Übungsblatt 2 zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2005/2006

Aufgabe 1: Es seien $x = (-2, 1, 2)$, $y = (1, 2, 1)$ und $z = (2, 1, 1)$ Punkte des $\mathbb{R}^3$ und $\lambda = -5 \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Berechnen Sie

(a)	$x - \lambda y + z$	(e)	$\langle x + \lambda z, y\rangle$
(b)	$\langle x, y\rangle$	(f)	$\|x\|$
(c)	$\langle z, y\rangle$	(g)	$\frac{x}{\|x\|}$
(d)	$d(y, z)$	(h)	$\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Menge aller natürlichen Zahlen n, für die folgende Aussage wahr ist: Für alle $v, y \in \mathbb{R}^n$ und für alle $w, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$(v \perp w \text{ und } w \perp x \text{ und } x \perp y) \implies v \perp y.$$

Hinweis: Natürlich dürfen Sie Ihre geometrische Intuition verwenden, um auf die richtige Lösung zu kommen. In der Lösung sollten Sie allerdings strengstens darauf achten, neben logischen Schlüssen nur die in der Vorlesung gegebene Definition vom Senkrechtstehen zweier Vektoren zu benutzen, welche lautet: Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt gleich null ist. In Zeichen: $x \perp y \iff \langle x, y\rangle = 0$.

Aufgabe 3: Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* $f_0, f_1, f_2, \ldots$ ist rekursiv definiert durch $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$. Sie lautet also $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$ und so weiter. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion nach n, daß die Beziehung

$$f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$$

für alle $n \geq 1$ gilt.

Aufgabe 4: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ Vektoren. Es stehe y senkrecht auf jedem Vektor $z \in \mathbb{R}^n$ mit $x \perp z$. Zeigen Sie, daß y ein skalares Vielfaches von x ist (d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $y = \lambda x$).

Hinweis: Um alle Mißverständnisse auszuschließen, schildern wir hier noch einmal das Problem: Natürlich steht jeder feste Vektor senkrecht auf allen Vektoren, die auf ihm senkrecht stehen. Auch ein skalares Vielfaches dieses festen Vektors steht dann natürlich senkrecht auf all diesen Vektoren. Hier soll aber gezeigt werden, daß **nur** die skalaren Vielfachen diese Eigenschaft haben. Es soll dabei nichts verwendet werden, was in der Vorlesung noch nicht dran war, also zum Beispiel keine Dimensionsargumente und so weiter. Natürlich können Sie ihre geometrische Vorstellung im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ benutzen, um auf die Beweisidee zu kommen. Der Beweis sollte allerdings formal sein und nicht an die Anschauung appellieren.

Abgabe bis Freitag, den 4. November, vor Beginn der Vorlesung.

Irregulärer Übungsbetrieb in der Woche vom 31.10.—6.11.2005:
`http://www.math.uni-konstanz.de/~schweigh/lehre/`