Übungsblatt 11 zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2005/2006

Aufgabe 1: Betrachten Sie die Basen

$$\mathfrak{v} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathfrak{w} := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Matrix, die den Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{w}$ vermittelt, also die 2×2–Matrix $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: Sei V ein K-Vektorraum mit Unterräumen $U_1, \ldots, U_m$. Läßt sich jeder Vektor $v \in V$ auf genau eine Weise als Summe von Vektoren aus $U_1, \ldots, U_m$ schreiben (d.h. zu jedem $v \in V$ gibt es genau ein $(u_1, \ldots, u_m) \in U_1 \times \cdots \times U_m$ mit $v = u_1 + \cdots + u_m$), so sagt man V ist die *direkte Summe* von $U_1, \ldots, U_m$ und schreibt

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m.$$

Zeigen Sie:

(a) Sind $v_1, \ldots, v_n \in V \setminus \{0\}$, so bilden $v_1, \ldots, v_n$ genau dann eine Basis von V, wenn $V = Kv_1 \oplus \cdots \oplus Kv_n$.

(b) Ist $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$, so ist V endlich erzeugt genau dann, wenn jedes U_i endlich erzeugt ist, und in diesem Fall gilt

$$\dim V = \dim U_1 + \cdots + \dim U_m.$$

Aufgabe 4: Sei K ein Körper, t eine Unbestimmte, $K[t]$ der Ring der Polynome in t mit Koeffizienten aus K. Zeigen Sie:

(a) Ist $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ eine Matrix mit Einträgen $b_{ij} \in K[t]$ vom Grad ≤ 1 (das Nullpolynom habe in diesem Zusammenhang den Grad $-\infty$, so daß auch $b_{ij} = 0$ erlaubt ist), so ist $\det B \in K[t]$ ein Polynom vom Grad $\le n$.

(b) Ist $A \in M_K(n, n)$, so gibt es $c_1, \ldots, c_{n-1} \in K$ mit

$$\det(A - tI) = \det(A) + c_1 t + \cdots + c_{n-1} t^{n-1} + (-1)^n t^n.$$

Abgabe bis Freitag, den 27. Januar, vor Beginn der Vorlesung.