Übungsblatt 12 zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2005/2006

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(f)$ der folgenden Endomorphismen f des $\mathbb{R}^2$ bezüglich einer Basis $\mathfrak{v}$, die Sie sich aussuchen dürfen. Rechnen Sie jeweils die Eigenwerte, die zugehörigen Eigenräume, die Determinante und das charakteristische Polynom der Endomorphismen aus. Interpretieren Sie mit Worten in jedem einzelnen Fall die Aussage des Satzes von Hamilton–Cayley geometrisch.

(a) Drehung am Ursprung (=Nullpunkt) um $\frac{\pi}{2}$ im Uhrzeigersinn.
(b) Punktspiegelung am Ursprung.
(c) Orthogonale Projektion auf eine Gerade: Betrachte die durch den Ursprung und den Punkt (π, e) gehende Gerade $g \subseteq \mathbb{R}^2$ (π die Kreiszahl und e die Eulersche Zahl). Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ werde auf denjenigen Punkt $y \in g$ abgebildet, für den $\|x - y\|$ so klein wie möglich wird.
(d) Der erste kanonische Einheitsvektor werde um den Faktor 2, der zweite um den Faktor 3 gestreckt.

Hinweis: Eine in Worten ausgedrückte geometrische Interpretation der Aussage des Satzes von Hamilton–Cayley bei (a) könnte zum Beispiel wie folgt lauten: Addiert man einen Vektor in der Ebene zu dem Vektor, der aus ihm durch zweimaliges Drehen um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ hervorgeht, so erhält man den Nullvektor.

Aufgabe 2: Es sei K ein Körper. Bezeichne $\mathfrak{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis des K^n, und es seien $\mathfrak{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathfrak{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ zwei weitere Basen des K^n. Es sei V (bzw. W) die $n \times n$-Matrix, deren i-te Spalte v_i (bzw. w_i) ist. Zeigen Sie:

(a) V vermittelt den Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{e}$, d.h. $V = M_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{v}}(\mathrm{id})$.
(b) $W^{-1}V$ vermittelt den Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{w}$.

Aufgabe 3: Seien $\mathfrak{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathfrak{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ zwei Basen des K–Vektorraums V. Es sei ein Endomorphismus f des Vektorraums V gegeben durch $f(w_i) = v_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Begründen Sie, daß $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\mathrm{id}_V) = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{w}}(f)$ gilt.

Aufgabe 4: Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Anleitung: Diagonalisieren Sie die Matrix zuerst.

Abgabe bis Freitag, den 3. Februar, vor Beginn der Vorlesung.