Übungsblatt 3 zur Algebra

im Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 1: Sei H eine Untergruppe der Gruppe G. Zu $a \in G$ nennt man

$$aH := \{ab \mid b \in H\} \qquad \text{und} \qquad Ha := \{ba \mid b \in H\}$$

die zugehörige Links- bzw. Rechtsnebenklasse von a bezüglich H.

(i) Geben Sie zu $a, b \in G$ jeweils eine Bijektion zwischen aH und bH, zwischen aH und Hb und zwischen Ha und Hb an.

(ii) Zeigen Sie, daß die Mengen

$$G/H := \{aH \mid a \in G\} \qquad \text{und} \qquad H\backslash G := \{Ha \mid a \in G\}$$

dieser Links- bzw. Rechtsnebenklassen jeweils Zerlegungen von G sind, d.h. ihre Elemente sind jeweils paarweise disjunkte nichtleere Mengen, deren Vereinigung G ist. (Mit $H\backslash G$ ist hier natürlich nicht die mengentheoretische Differenz $H \setminus G = \emptyset$ gemeint.)

(iii) Geben Sie eine Bijektion zwischen G/H und $H\backslash G$ an.

Der *Index* $[G : H]$ von H in G wird als Mächtigkeit von G/H bzw. von $H\backslash G$ definiert.

Aufgabe 2: Sei N eine Untergruppe von G vom Index 2. Zeigen Sie $N \lhd G$ und $G/N \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Bleibt dies richtig, wenn man die Zahl 2 durch die Zahl 3 ersetzt?

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die *Ordnung* (d.h. die Mächtigkeit oder Kardinalität) der Gruppen $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$. Ist $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ isomorph zur Gruppe S_4?

Aufgabe 4: Sei G ein endliches Monoid (also eine endliche Menge mit einer assoziativen Verknüpfung, die ein neutrales Element besitzt), in der die beiden Kürzungsregeln gelten, d.h. für alle $a, b, c \in G$

$$ab = ac \implies b = c \qquad \text{und} \qquad ba = ca \implies b = c.$$

Zeigen Sie, daß G eine Gruppe ist.

Abgabe bis Montag, den 8. November vor der Vorlesung. Bitte die Nummer der Übungsgruppe oben rechts auf die erste Seite schreiben!

Merkblatt zum Scheinerwerb

Es werden zwei Klausuren geschrieben (Anfang Dezember und gegen Ende des Semesters). In beiden Klausuren wird es etwa gleichviel Punkte vergeben. Sofern keine triftige Entschuldigung gibt (Krankheit etc.), müßen zum Scheinerwerb beide Klausuren mitgeschrieben werden und die Summe der jeweils erreichten Punktzahlen eine bestimmte (vorher nicht festgelegte) Punktzahl überschreiten.

Zur zweiten Klausur wird aber nur zugelassen, wer regelmäßig selbstständig erstellte (dumme oder gescheite) Lösungen zu den Übungsaufgaben abgibt und an den Übungen *aktiv* (dumme oder gescheite Fragen stellen, Vorrechnen) teilnimmt. Über die Teilnahme zur zweiten Klausur (und damit über die Grundvoraussetzung zum Scheinerwerb) entscheidet der jeweilige Übungsleiter.

Es wird keine Nachklausur geschrieben. Wer eine Klausur nicht mitschreiben kann (und durch das Mitschreiben theoretisch den Schein erwerben hätte können) wird gegen Ende des Semesters zu einer mündlichen Prüfung herangezogen, in der über die Vergabe des Scheins entschieden wird.

Die Scheine werden nicht benotet.

Die meisten Klausuraufgaben hängen thematisch eng mit Übungsaufgaben zusammen oder sind sogar (eventuell stark vereinfachte) Versionen von Übungsaufgaben. Der einzige Weg die Klausur zu bestehen ist somit das regelmäßige selbstständige Bearbeiten von Übungsaufgaben. Beachten Sie, daß dies überdies natürlich der einzige Weg ist, Mathematik zu lernen.

Die geplante Bearbeitungszeit ist für jede der beiden Klausuren 90 Minuten. Zu den Klausuren sind keine Hilfsmittel zugelassen außer einem (eventuell) beidseitig von Hand beschriebenen „Spickzettel“ im Format DIN A4.

Am 17. und 18. November wird in den Übungen eine 45-minütige Testklausur angeboten, die (sofern überhaupt korrigiert) auf keine Weise in die Wertung miteingeht.

Faustregel: Versuchen Sie nicht, den Schein zu erwerben, sondern Mathematik zu lernen. Dann werden Sie in aller Regel den Schein erwerben.