Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungsblatt 3 zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2005/2006

Aufgabe 1: Rechnen Sie mit komplexen Zahlen:

(a) Zeigen Sie $\left(\frac{3}{2}+2i\right)^2 = 3\left(\frac{3}{2}+2i\right) - \frac{25}{4}$.

(b) Es sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen rekursiv definiert durch $a_0 := 1$, $a_1 := 2$ und

$$a_n := 3a_{n-1} - \frac{25}{4}a_{n-2}$$

für $n \geq 2$. Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ gilt

$$a_n = \operatorname{Re}\left(\left(1 - \frac{1}{4}i\right)\left(\frac{3}{2}+2i\right)^n\right),$$

wobei i für die imaginäre Einheit und Re für den Realteil steht.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie

(a) alle komplexen Zahlen, die konjugiert zu ihrem Quadrat sind,

(b) alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| - z = 1 + 2i$,

(c) alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 + 3z + 3 = 0$.

Hinweis: Bei Aufgabe (c) dürfen Sie nicht etwa die Lösungsformel für komplexe quadratische Gleichungen benutzen. Diese setzt ja schon voraus, daß jede komplexe Zahl eine Wurzel besitzt, was in der Vorlesung noch nicht bewiesen wurde. Benutzen dürfen Sie allerdings, daß es zu jeder reellen Zahl $a > 0$ genau zwei reelle Zahlen b gibt mit $b^2 = a$, nämlich $\sqrt{a} > 0$ und $-\sqrt{a}$. Dies wurde schon oder wird bald in der Analysis bewiesen.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, daß die Diagonalen eines Vierecks genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn beim Addieren der Quadrate der Längen gegenüberliegender Seiten jeweils dasselbe herauskommt.

Aufgabe 4: Eine Gleichung der Form

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = 0 \qquad (*)$$

in den Unbekannten X_i mit Koeffizienten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ nennt man eine homogene lineare Gleichung. Wir sprechen davon, daß ein n-Tupel $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $(*)$ erfüllt, wenn

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = 0$$

gilt. Zeigen Sie: Wenn zwei n-Tupel $u, v \in \mathbb{R}^n$ genau dieselben homogenen linearen Gleichungen erfüllen, dann sind sie linear abhängig.

Hinweis: Wenn wir sagen, daß u und v genau dieselben homogenen Gleichungen erfüllen, meinen wir damit folgendes: Wenn u eine homogene Gleichung der Form (*) löst, so löst v dieselbe homogene Gleichung, und umgekehrt.

Abgabe bis Freitag, den 11. November, vor Beginn der Vorlesung.