinerungen des Abbildungsgrades finden sich in der Funktionalanalysis oder Topologie.

### 5.1. Definition und Eigenschaften.

**Definition 5.1.1** (Brouwergrad). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,

$$f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Sei  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  ein regulärer Wert von  $f|_{\Omega}$ . Dann definieren wir den **Brouwergrad** durch

$$d(f, \Omega, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} \det df(x).$$

Manchmal schreibt man auch  $\deg(f, \Omega, y)$  statt  $d(f, \Omega, y)$ .

Mit Hilfe einer Reihe von Lemmata wollen wir diese Definition auch auf  $C^0$ -Funktionen und nicht reguläre Punkte übertragen.

**Bemerkung 5.1.2.**

- (i) Zunächst einmal ist der Abbildungsgrad definiert, denn die Summe ist endlich: Sei  $y$  regulär und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus paarweise verschiedenen Punkten in  $f^{-1}(y)$ . Da  $\overline{\Omega}$  kompakt ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $x_n \rightarrow x \in \overline{\Omega}$  konvergiert. Falls  $x \in \Omega$  ist, ist  $x$  wegen  $f(x) = y$  ein regulärer Punkt von  $f$  und somit ist  $f$  in einer kleinen Umgebung von  $x$  injektiv. Widerspruch zu  $x_n \rightarrow x$  und  $f(x_n) = f(x) = y$ . Ist  $x \in \partial\Omega$ , so liefert die Stetigkeit von  $f$ , dass auch  $f(x) = y$  gilt, wir hatten aber  $y \notin f(\partial\Omega)$  angenommen. Somit ist  $f^{-1}(y)$  endlich.
- (ii) In  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  ist die Menge der regulären Werte relativ offen und die Menge der singulären Werte relativ abgeschlossen. Nach dem Sardischen Satz ist die Menge der regulären Werte auch dicht in  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ .

**Lemma 5.1.3.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, sei  $F \in C^1(\Omega \times (a, b), \mathbb{R}^n)$  und sei  $z$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve (d. h.  $|z'| = 1$ ) mit  $F(z(s)) = 0$  für alle  $s \in (s_0, s_1)$ . Schreibe  $z(s) = (x(s), t(s)) \in \Omega \times (a, b)$ . Dann gilt

$$t'(s) \det \begin{pmatrix} F_z(z(s)) \\ z'(s) \end{pmatrix} = \det F_x(z(s)).$$

Hat  $F_z$  den Rang  $n$ , so ist  $\det \begin{pmatrix} F_z \\ z' \end{pmatrix} \neq 0$ .

*Beweis.* Aus  $F(z(s)) = 0$  folgt  $dF(z(s))\langle z'(s) \rangle = 0$  und in Komponenten

$$(5.1) \quad \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial F^k}{\partial z^l} (z^l)' \equiv \sum_{l=1}^n \frac{\partial F^k}{\partial x^l} (x^l)' + \frac{\partial F^k}{\partial t} t' = 0$$

für alle  $k = 1, \dots, n$ .

Wäre  $\det \begin{pmatrix} F_z \\ z' \end{pmatrix} = 0$  und  $\operatorname{rang} F_z = n$ , so gäbe es  $\lambda_k \in \mathbb{R}$  mit  $(z^l)' = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial F^k}{\partial z^l}$ .

Somit folgte

$$1 = \sum_{l=1}^{n+1} (z^l)'^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{\sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial F^k}{\partial z^l} (z^l)'}_{=0 \text{ (5.1)}} = 0.$$

Widerspruch.

Auch für die andere Behauptung verwenden wir am Ende (5.1).

$$t' \cdot \det \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F^k}{\partial x^l} \\ (x^l)' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\partial F^k}{\partial t} \\ t' \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F^k}{\partial x^l} \\ (x^l)' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\partial F^k}{\partial t} t' \\ (t')^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial F^k}{\partial x^l} \right) & \left( \frac{\partial F^k}{\partial t} t' + \sum_{l=1}^n \frac{\partial F^k}{\partial x^l} (x^l)' \right) \\ \left( (x^l)' \right) & (t')^2 + \sum_{l=1}^n (x^l)'^2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial F^k}{\partial x^l} \right) & 0 \\ \left( (x^l)' \right) & 1 \end{pmatrix} = \det \left( \frac{\partial F^k}{\partial x^l} \right). \quad \square
\end{aligned}$$

Unter kleinen Störungen der Funktion ändert sich der Abbildungsgrad nicht.

**Lemma 5.1.4.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Seien  $f_0, f_1 \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Sei  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f_0(\partial\Omega)$ ,  $\sigma := \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f_0(x) - f_1(x)| < \rho := \inf_{x \in \partial\Omega} |f_0(x) - y|$ .

Sei  $y$  ein regulärer Wert von  $f_0$  und  $f_1$ . Dann ist

$$d(f_0, \Omega, y) = d(f_1, \Omega, y).$$

*Beweis. Vorbemerkung:* Sei  $y$  ein regulärer Wert von  $f$ ,  $f$  erfülle die Voraussetzungen an  $f_i$ . Gelte ohne Einschränkung  $y = 0$ . Dann tritt für ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  einer der folgenden Fälle ein:

- (i)  $f^{-1}(B_\varepsilon(y)) = \emptyset$
- (ii) Wir definieren  $x_j$  durch  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$  und wählen Umgebungen  $U_j(x_j)$  von  $x_j$ , so dass  $f|_{U_j(x_j)}: U_j(x_j) \rightarrow B_\varepsilon(y)$  für  $1 \leq j \leq m$  ein Diffeomorphismus ist und  $f^{-1}(B_\varepsilon(y)) = U_1(x_1) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} U_m(x_m)$  gilt: Nach Bemerkung 5.1.2 ist das Urbild endlich. Dann gibt es zu jedem Punkt  $x_j$  eine Umgebung  $V_j$ , so dass  $f|_{V_j}$  ein Diffeomorphismus auf das Bild ist. Durch Verkleinern der Umgebungen  $V_j$  können wir ohne Einschränkung annehmen, dass diese Mengen paarweise disjunkt sind. Die Mengen  $f(V_j)$  sind jeweils offene Umgebungen von  $y$ . Somit ist auch ihr Schnitt eine Umgebung von  $y$ . Wähle nun  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $B_\varepsilon(y) \subset \bigcap_{j=1}^m V_j$  gilt. Wenn wir nun  $U_j(x_j) := (f|_{V_j})^{-1}(B_\varepsilon(y))$  wählen, folgt die Behauptung.

In beiden Fällen ist

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, z) \quad \text{für alle } z \in B_\varepsilon(y).$$

Nun zum eigentlichen Beweis: Gelte ohne Einschränkung  $y = 0$ . Definiere

$$F(x, t) := (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$$

für  $0 \leq t \leq 1$  und wähle  $\varepsilon > 0$  so, dass die Vorbemerkung für  $f_0$  und für  $f_1$  gilt. Wähle einen regulären Wert  $z$  von  $F$  mit  $|z| < \min\{\varepsilon, \rho - \sigma\}$ . Wegen  $|z| < \varepsilon$  ist  $z$  ein regulärer Wert für  $f_0$  und  $f_1$ . Aufgrund der Vorbemerkung erhalten wir  $d(f_j, \Omega, 0) = d(f_j, \Omega, z)$  für  $j = 0, 1$ .

Die Menge  $F^{-1}(z) \cap (\Omega \times [0, 1])$  ist kompakt, da für  $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$

$$|F(x, t) - z| = |f_0(x) + t(f_1(x) - f_0(x)) - z| \geq \rho - \sigma - |z| > 0$$

gilt. Schreibe  $f_j^{-1}(z) = \{x_j^1, \dots, x_j^{m_j}\}$  für  $j = 0, 1$ . Nach Voraussetzung ist  $z$  ein regulärer Wert von  $f_0 = F(\cdot, 0)$  und  $f_1 = F(\cdot, 1)$ . Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es daher ein  $\delta > 0$ , so dass die Mengen  $F^{-1}(z) \cap (\Omega \times [0, \delta])$  und  $F^{-1}(z) \cap (\Omega \times [1 - \delta, 1])$  entweder leer sind oder aus  $m_0$  bzw.  $m_1$  disjunkten  $C^1$ -Kurven bestehen. Diese beschreiben wir als Graphen der Funktionen  $\alpha_j^i(t)$ ,  $j = 0, 1$ ,  $i = 1, \dots, m_j$ ,  $0 \leq t \leq \delta$  bzw.  $1 - \delta \leq t \leq 1$ . Es gilt  $\alpha_j^i(j) = x_j^i$ .

Nach Voraussetzung ist  $z$  auch ein regulärer Wert von  $F$ . Daher ist  $F^{-1}(z)$  eine kompakte eindimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand (Benutze, dass  $F$  für ein kleines  $\zeta > 0$  auch für  $t \in (-\zeta, 1 + \zeta)$  in  $z$  regulär ist. Das Urbild von  $z$  unter der Fortsetzung ist dann eine eindimensionale Mannigfaltigkeit. Da  $z$

für  $f_0 = F(\cdot, 0)$  und  $f_1 = F(\cdot, 1)$  regulär ist, können wir nahe  $t = 0$  und  $t = 1$  jede Zusammenhangskomponente als Graph über der  $t$ -Achse schreiben. Der Rand ist  $F^{-1}(z) \cap (\Omega \times \{0, 1\})$ . Aus diesen Überlegungen geht hervor, dass das Urbild genau eine Mannigfaltigkeit im später noch zu definierenden Sinn ist, dass es also lokal diffeomorph zu  $[0, 1)$  oder  $(0, 1]$  ist. Die endlich vielen Zusammenhangskomponenten sind also diffeomorph zu  $\mathbb{S}^1$  oder  $[0, 1]$ . Sei  $W$  eine Zusammenhangskomponente von  $F^{-1}(z)$ , die zu  $[0, 1]$  diffeomorph ist. Wir parametrisieren  $W$  nach der Bogenlänge und erhalten  $W = \{w(s) = (x(s), t(s)) : s_0 \leq s \leq s_1\}$ . Es gilt  $t(s_0), t(s_1) \in \{0, 1\}$ . Weiterhin ist  $t'(s_j) \neq 0$ : Sei nämlich  $t \in [0, \delta]$  oder  $t \in [1 - \delta, 1]$ , so ist wegen  $x(s) = \alpha_j^i(t(s))$

$$1 = |w'(s)| = \left| \left( (\alpha_j^i)' t'(s), t'(s) \right) \right| = |t'(s)| \cdot \left| \left( (\alpha_j^i)', 1 \right) \right|.$$

Es treten drei Fälle auf:

- (i)  $W$  hat beide Randpunkte in  $\Omega \times \{0\}$ : Dann gelten  $t'(s_0) > 0$  und  $t'(s_1) < 0$ .
- (ii)  $W$  hat beide Randpunkte in  $\Omega \times \{1\}$ : Dann gelten  $t'(s_0) < 0$  und  $t'(s_1) > 0$ .
- (iii)  $W$  hat einen Randpunkt in  $\Omega \times \{0\}$ , ohne Einschränkung  $w(t(s_0))$ , und einen Randpunkt in  $\Omega \times \{1\}$ : Dann gelten  $t'(s_0) > 0$  und  $t'(s_1) > 0$ .

Auf der Menge  $F^{-1}(z)$  hat  $dF$  den Rang  $n$ . Somit kann sich nach Lemma 5.1.3 das Vorzeichen von  $\det \begin{pmatrix} F_z \\ z' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} dF \\ z' \end{pmatrix}$  auf einer Zusammenhangskomponente  $W$  nicht ändern. Mit Lemma 5.1.3 folgt daher aufgrund des ggf. auftretenden Vorzeichenwechsels zwischen  $t'(s_0)$  und  $t'(s_1)$  in den jeweiligen Fällen

- (i)  $\operatorname{sgn} \det F_x(x(s_0), 0) = -\operatorname{sgn} \det F_x(x(s_1), 0)$ ,
- (ii)  $\operatorname{sgn} \det F_x(x(s_0), 1) = -\operatorname{sgn} \det F_x(x(s_1), 1)$ ,
- (iii)  $\operatorname{sgn} \det F_x(x(s_0), 0) = \operatorname{sgn} \det F_x(x(s_1), 1)$ .

Nun ist  $F_x(x, j) = df_j(x)$  für  $j = 0, 1$ . Aufsummieren in der Definition des Abbildungsgrades liefert daher

$$d(f_0, \Omega, z) = d(f_1, \Omega, z).$$

Da diese Abbildungsgrade nach Überlegungen von oben mit denen im Ursprung übereinstimmen, folgt die Behauptung.  $\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir den Abbildungsgrad für beliebige, d. h. nicht notwendigerweise reguläre, Werte definieren.

**Definition 5.1.5.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Sei

$$f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

und sei  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ . Dann definieren wir

$$d(f, \Omega, y) := d(f, \Omega, z),$$

wobei  $z$  ein regulärer Wert von  $f$  mit  $|z - y| < \frac{1}{3} \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega)) \equiv \frac{1}{3}\rho$  ist.

**Lemma 5.1.6.**

- (i)  $d(f, \Omega, z)$  ist unabhängig von der speziellen Wahl von  $z$ .
- (ii) Lemma 5.1.4 gilt ohne die Voraussetzung, dass  $y$  regulär ist.

*Beweis.*

- (i) Seien  $z_0, z_1$  reguläre Werte von  $f$  und gelte  $|z_j - y| < \frac{1}{3}\rho$ . Setze  $f_j := f - z_j$ . Dann folgt  $d(f, \Omega, z_j) = d(f_j, \Omega, 0)$  für  $j = 0, 1$ . Es gilt

$$\sigma := \sup_{x \in \Omega} |f_0(x) - f_1(x)| = |z_0 - z_1| \leq |z_0 - y| + |y - z_1| < \frac{2}{3}\rho$$

und für  $x \in \partial\Omega$  ist

$$|f_0(x)| = |f(x) - z_0| \geq |f(x) - y| - |y - z_0| \geq \rho - \frac{1}{3}\rho = \frac{2}{3}\rho.$$

Nach Lemma 5.1.4 folgt daher  $d(f_0, \Omega, 0) = d(f_1, \Omega, 0)$ . Zusammengenommen folgt die Behauptung.

- (ii) Sei  $y \notin f_0(\partial\Omega)$ . Damit gilt aufgrund der Voraussetzungen von Lemma 5.1.4 auch  $y \notin f_1(\partial\Omega)$ . Wähle einen regulären Wert  $\tilde{y}$  für  $f_0$  und  $f_1$  mit  $|\tilde{y} - y| < \frac{1}{3} \text{dist}(y, f_j(\partial\Omega))$ ,  $j = 0, 1$  und (die folgende Ungleichung gilt nach Voraussetzung von Lemma 5.1.4 bereits für  $y$  statt  $\tilde{y}$ )

$$\sup_{\Omega} |f_0 - f_1| =: \sigma < \text{dist}(\tilde{y}, f_0(\partial\Omega)).$$

Nach Lemma 5.1.4 und nach der Definition des Abbildungsgrades für nicht reguläre Werte folgt

$$d(f_0, \Omega, y) \stackrel{\text{Def.}}{=} d(f_0, \Omega, \tilde{y}) \stackrel{\text{Lem.}}{=} d(f_1, \Omega, \tilde{y}) \stackrel{\text{Def.}}{=} d(f_1, \Omega, y). \quad \square$$

Wir erweitern die Definition auch auf stetige Abbildungen.

**Definition 5.1.7.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Sei  $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  und sei  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ , so definieren wir

$$d(f, \Omega, y) := d(f_0, \Omega, y),$$

wobei  $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  mit  $\sup_{x \in \Omega} |f(x) - f_0(x)| < \frac{1}{3} \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$  ist.

**Lemma 5.1.8.**

- (i) Der Abbildungsgrad für stetige Funktionen ist wohldefiniert, hängt also nicht von der speziellen Wahl der glatten Funktion ab.  
(ii) Lemma 5.1.4 gilt auch für  $f_0, f_1 \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  und nicht notwendigerweise reguläre Werte.

*Beweis.*

- (i) Seien  $f_0, f_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  mit  $\sup_{x \in \Omega} |f(x) - f_i(x)| < \frac{1}{3} \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) =: \frac{1}{3}\rho$ ,  $i = 0, 1$ . Es folgt  $\sup_{\Omega} |f_0(x) - f_1(x)| < \frac{2}{3}\rho$ . Weiterhin gilt

$$\text{dist}(y, f_i(\partial\Omega)) \geq \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) - \sup_{\Omega} |f - f_i| > \rho - \frac{1}{3}\rho = \frac{2}{3}\rho$$

für  $i = 0, 1$ . Nach Lemma 5.1.6 folgt  $d(f_0, \Omega, y) = d(f_1, \Omega, y)$ . Wir erhalten die Wohldefiniertheit.

- (ii) Seien  $f_0, f_1 \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  und sei  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f_0(\partial\Omega)$  mit

$$\sigma := \sup_{\Omega} |f_0 - f_1| < \text{dist}(y, f_0(\partial\Omega)) =: \rho.$$

Somit ist  $\text{dist}(y, f_1(\partial\Omega)) \geq \rho - \sigma > 0$ .

Wähle nun  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  mit  $\sup_{\Omega} |f_j - \tilde{f}_j| < \frac{1}{3}(\rho - \sigma)$ , also

$$\sup_{\Omega} |f_j - \tilde{f}_j| < \frac{1}{3} \text{dist}(y, f_j(\partial\Omega)) \quad \text{für } j = 0, 1.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} |\tilde{f}_0 - \tilde{f}_1| &\leq \sup_{\Omega} |\tilde{f}_0 - f_0| + \sup_{\Omega} |f_0 - f_1| + \sup_{\Omega} |f_1 - \tilde{f}_1| \\ &< \frac{1}{3}(\rho - \sigma) + \sigma + \frac{1}{3}(\rho - \sigma) = \frac{2}{3}\rho + \frac{1}{3}\sigma \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{dist}(y, \tilde{f}_0(\partial\Omega)) &\geq \text{dist}(y, f_0(\partial\Omega)) - \sup_{\Omega} |f_0 - \tilde{f}_0| \\ &> \rho - \frac{1}{3}(\rho - \sigma) = \frac{2}{3}\rho + \frac{1}{3}\sigma. \end{aligned}$$

Wir erhalten insgesamt mit Lemma 5.1.6

$$d(f_0, \Omega, y) \stackrel{\text{Def.}}{=} d(\tilde{f}_0, \Omega, y) \stackrel{\text{Lem.}}{=} d(\tilde{f}_1, \Omega, y) \stackrel{\text{Def.}}{=} d(f_1, \Omega, y). \quad \square$$

**Definition 5.1.9** (Homotopie).

- (i) Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f, g: X \rightarrow Y$  stetige Abbildungen. Dann heißt eine stetige Abbildung  $\Phi: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  mit  $\Phi(\cdot, 0) = f$  und  $\Phi(\cdot, 1) = g$  eine **Homotopie** von  $f$  nach  $g$ .
- (ii) Gibt es eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ , so heißen die Abbildungen  $f$  und  $g$  **homotop** zueinander.
- (iii) Die **Homotopieklasse** einer stetigen Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  besteht aus allen stetigen Abbildungen  $g: X \rightarrow Y$ , so dass  $f$  und  $g$  homotop zueinander sind.

**Theorem 5.1.10** (Eigenschaften des Brouwer-Grades). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt.*

- (i) *Ist  $F \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$  eine Homotopie und  $y \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$ , so ist  $d(F(\cdot, t), \Omega, y)$  von  $t$  unabhängig. (Homotopieinvarianz)*
- (ii) *Ist  $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  und  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ , so ist  $d(f, \Omega, y) = d(f - y, \Omega, 0)$  und  $d(f, \Omega, \cdot)$  ist auf jeder Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  konstant.*
- (iii) *Ist  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  und  $d(f, \Omega, y) \neq 0$ , so existiert  $x \in \Omega$  mit  $f(x) = y$ .*
- (iv) *Sei  $\Omega = \Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2$  mit disjunkten offenen Mengen  $\Omega_i$  und ist  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2)$ , so ist*

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y).$$

- (v) *Sei  $A \subset \overline{\Omega}$  abgeschlossen und  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega \cup A)$ . Dann ist*

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega \setminus A, y).$$

(Ausschneidungseigenschaft)

*Beweis.*

- (i) Da  $\partial\Omega \times [0, 1]$  kompakt ist und  $F$  stetig ist, ist  $\rho := \text{dist}(y, F(\partial\Omega \times [0, 1])) > 0$ . Da  $F$  auf  $\overline{\Omega} \times [0, 1]$  gleichmäßig stetig ist, gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $t, t_0 \in [0, 1]$  mit  $|t - t_0| < \delta$

$$\sup_{\Omega} |F(x, t) - F(x, t_0)| < \rho$$

gilt. Nach Lemma 5.1.8 ist

$$d(F(\cdot, t), \Omega, y) = d(F(\cdot, t_0), \Omega, y)$$

für solche  $t_0, t$ . Die Behauptung folgt.

- (ii) Die Behauptung  $d(f, \Omega, y) = d(f - y, \Omega, 0)$  ist für  $f \in C^2$  und reguläre Werte  $y$  von  $f$  trivial. Der allgemeine Fall folgt daher mit Lemma 5.1.6 und Lemma 5.1.8.

Zur Konstanz auf Zusammenhangskomponenten: Seien  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  Punkte in derselben Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ . Sei nun  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  ein stetiger Weg mit  $\gamma(0) = y_0$  und  $\gamma(1) = y_1$ . Setze  $F(x, t) := f(x) - \gamma(t)$ . Dann ist  $0 \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$ , also folgt aufgrund der Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, y_0) &= d(f - y_0, \Omega, 0) = d(f - \gamma(0), \Omega, 0) = d(F(\cdot, 0), \Omega, 0) \\ &= d(F(\cdot, 1), \Omega, 0) = d(f - y_1, \Omega, 0) = d(f, \Omega, y_1). \end{aligned}$$

- (iii) Sei  $y \notin f(\overline{\Omega})$ . Setze  $\rho := \text{dist}(y, f(\overline{\Omega})) > 0$ . Wähle  $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  mit  $\sup_{\Omega} |f_0 - f| < \frac{1}{3}\rho$ . Dann ist  $d(f, \Omega, y) = d(f_0, \Omega, y)$  nach Lemma 5.1.8 und es gilt  $\text{dist}(y, f_0(\overline{\Omega})) > \frac{2}{3}\rho$ . Wähle einen regulären Wert  $y_0$  von  $f_0$  mit  $|y - y_0| < \frac{2}{9}\rho$ . Nach Lemma 5.1.6 ist  $d(f_0, \Omega, y) = d(f_0, \Omega, y_0)$  und  $\text{dist}(y_0, f_0(\overline{\Omega})) > \frac{2}{3}\rho - \frac{2}{9}\rho > 0$ . Daher ist  $d(f_0, \Omega, y_0) = 0$ , denn  $y_0$  besitzt in der allerersten Definition des Abbildungsgrades keine Urbilder in  $\overline{\Omega}$ . Somit ist auch  $d(f, \Omega, y) = 0$ .
- (iv) Dies ist für  $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  und einen regulären Wert  $y$  trivial und folgt sonst mit Hilfe von Lemma 5.1.6 und Lemma 5.1.8.
- (v) Es ist  $\partial(\Omega \setminus A) \subset \partial\Omega \cup A$ . Da  $y \notin f(\partial(\Omega \setminus A))$  ist, ist  $d(f, \Omega \setminus A, y)$  wohldefiniert. Da weiterhin  $\partial\Omega \cup A$  kompakt ist, ist  $\rho := \text{dist}(y, f(\partial\Omega \cup A)) > 0$ . Wähle nun  $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  mit  $\sup_{\Omega} |f - f_0| < \frac{1}{3}\rho$  und einen regulären Wert  $y_0$  von  $f_0$  mit  $|y - y_0| < \frac{2}{9}\rho$ . Wie im Beweis von Teil (iii) folgt  $d(f, \Omega \setminus A, y) = d(f_0, \Omega \setminus A, y_0)$ . Aus  $y_0 \notin f_0(\partial\Omega \cup A)$  folgt die erste Gleichheit in

$$d(f_0, \Omega, y_0) = d(f_0, \Omega \setminus A, y_0) = d(f, \Omega \setminus A, y). \quad \square$$

Die Homotopieinvarianz impliziert, dass  $d(f, \Omega, y)$  nicht von  $f$  insgesamt sondern nur von  $f|_{\partial\Omega}$  abhängt.

**Korollar 5.1.11.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Seien  $f_0, f_1 \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  mit  $f_0|_{\partial\Omega} = f_1|_{\partial\Omega}$ . Dann gilt

$$d(f_0, \Omega, y) = d(f_1, \Omega, y)$$

für  $y \notin f_0(\partial\Omega) = f_1(\partial\Omega)$ .

*Beweis.* Wende die Homotopieinvarianz auf die Homotopie  $F(x, t) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$  an und berücksichtige, dass  $F(x, t) = f_0(x) = f_1(x)$  für alle  $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$  gilt.  $\square$

## 5.2. Anwendungen des Abbildungsgrades.

**Theorem 5.2.1** (Brouwerscher Fixpunktsatz). Sei  $f: \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$  stetig. Dann besitzt  $f$  einen Fixpunkt, d. h. es gibt ein  $x \in B_1(0)$  mit  $f(x) = x$ .

*Beweis.* Definiere  $F(x, t) := x - tf(x)$  für  $(x, t) \in \overline{B_1(0)} \times [0, 1]$ . Für  $|x| = 1$  und  $0 \leq t < 1$  ist  $|F(x, t)| \geq 1 - t > 0$ . Nehme an, dass  $f$  keinen Fixpunkt auf  $\partial B_1(0)$  besitzt. Dann gilt  $F(x, t) \neq 0$  für  $(x, t) \in \partial B_1(0) \times [0, 1]$ . Somit ist aufgrund der Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades

$$d(\text{id} - f, B_1(0), 0) = d(\text{id}, B_1(0), 0) = 1 \neq 0$$

und somit existiert ein  $x \in B_1(0)$  mit  $(\text{id} - f)(x) = 0$ .  $\square$

**Korollar 5.2.2.** Sei  $X$  homöomorph zu  $\overline{B_1(0)}$ . Dann besitzt jede stetige Abbildung  $f: X \rightarrow X$  einen Fixpunkt.

*Beweis.* Übung.  $\square$

**Theorem 5.2.3.** Sei  $n$  ungerade. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $0 \in \Omega$ . Sei  $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  stetig. Dann gibt es  $x \in \partial\Omega$  und  $\lambda \neq 0$ , so dass  $f(x) = \lambda x$  gilt.

*Beweis.* Sei ohne Einschränkung  $f$  zu  $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  fortgesetzt. Da  $n$  ungerade ist, gilt  $d(-\text{id}, \Omega, 0) = -1$ . Ist  $d(f, \Omega, 0) \neq -1$ , so besitzt die Homotopie  $H(x, t) := (1-t)f(x) + t(-x)$  eine Nullstelle  $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0, 1)$ . Es folgt  $f(x_0) = \frac{t_0}{1-t_0}x_0$ . Ist  $d(f, \Omega, 0) = -1$ , so wenden wir dasselbe Argument mit der Identität und  $H(x, t) := (1-t)f(x) + tx$  an.  $\square$

**Korollar 5.2.4** (Satz vom Igel). *Sei  $n$  ungerade. Sei  $V: \partial B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges tangenciales Vektorfeld an die Sphäre, d. h. gelte  $\langle V(x), x \rangle = 0$  für alle  $x \in \partial B_1(0)$ . Dann besitzt  $V$  eine Nullstelle.*

**Bemerkung 5.2.5.** Ist  $n$  gerade, so gibt es ein nicht verschwindendes tangenciales Vektorfeld auf  $\mathbb{S}^{n-1}$ , nämlich

$$V(x^1, \dots, x^{2m}) = (-x^2, x^1, -x^4, x^3, \dots, -x^{2m}, x^{2m-1}).$$

**Definition 5.2.6** (Abbildungsgrad für Sphären). Sei  $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  stetig und  $\tilde{f}: \overline{B_1^n(0)} \rightarrow \overline{B_1^n(0)}$  sei eine stetige Fortsetzung von  $f$ , z. B.

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} |x|f\left(\frac{x}{|x|}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Definiere den **Grad** von  $f$ ,  $\deg(f)$ , durch

$$\deg(f) := d(\tilde{f}, B_1(0), 0).$$

**Bemerkung 5.2.7.**

- (i) Seien  $\tilde{f}_0$  und  $\tilde{f}_1$  zwei verschiedene Fortsetzungen von  $f$ . Dann ist  $H(x, t) := (1-t)\tilde{f}_0(x) + t\tilde{f}_1(x)$  eine Homotopie zwischen diesen beiden Fortsetzungen mit festen Randwerten. Somit ist  $d(\tilde{f}_0, B_1(0), 0) = d(\tilde{f}_1, B_1(0), 0)$  und  $\deg f$  ist wohldefiniert.
- (ii) Seien  $f_0, f_1: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  zwei homotope Abbildungen. Setzen wir eine Homotopie  $F(x, t)$ ,  $(x, t) \in \mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$  mit  $F(\cdot, 0) = f_0$  und  $F(\cdot, 1) = f_1$  zu einer Homotopie  $\tilde{F}(x, t)$ ,  $(x, t) \in B_1(0) \times [0, 1]$ , fort, so folgt

$$\deg f_0 = d(\tilde{F}(\cdot, 0), B_1(0), 0) = d(\tilde{F}(\cdot, 1), B_1(0), 0) = \deg f_1.$$

Somit hängt  $\deg f$  nur von der Homotopieklasse von  $f$  ab.

- (iii) Für  $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  besteht  $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1}) \supset \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$  wegen  $f(\mathbb{S}^{n-1}) \subset \mathbb{S}^{n-1}$  aus maximal zwei Zusammenhangskomponenten. Handelt es sich um nur eine Zusammenhangskomponente, so ist  $f$  nicht surjektiv und es gilt  $\deg f = 0$ . Die Umkehrung ist i. a. falsch (warum?).

Der Abbildungsgrad charakterisiert eine Abbildung  $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  sogar bis auf Homotopie.

**Theorem 5.2.8** (Satz von Hopf). *Seien  $f, g: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  stetig. Dann sind  $f$  und  $g$  genau dann homotop, wenn  $\deg f = \deg g$  gilt.*

*Beweis.* Siehe [5, Kor. 4.25]. (Dort wird unter Verwendung von Homotopietheorie gezeigt, dass  $\pi_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  gilt.)  $\square$

**Theorem 5.2.9** (Produktsatz von Leray). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Sei  $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  und seien  $Z_0, Z_1, \dots$  die Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ . Sei  $Z_0$  die unbeschränkte Komponente. Sei  $g \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  eigentlich (d. h. Urbilder kompakter Mengen sind kompakte  $\iff |g(x)| \rightarrow \infty$  für  $|x| \rightarrow \infty$ ). Sei  $y \in \mathbb{R}^n \setminus (g \circ f(\partial\Omega))$ . Dann ist  $y \notin g(\partial Z_i)$  und es gilt*

$$d(g \circ f, \Omega, y) = \sum_{i \geq 1} d(g, Z_i, y) \cdot d(f, \Omega, Z_i),$$

wobei  $d(f, \Omega, Z_i)$  den konstanten Wert von  $d(f, \Omega, \cdot)$  auf  $Z_i$  bezeichnet.

Die wesentliche Beweisidee ist, geeignet zu approximieren und Kettenregel und Determinantenmultiplikationssatz zu verwenden.

*Beweis.* Beachte zunächst, dass  $d(f, \Omega, Z_0) = 0$  ist, da  $Z_0$  unbeschränkt und  $f(\Omega)$  beschränkt ist, siehe Eigenschaft (iii) des Brouwer-Grades.

Wegen  $\partial Z_i \subset f(\partial\Omega)$  folgt  $y \notin g(\partial Z_i)$  für alle  $i$ . Setze  $\rho := \text{dist}(y, g \circ f(\partial\Omega)) > 0$ . Dann ist  $\text{dist}(y, g(\partial Z_i)) \geq \rho$  für alle  $i$ . Es ist  $g^{-1}(\{y\}) \equiv g^{-1}(y) \subset \bigcup_{i \geq 1} Z_i$ . Da  $g^{-1}(y)$

kompakt ist, existiert  $m$ , so dass  $g^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=1}^m Z_i$  gilt. Somit ist  $d(g, Z_i, y) = 0$  für  $i > m$  und die obige Summe ist endlich. (Beachte, dass die Anzahl der Zusammenhangskomponenten selbst für  $f \in C^\infty$  nicht endlich zu sein braucht.) Wähle  $R > 0$ , so dass  $f(\bar{\Omega}) \subset B_R(0)$  gilt. Wähle  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  eigentlich mit  $\sup_{|x| \leq R} |g(x) - g_0(x)| < \rho$ . Es folgt  $\sup_{x \in \Omega} |g \circ f(x) - g_0 \circ f(x)| < \rho$ . Weiterhin folgt  $y \notin g_0(f(\partial\Omega))$ . Aufgrund der Homotopieinvarianz erhalten wir  $d(g \circ f, \Omega, y) = d(g_0 \circ f, \Omega, y)$  und  $d(g, Z_i, y) = d(g_0, Z_i, y)$  für alle  $i \geq 1$ . Daher wollen wir ohne Einschränkung  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  annehmen.

Es ist  $g^{-1}(y) \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$  und  $g^{-1}(y)$  ist kompakt. Daher ist

$$\delta := \text{dist}(g^{-1}(y), f(\partial\Omega)) > 0.$$

Wegen  $\partial Z_i \subset f(\partial\Omega)$  folgt insbesondere auch  $\text{dist}(g^{-1}(y), \partial Z_i) \geq \delta$ . Definiere  $V_i := B_{\delta/2}(Z_i \cap g^{-1}(y)) \subset Z_i$ . Dann gelten  $V_i = \emptyset$  für  $i > m$  und  $V_i \cap V_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ . Aufgrund der Ausschneidungseigenschaft erhalten wir

$$(5.2) \quad d(g, Z_i, y) = d(g, V_i, y).$$

und

$$(5.3) \quad \text{dist}(V_i, f(\partial\Omega)) \geq \frac{\delta}{2}.$$

Wähle jetzt  $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  mit

$$\sup_{\Omega} |f(x) - f_0(x)| < \frac{\delta}{2}$$

und

$$\sup_{\Omega} |g \circ f(x) - g \circ f_0(x)| < \rho = \text{dist}(y, g \circ f(\partial\Omega)).$$

Aufgrund der Homotopieinvarianz und (5.3) erhalten wir

$$(5.4) \quad d(g \circ f, \Omega, y) = d(g \circ f_0, \Omega, y)$$

und

$$(5.5) \quad d(f, \Omega, Z_i) = d(f, \Omega, v) = d(f_0, \Omega, v) \quad \text{für alle } v \in V_i.$$

Wähle einen regulären Wert  $y_0$  von  $g \circ f_0$  so nahe bei  $y$ , so dass  $g^{-1}(y_0) \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$ ,

$$(5.6) \quad d(g, V_i, y) = d(g, V_i, y_0)$$

und

$$(5.7) \quad d(g \circ f_0, \Omega, y) = d(g \circ f_0, \Omega, y_0)$$

gelten. Nach Kettenregel gilt  $d(g \circ f_0)(x) = dg(f_0(x)) \cdot df_0(x)$ . Da  $y_0$  ein regulärer Wert von  $g \circ f_0$  ist, ist  $y_0$  auch ein regulärer Wert von  $g$  (Kettenregel). Setze

$g^{-1}(y_0) =: \{z_1, \dots, z_N\}$ . Weiterhin sind die Punkte  $z_i$  für  $f$  regulär (wieder Kettenregel). Wir setzen  $f_0^{-1}(z_j) \cap \Omega = \{x_{jk} : k = 1, \dots, M_j\}$ . Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} d(g \circ f, \Omega, y) &\stackrel{(5.4), (5.7)}{=} d(g \circ f_0, \Omega, y_0) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{M_j} \operatorname{sgn} \det d(g \circ f_0)(x_{jk}) \\ &= \sum_i \sum_{z_j \in V_i} \sum_{x \in f^{-1}(z_j)} \operatorname{sgn} \det dg(z_j) \cdot \operatorname{sgn} \det df_0(x) \\ &= \sum_i \sum_{z_j \in V_i} \operatorname{sgn} \det dg(z_j) \cdot \left( \sum_{x \in f^{-1}(z_j)} \operatorname{sgn} \det df_0(x) \right) \\ &= \sum_i \sum_{z_j \in V_i} \operatorname{sgn} \det dg(z_j) \cdot d(f_0, \Omega, z_j). \end{aligned}$$

Nun ist  $z_j \in V_i$  und nach (5.5) folgt daher  $d(f_0, \Omega, z_j) = d(f, \Omega, Z_i)$ . Wegen  $d(f, \Omega, Z_0) = 0$  kann die Summation bei  $i = 1$  starten. Es folgt weiter

$$\begin{aligned} d(g \circ f, \Omega, y) &= \sum_{i \geq 1} d(f, \Omega, Z_i) \cdot \sum_{z_j \in V_i} \operatorname{sgn} \det dg(z_j) \\ &= \sum_{i \geq 1} d(f, \Omega, Z_i) \cdot d(g, V_i, y_0) \\ &\stackrel{(5.6), (5.2)}{=} \sum_{i \geq 1} d(f, \Omega, Z_i) \cdot d(g, Z_i, y) \end{aligned}$$

wie behauptet.  $\square$

Als Korollar erhalten wir eine  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes.

**Theorem 5.2.10** (Satz von Jordan-Brouwer). *Sei  $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und eindeutig (= injektiv). Dann besitzt  $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1})$  genau zwei Zusammenhangskomponenten.*

Als Vorbereitung/Wiederholung halten wir folgendes fest

**Bemerkung 5.2.11.**

- (i) Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen und sei  $f: A \rightarrow [a, b]$  stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung  $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow [a, b]$ .
- (ii) Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und sei  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, so existiert eine eigentliche stetige Fortsetzung nach  $\mathbb{R}^n$ .
- (iii) Sei  $f: A \rightarrow B$  eine stetige bijektive Abbildung zwischen kompakten (= überdeckungskompakt und  $T_2$ ) Mengen  $A$  und  $B$ . Dann ist  $f^{-1}$  stetig.

*Beweis.*

- (i) Dies ist der Fortsetzungssatz von Tietze.
- (ii) Benutze den Fortsetzungssatz; Übung.
- (iii) Topologievorlesung oder Übung.  $\square$

*Beweis des Satzes von Jordan-Brouwer, Theorem 5.2.10.*

Seien  $Z_0, Z_1, \dots$  die (Zusammenhangs-)komponenten von  $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1})$ . Sei  $Z_0$  die unbeschränkte Komponente. Betrachte  $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ . Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass die Abbildungen  $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $g := f^{-1}: f(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und eigentlich auf ganz  $\mathbb{R}^n$  fortgesetzt sind. Wähle  $z_j \in Z_j$ . Es gilt  $g \circ f = \operatorname{id}$  auf

$\mathbb{S}^{n-1} = \partial B_1(0)$  und  $f \circ g = \text{id}$  auf  $\partial Z_i \subset f(\mathbb{S}^{n-1})$ . Somit folgt nach Homotopieinvarianz

$$d(g \circ f, B_1(0), 0) = d(\text{id}, B_1(0), 0) = 1$$

und

$$(5.8) \quad d(f \circ g, Z_i, z_j) = d(\text{id}, Z_i, z_j) = \delta_{ij}.$$

Fixiere  $i \geq 0$ . Es ist  $g(\partial Z_i) \subset \mathbb{S}^{n-1}$ . Somit besitzt  $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial Z_i)$  maximal zwei Komponenten.

Wir wollen zunächst ausschließen, dass  $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial Z_i)$  aus nur einer Komponente besteht. Nehme dies an. Eine einzelne Komponente ist unbeschränkt. Somit liefert der Produktsatz von Leray, Theorem 5.2.9,

$$d(f \circ g, Z_i, z_i) = \sum_{\emptyset} = 0.$$

Dies widerspricht (5.8).

Also besteht  $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial Z_i)$  aus genau zwei Komponenten. Dies ist nur möglich, wenn  $g(\partial Z_i) = \mathbb{S}^{n-1}$  gilt. Wir erhalten  $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial Z_i) = B_1(0) \dot{\cup} (\mathbb{R}^n \setminus B_1(0))$ . Nun liefert der Leraysche Produktsatz

$$1 = d(g \circ f, B_1(0), 0) = \sum_{i \geq 1} \underbrace{d(g, Z_i, 0)}_{=: a_i} \cdot d(f, B_1(0), Z_i)$$

und

$$\delta_{ij} = d(f \circ g, Z_i, z_j) = \underbrace{d(f, B_1(0), z_j)}_{=: b_j} \cdot \underbrace{d(g, Z_i, B_1(0))}_{=: a_i}$$

Wir erhalten also  $a_i b_j = \delta_{ij}$  und  $\sum_{i \geq 1} a_i b_i = 1$ . Dies ist nur möglich, wenn die

Summe nur den Term für  $i = 1$  enthält.  $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{S}^{n-1})$  besteht also aus genau zwei Zusammenhangskomponenten:  $Z_0$  und  $Z_1$ .  $\square$

### 5.3. Satz von Borsuk $\star$ .

#### Definition 5.3.1.

- (i) Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Dann heißt  $\Omega$  **symmetrisch**, falls  $\Omega = -\Omega$  gilt.
- (ii) Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  symmetrisch. Sei  $f: \Omega \rightarrow V$  für einen Vektorraum  $V$ . Dann heißt  $f$  **ungerade**, falls  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in \Omega$  gilt.

Als Vorbereitung zeigen wir zwei technische Lemmata: Ist die Dimension des Zielraumes groß genug, so kann man stetige Abbildungen so fortsetzen, dass auch die Fortsetzung einen Punkt vermeidet.

**Lemma 5.3.2.** *Sei  $K \subset \mathbb{R}^m$  kompakt,  $f \in C^0(K, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  mit  $n > m$ . Dann existiert eine Fortsetzung  $F \in C^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  von  $f$ .*

*Beweis.* Setze  $\delta := \inf_K |f| > 0$ . Wähle  $g_0 \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  mit  $\sup_K |f - g_0| < \frac{\delta}{4}$ .

Wegen  $g_0 \in C^1$  und  $m < n$  ist  $g_0(\mathbb{R}^m)$  eine Lebesgue-Nullmenge in  $\mathbb{R}^n$ . Somit gibt es  $y_0 \in B_{\delta/4}(0) \setminus g_0(\mathbb{R}^m)$ . Setze  $g := g_0 - y_0$ . Dann ist  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^m$ . Nach Dreiecksungleichung gilt  $\rho := \sup_K |f - g| < \frac{\delta}{2}$ . Somit ist  $\inf_K |g| > \frac{\delta}{2}$ . Definiere nun

$$G(x) := \begin{cases} g(x), & \text{falls } |g(x)| \geq \frac{\delta}{2}, \\ \frac{\delta}{2} \cdot \frac{g(x)}{|g(x)|} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist  $G \in C^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ . In ganz  $\mathbb{R}^m$  gilt  $|G(x)| \geq \frac{\delta}{2}$ . In  $K$  ist  $|g| \geq \frac{\delta}{2}$  und somit gilt dort  $G = g$ . Nach dem Fortsetzungssatz von Tietze gibt es ein  $H \in C^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

mit  $H|_K = f - g$  und  $|H(x)| \leq \rho$  für alle  $x \in \mathbb{R}^m$ . Definiere  $F := G + H$ . Dann ist  $F|_K = g + (f - g) = f$  und es gilt  $|F(x)| \geq |G(x)| - |H(x)| \geq \frac{\delta}{2} - \rho > 0$  nach Definition von  $\rho$ .  $\square$

Außerhalb des Ursprunges existiert auch eine ungerade Fortsetzung.

**Lemma 5.3.3.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  offen, beschränkt und symmetrisch. Sei  $0 \notin \overline{\Omega}$ . Sei  $f \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  ungerade mit  $n > m$ . Dann existiert eine ungerade Fortsetzung  $F \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .*

*Beweis.* Wir führen einen Induktionsbeweis nach  $m$ .

Sei  $m = 1$ . Setze  $\Omega^+ := \{x \in \Omega : x > 0\}$  und  $\Omega^- := -\Omega^+$ .  $\Omega^+$  besteht aus höchstens abzählbar vielen offenen Intervallen  $I_k = (a_k, b_k)$ . Setze  $\rho := \inf_{\partial\Omega} |f| > 0$  ( $\partial\Omega$  ist kompakt). Nochmals aufgrund der Kompaktheit gibt es  $\delta > 0$ , so dass  $|f(x) - f(y)| < \frac{\rho}{2}$  für  $|x - y| \leq \delta$ . Auf allen Intervallen  $I_k$  der Länge  $\leq \delta$  wählen wir  $F$  als affin lineare Fortsetzung von  $F|_{\partial I_k}$ . Dann ist  $F$  auf  $\bigcup_{|I_k| \leq \delta} I_k$  stetig (Übung).

Wegen  $|F(x) - F(a_k)| = |F(x) - f(a_k)| \leq \frac{\rho}{2}$  für  $x \in I_k$  folgt  $|F(x)| \geq |f(a_k)| - \frac{\rho}{2} \geq \frac{\rho}{2}$ . Somit ist  $F$  dort auch nullstellenfrei.

Auf den verbleibenden endlich vielen Intervallen  $I_k$  wählen wir  $F$  als eine beliebige stetige Kurve in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  mit Endpunkten  $f(a_k)$  und  $f(b_k)$ . Wegen  $n \geq 2$  geht dies. Auf  $\Omega^-$  definieren wir  $F(x) := -F(-x)$ . Wegen  $0 \notin \overline{\Omega}$  ist  $F$  stetig.

**Induktionsschritt:** Setze  $\Omega_0 := \{x \in \Omega : x^m = 0\} \subset \mathbb{R}^{m-1}$ . Es ist  $\partial\Omega_0 \subset \partial\Omega$ .  $f|_{\partial\Omega_0} \in C^0(\partial\Omega_0, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  ist ungerade. Somit existiert nach Induktionsannahme eine ungerade Fortsetzung  $F_0 \in C^0(\overline{\Omega_0}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  mit  $F_0|_{\partial\Omega_0} = f|_{\partial\Omega_0}$ . Setze  $\Omega^+ := \{x \in \Omega : x^m \geq 0\}$ . Dann ist  $\partial\Omega^+ = \partial^+\Omega \cup \overline{\Omega_0}$  mit  $\partial^+\Omega := \{x \in \partial\Omega : x^m > 0\}$ . Definiere  $f^+ : \partial\Omega^+ \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  durch

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \partial^+\Omega, \\ F_0(x) & \text{für } x \in \overline{\Omega_0}. \end{cases}$$

Es gilt  $f^+ \in C^0(\partial\Omega^+, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Nach Lemma 5.3.2 existiert eine Funktion  $F^+ \in C^0(\overline{\Omega^+}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  mit  $F^+|_{\partial\Omega^+} = f^+$ . Setze nun

$$F(x) := \begin{cases} F^+(x), & x \in \overline{\Omega^+}, \\ -F^+(-x), & x \in \overline{\Omega^-} \equiv \{x \in \Omega : x^m < 0\}. \end{cases} \quad \square$$

Ist  $m = n$ , so gibt es eine ungerade Fortsetzung, die auf einer Hyperebene keine Nullstellen hat.

**Korollar 5.3.4.** *Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und symmetrisch mit  $0 \notin \overline{\Omega}$  und  $f \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  ungerade, so existiert eine ungerade Fortsetzung  $F \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  von  $f$  mit  $F(x) \neq 0$  für  $x^n = 0$ .*

*Beweis.* Setze  $\Omega_0 := \Omega \cap \{x^n = 0\}$ ,  $\Omega^+ := \Omega \cap \{x^n > 0\}$  und  $\Omega^- := -\Omega^+$ . Nach Lemma 5.3.3 gibt es eine ungerade Abbildung  $F_0 \in C^0(\overline{\Omega_0}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  mit  $F_0|_{\partial\Omega_0} = f|_{\partial\Omega_0}$ . Setze

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x), & x \in \partial\Omega \cap \overline{\Omega^+}, \\ F_0(x), & x \in \overline{\Omega_0}. \end{cases}$$

Nach dem Tietzeschen Fortsetzungssatz gibt es  $F^+ \in C^0(\overline{\Omega^+}, \mathbb{R}^n)$  mit  $F^+|_{\partial\Omega^+} = f^+ = f^+|_{\partial\Omega^+}$ . Die gesuchte Fortsetzung ist dann

$$F(x) := \begin{cases} F^+(x), & x \in \overline{\Omega^+}, \\ -F^+(-x), & x \in \overline{\Omega^-}. \end{cases} \quad \square$$

Nun können wir den Abbildungsgrad für ungerade Abbildungen berechnen.

**Lemma 5.3.5.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und symmetrisch mit  $0 \notin \overline{\Omega}$ . Sei  $f \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  ungerade. Dann ist  $d(f, \Omega, 0) \equiv 0 \pmod{2}$ .*

*Beweis.* Setze  $\Omega^\pm := \Omega \cap \{\pm x^n > 0\}$ . Sei  $F \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  eine ungerade Fortsetzung von  $f$  mit  $F(x) \neq 0$  für  $x \in \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-$ . Sei  $F_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  eine Folge mit  $\sup_\Omega |F_k - F| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Nach Ersetzen von  $F_k$  durch  $\frac{1}{2}(F_k(x) - F_k(-x))$  dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $F_k$  ungerade ist. Für  $k \geq k_0$  ist dann  $F_k(x) \neq 0$  für  $x \in \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-$ . Somit gilt  $d(F, \Omega^\pm, 0) = d(F_k, \Omega^\pm, 0)$ . Mit Hilfe der Ausschneidungseigenschaft und der Additivität des Abbildungsgrades erhalten wir

$$(5.9) \quad d(F_k, \Omega, 0) = d(F_k, \Omega^+, 0) + d(F_k, \Omega^-, 0).$$

Sei  $Z^\pm$  die Zusammenhangskomponente von 0 in  $\mathbb{R}^n \setminus F_k(\partial\Omega^\pm)$ . Wähle  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(0) \subset Z^+ \cap Z^-$  und einen regulären Wert  $z \in B_\varepsilon(0)$  von  $F_k$ . Ein  $x \in \Omega^+$  erfüllt  $F_k(x) = z$  genau dann, wenn  $-x \in \Omega^-$  die Gleichung  $F_k(-x) = -z$  erfüllt. Dies bedeutet, dass  $\Omega^+ \cap F_k^{-1}(z) = -(\Omega^- \cap F_k^{-1}(-z))$  ist. Die Funktion  $F_k$  ist ungerade, also ist  $\frac{\partial F_k}{\partial x^j}$  gerade und somit folgt  $\det dF_k(x) = \det dF_k(-x)$ . Insbesondere ist  $-z$  ein regulärer Wert von  $F_k$ . Es gilt

$$\begin{aligned} d(F, \Omega^+, 0) &= d(F_k, \Omega^+, 0) = d(F_k, \Omega^+, z) \\ &= \sum_{x \in F_k^{-1}(z) \cap \Omega^+} \det dF_k(x) = \sum_{x \in F_k^{-1}(-z) \cap \Omega^-} \det dF_k(x) \\ &= d(F_k, \Omega^-, -z) = d(F_k, \Omega^-, 0) = d(F, \Omega^-, 0). \end{aligned}$$

Benutzen wir nun (5.9), so folgt, dass  $d(F_k, \Omega, 0) = d(F, \Omega, 0)$  gerade ist.  $\square$

**Theorem 5.3.6** (Satz von Borsuk). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und symmetrisch mit  $0 \in \Omega$ . Sei  $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  ungerade und  $0 \notin f(\partial\Omega)$ . Dann ist  $d(f, \Omega, 0)$  ungerade.*

*Beweis.* Wir wollen ohne Einschränkung annehmen dürfen, dass  $f$  glatt ist und  $df(0) \neq 0$  gilt. Dazu approximieren wir  $f$  und addieren  $\delta \cdot \text{id}$  für ein kleines  $\delta > 0$ . Somit gilt

$$d(f, \Omega, 0) = d(f, \Omega \setminus B_\varepsilon(0), 0) + d(f, B_\varepsilon(0), 0)$$

für ein kleines  $\varepsilon > 0$  mit  $0 \notin f(\partial B_\varepsilon(0))$ . Nach Lemma 5.3.5 ist der erste Term auf der rechten Seite gerade. Der zweite Term ist ungerade, da für kleines  $\varepsilon > 0$  genau ein Urbild existiert und 0 ein regulärer Wert ist. Die Behauptung folgt.  $\square$

**Korollar 5.3.7.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und symmetrisch mit  $0 \in \Omega$ . Sei  $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  und gelte  $f(x) \neq 0$  für  $x \in \partial\Omega$ . Ist*

$$\frac{f(x)}{|f(x)|} \neq \frac{f(-x)}{|f(-x)|}$$

*für alle  $x \in \partial\Omega$ , so ist  $d(f, \Omega, 0)$  ungerade.*

*Beweis.* Betrachte die Homotopie

$$\begin{aligned} h(x, t) &= (1-t)f(x) + \frac{t}{2}(f(x) - f(-x)) \\ &= \left(1 - \frac{t}{2}\right)f(x) - \frac{t}{2}f(-x) \end{aligned}$$

zwischen  $f$  und seinem ungeraden Anteil. Dann folgt die Aussage aus dem Satz von Borsuk, Theorem 5.3.6, wenn wir nachweisen können, dass  $h \neq 0$  auf  $\partial\Omega \times [0, 1]$  gilt. Falls dies doch der Fall ist, so erhalten wir für ein solches  $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$  mit  $h(x, t) = 0$  auch  $\frac{t}{2}f(-x) = \left(1 - \frac{t}{2}\right)f(x)$ . Aus  $f(x) \neq 0$  für  $x \in \partial\Omega$  folgt  $0 < t$ . Damit sind  $f(x)$  und  $f(-x)$  aber positive Vielfache voneinander. Widerspruch.  $\square$

Wir erhalten weitere wichtige Korollare. Vergleiche auch [2]. Häufig wird der Satz von Borsuk-Ulam auch nur für  $\Omega = B_1(0)$  formuliert.

**Theorem 5.3.8** (Satz von Borsuk-Ulam). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und symmetrisch mit  $0 \in \Omega$ . Sei  $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig und sei  $m < n$ . Dann gibt es ein  $x \in \partial\Omega$  mit  $f(x) = f(-x)$ .*

*Beweis.* Sei  $f$  ohne Einschränkung nach  $\bar{\Omega}$  fortgesetzt. Vermöge  $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$  können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$  ist.

Definiere  $g(x) := f(x) - f(-x)$ . Dann ist  $g$  ungerade. Wir dürfen annehmen, dass  $g(x) \neq 0$  auf dem Rand gilt, denn sonst sind wir fertig. Nach dem Satz von Borsuk ist dann aber  $0 \neq d(g, \Omega, 0) = d(g, \Omega, y)$  für alle  $y \in B_\varepsilon(0)$  für  $\varepsilon > 0$  klein genug. Somit ist  $B_\varepsilon^n(0) \subset g(\bar{\Omega}) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ . Dies ist aus Dimensionsgründen unmöglich.  $\square$

Wir können die Gebietsinvarianz für stetige Funktionen folgern.

**Theorem 5.3.9** (Satz von der Gebietsinvarianz). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und lokal injektiv (d. h. für jeden Punkt  $x \in \Omega$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $f|_{B_\varepsilon(x)}$  injektiv ist). Dann ist  $f$  eine offene Abbildung. Insbesondere ist  $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$  offen.*

*Beweis.* Sei ohne Einschränkung  $0 \in \Omega$  und  $f(0) = 0$ . Wir wollen zeigen, dass für jedes  $r > 0$  eine Kugel um  $0 = f(0)$  existiert, die in  $f(B_r(0))$  enthalten ist. Sei  $r > 0$ , so dass  $f|_{\overline{B_r(0)}}$  injektiv ist. Betrachte

$$h(x, t) := f\left(\frac{1}{1+t}x\right) - f\left(-\frac{t}{1+t}x\right) \quad \text{für } (x, t) \in \overline{B_r(0)} \times [0, 1].$$

$h$  ist stetig und es gilt  $h(\cdot, 0) = f$  sowie  $h(x, 1) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(-\frac{x}{2}\right)$ . Somit ist  $h(\cdot, 1)$  ungerade. Es gilt  $h(x, t) \neq 0$  für  $(x, t) \in \partial B_r(0) \times [0, 1]$ , da dies aufgrund der Injektivität von  $f$  nur für  $(x, t)$  mit  $\frac{x}{1+t} = -\frac{xt}{1+t}$ , also für  $0 = x \notin \partial B_r(0)$  möglich ist. Aufgrund der Homotopieinvarianz erhalten wir daher aus dem Satz von Borsuk

$$0 \neq d(h(\cdot, 1), B_r(0), 0) = d(f, B_r(0), y)$$

für alle  $y \in B_\delta(0)$  für ein geeignetes  $\delta > 0$ . Also ist  $B_\delta(0) \subset f(B_r(0))$ . Die Behauptung folgt.  $\square$

Unter Homöomorphismen ist die Dimension invariant. (Somit ist auch die Dimension einer  $C^0$ -Mannigfaltigkeit wohldefiniert.)

**Korollar 5.3.10.** *Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  nichtleere offene Mengen. Sei  $f: U \rightarrow V$  ein (lokaler) Homöomorphismus. Dann gilt  $m = n$ .*

*Beweis.* Im Falle  $m < n$  wenden wir Theorem 5.3.9, den Satz von der Gebietsinvarianz, auf  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$  an.  $\square$

Als letztes Korollar erhalten wir einen Satz, dessen Autoren in unterschiedlichen Schreibweisen auftreten.

**Theorem 5.3.11** (Satz von Ljusternik-Schnirelman). *Sei  $\mathbb{S}^{n-1} = \bigcup_{j=1}^m A_j$ ,  $m \leq n$ , wobei  $A_j$  abgeschlossene Mengen sind. Dann enthält wenigstens eine der Mengen  $A_j$  ein Antipodenpaar.*

*Beweis.*  $\{x, -x\} \in A_j$  ist äquivalent zu  $x \in A_j \cap (-A_j)$ . Nehme also an, dass  $A_j \cap (-A_j) = \emptyset$  für  $j = 1, \dots, m-1$  ist. Dann existieren stetige Abbildungen  $f_j: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow [0, 1]$  mit  $f_j|_{A_j} = 0$  und  $f_j|_{-A_j} = 1$  für  $j = 1, \dots, m-1$ . Setze  $f := (f_1, \dots, f_{m-1})$ . Nach dem Satz von Borsuk-Ulam existiert daher ein  $\bar{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$  mit  $f_j(\bar{x}) = f_j(-\bar{x})$  für  $j = 1, \dots, m-1$ . Also ist  $\bar{x} \notin A_j \cup (-A_j)$ . Aufgrund der Überdeckungseigenschaft und durch Betrachtung von  $-\bar{x}$  erhalten wir  $\bar{x} \in A_m \cap (-A_m)$  oder, äquivalent dazu,  $\{\bar{x}, -\bar{x}\} \subset A_m$ .  $\square$

## LITERATUR

1. Martin Aigner and Günter M. Ziegler, *Proofs from The Book*, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Including illustrations by Karl H. Hofmann, Corrected reprint of the 1998 original.
2. Klaus Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
3. Jean Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York, 1969, Enlarged and corrected printing, Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-I.
4. Marco Gualtieri, *Topology I: smooth manifolds*, 2018, Lecture Notes, <https://www.math.toronto.edu/mgualt/>.
5. Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/>.
6. Friedrich Tomi, *Nichtlineare Funktionalanalysis*, 1997, Lecture Notes.

OLIVER C. SCHNÜRER, MATHEMATIK, UNIVERSITÄT KONSTANZ  
Email address: [Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de](mailto:Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de)