

**Lösungsvorschlag zur Aufgabe 1:** (a) f, (b) w, (c) f, (d) w, (e) w,  
(f) w, (g) f, (h) w, (i) f, (j) w

**Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2:** Wegen  $v_4 \in \text{Span}(v_1, v_2, v_3)$ , können wir  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$  finden mit

$$v_4 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3.$$

Wäre  $\lambda_1 = 0$ , so hätte man also die nichttriviale Linearkombination

$$\lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + (-1)v_4 = 0$$

der Null, was der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit von  $v_2, v_3, v_4$  widerspräche.

Also muß  $\lambda_1 \neq 0$  gelten. Damit ist aber  $\lambda_1$  invertierbar und es gilt

$$v_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) v_2 + \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right) v_3 + \frac{1}{\lambda_1} v_4,$$

also  $v_4 \in \text{Span}(v_1, v_2, v_3)$ .

**Lösungsvorschlag zur Aufgabe 3:** Zu Teil (a). Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z = \overline{-z}$ . Schreibt man  $z = x+yi$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ , so erhält man  $x+yi = -x+yi$ , also  $x = -x$ , d.h.  $x = 0$ . Also ist  $z = yi$  eine rein imaginäre Zahl, d.h.  $z \in \mathbb{R}i$ .

Sei umgekehrt  $z$  eine rein imaginäre Zahl, also  $z = yi$  für ein  $y \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $z = yi = \overline{y-i} = \overline{y-i} = \overline{-yi}$ .

Insgesamt sieht man also, daß die gesuchten komplexen Zahlen genau die rein imaginären Zahlen sind.

Zu Teil (b). Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| - z = 1$ . Dann ist  $z = |z| - 1$  sogar eine reelle Zahl. Es muß dann eine negative reelle Zahl sein, denn sonst gälte  $|z| = z$  und somit  $z = z - 1$ , was absurd ist. Da also  $z$  negativ ist, gilt  $|z| = -z$ , also  $z = -z - 1$ , d.h.  $z = -\frac{1}{2}$ .

Umgekehrt gilt

$$\left|-\frac{1}{2}\right| - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Insgesamt sehen wir also, daß  $\frac{1}{2}$  eine und die einzige komplexe Zahl ist, die den gesuchten Anforderungen entspricht.

**Lösungsvorschlag zur Aufgabe 4:** Wir behaupten, daß die  $n - 1$  Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von  $v^\perp$  bilden.

Wir zeigen zunächst, daß diese Vektoren linear unabhängig sind. Seien hierzu  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in K$  mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Durch Ausrechnen der linken Seite folgt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ \vdots \\ -\lambda_{n-2} \\ -\lambda_{n-1} \end{pmatrix} = 0,$$

insbesondere  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ .

Somit spannen obige  $n - 1$  Vektoren einen Untervektorraum  $W$  des  $K^n$  der Dimension  $n - 1$  auf. Da die  $n - 1$  Vektoren offensichtlich alle in  $v^\perp$  liegen, gilt  $W \subseteq v^\perp$ . Es reicht nun zu zeigen, daß  $v^\perp$  ebenfalls ein Vektorraum der Dimension  $n - 1$  ist, denn dann folgt aus Dimensionsgründen Gleichheit. Nun sieht man aber sehr leicht, daß für den eindimensionalen Unterraum  $U := Kv = \text{Span}(v)$  von  $K^n$  gilt

$$U^\perp := \{w \in K^n \mid u \bullet w \text{ für alle } u \in U\} = v^\perp.$$

Nach der Vorlesung gilt  $\dim U^\perp = n - \dim U = n - 1$ , also  $\dim v^\perp = n - 1$ . Damit ist alles bewiesen.

**Lösungsvorschlag zur Aufgabe 5:** Zu Teil (a). Wir behaupten, daß für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies zeigen wir durch Induktion nach  $n \in \mathbb{N}$ . Im Induktionsanfang  $n = 0$  ist nichts zu zeigen, da die 0-te Potenz per Definition das neutrale Element der Multiplikation, also die Einheitsmatrix, ist (damit die Potenzgesetze stimmen). Im Induktionsschritt von  $n - 1$  nach  $n$  setzen wir jetzt voraus, daß  $n \geq 1$  und unsere Behauptung schon für  $n - 1$  statt  $n$  gezeigt wurde. Dann gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} && \text{(Potenzgesetze)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2(n-1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} && \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} && \text{(Matrizenprodukt)}. \end{aligned}$$

Damit ist auch die Behauptung für  $n$  richtig, was die Induktion beendet.

Zu Teil (b). Nach Definition des Matrizenprodukts und des Körpers der komplexen Zahlen erhält man als Ergebnis

$$\begin{pmatrix} 1 - i - i^2 & 0 \\ 2 - 2i - i & 0 \\ i - i^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - i & 0 \\ 2 - 3i & 0 \\ 1 + i & 0 \end{pmatrix}.$$

**Lösungsvorschlag zur Aufgabe 6:** Die gegebenen Vektoren sind linear abhängig genau dann, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nicht vollen Rang (also einen Rang kleiner als 3) hat. Wir berechnen den Rang dieser Matrix, indem wir sie in eine Stufenform überführen. Dazu addieren wir die erste Zeile zur zweiten und das 4-fache der ersten Zeile zur dritten und erhalten

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nun multiplizieren wir die letzte Zeile mit 2 und ziehen das 9-fache der zweiten Zeile ab. Wir erhalten dann

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine Matrix mit drei Stufen. Sie hat also den Rang drei, womit die ursprünglich gegebenen Vektoren linear unabhängig sind, also nicht linear abhängig.

**Lösungsvorschlag zur Aufgabe 7:** Seien  $\lambda \in K$  und  $v, v_1, v_2 \in V$ .

Es ist zu zeigen, daß

(a)  $(f + g)(v_1 + v_2) = (f + g)(v_1) + (f + g)(v_2)$  und

(b)  $(f + g)(\lambda v) = \lambda((f + g)(v))$ .

Wir rechnen zuerst (a) nach:

$$\begin{aligned}(f + g)(v_1 + v_2) &= f(v_1 + v_2) + g(v_1 + v_2) && \text{(Def. von } f + g) \\ &= f(v_1) + f(v_2) + g(v_1) + g(v_2) && \text{(Lin. von } f \text{ und } g) \\ &= f(v_1) + g(v_1) + f(v_2) + g(v_2) && \text{(Vektorraumgesetze)} \\ &= (f + g)(v_1) + (f + g)(v_2) && \text{(Def. von } f + g)\end{aligned}$$

Schließlich rechnen wir (b) nach:

$$\begin{aligned}(f + g)(\lambda v) &= f(\lambda v) + g(\lambda v) && \text{(nach Definition von } f + g) \\ &= \lambda f(v) + \lambda g(v) && \text{(wegen der Linearität von } f \text{ und } g) \\ &= \lambda(f(v) + g(v)) && \text{(Vektorraumgesetze)} \\ &= \lambda((f + g)(v)) && \text{(nach Definition von } f + g)\end{aligned}$$