Lösungsvorschlag zur Aufgabe 1: (a) w, (b) f, (c) w, (d) f, (e) f, (f) f, (g) w, (h) w, (i) f, (j) w

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2: Aussage (a) ist richtig, denn es gilt $h(0) = h(0+0) = h(0) + h(0)$, woraus sich durch Subtraktion von $h(0)$ auf beiden Seiten ergibt $0 = h(0)$. Aussage (b) ist hingegen falsch, denn

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 0$$

erfüllt offensichtlich die geforderte Eigenschaft, aber es gilt $h(0) = 0 \neq 1$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 3: Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $z = (\overline{z} + z)^2$. Es gilt offensichtlich $x := \overline{z} + z \in \mathbb{R}$, also auch $z = x^2 \in \mathbb{R}$. Damit gilt aber $\overline{z} = z$, also $z = (2z)^2 = 4z^2$. Hieraus folgt nun $z = 0$ oder $1 = 4z$, also $z = 0$ oder $z = \frac{1}{4}$. Hiermit ist gezeigt, daß höchstens 0 und $\frac{1}{4}$ die fragliche Eigenschaft haben.

Umgekehrt hat sicher 0 diese Eigenschaft, aber auch $\frac{1}{4}$, denn es gilt

$$\left(\overline{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Damit ist insgesamt gezeigt, daß es sich bei den fraglichen komplexen Zahlen genau um 0 und $\frac{1}{4}$ handelt.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 4: Wir behaupten, daß die gegebenen Vektoren linear unabhängig sind. Um dies nachzuweisen, seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Es reicht zu zeigen, daß $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Liest man diese Gleichung komponentenweise, so erhält man vier Gleichungen, von denen die dritte $\gamma = 0$ lautet. Unter Beachtung von $\gamma = 0$ lauten die erste und die letzte Gleichung $-\alpha+\beta = \alpha+\beta = 0$. Durch Addieren und Subtrahieren dieser beiden Gleichungen erhält man $2\alpha = 2\beta = 0$, also $\alpha = \beta = 0$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 5: Durch Quadrieren der Voraussetzung $\|x\| = \|y\|$ erhält man $\langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle$. Man erhält mit den

Eigenschaften des Skalarprodukts auf dem $\mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned}
\langle x-y, x+y\rangle &= \langle x, x+y\rangle - \langle y, x+y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle - \langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle - \overline{\langle x, y\rangle} - \langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, y\rangle \qquad (\text{da } \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}) \\
&= \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle = 0,
\end{aligned}$$

also $x \perp y$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 6: U ist der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems, welches durch folgende Matrix beschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir bringen nun die Matrix auf eine besonders schöne Zeilenstufenform, an der man den Lösungsraum direkt ablesen kann. Beachte, daß die Operationen, von denen wir teilweise gleich mehrere in einem Schritt ausführen, den Lösungsraum nicht ändern. Ziehe das 3-fache (bzw. 4-fache) der 3. Zeile von der 1. Zeile (bzw. 2-ten Zeile) ab und vertausche 1. und 3. Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Nach Abziehen der zweiten von der vierten Zeile sind die beiden letzten Zeilen bis auf das Vorzeichen gleich, so daß wir die letzte Zeile weglassen können:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Addiere nun die letzte Zeile zur zweiten und teile sie dann durch 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{5} \end{pmatrix}$$

Teile die zweite Zeile durch -3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{5} \end{pmatrix}$$

Subtrahieren der zweiten und der dritten Zeile von der ersten liefert wegen $-1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{13}{15}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{5} \end{pmatrix}$$

Daran läßt sich der Lösungsraum U explizit ablesen:

$$U = \left\{ \left(\frac{13}{15}\lambda, -\frac{2}{3}\lambda, \frac{4}{5}\lambda, \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R}. \right\} = \{\lambda(13, -10, 12, 15) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Also hat U die einelementige Basis $(13, -10, 12, 15)$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 7: Zu (a): U_1 ist in der Tat ein Untervektorraum von V. Um dies nachzuweisen, müßen wir folgendes zeigen:

(1) $0 \in U_1$
(2) Ist $f, g \in U_1$, so ist $f + g \in U_1$.
(3) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in U_1$, so ist $\lambda f \in U_1$.

(1) ist trivial, da $0 \in V$ die Nullfunktion f ist, für die gilt $f(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, insbesondere $f(2n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Um (2) zu zeigen, seien $f, g \in U_1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$(f + g)(2n) = f(2n) + g(2n) = 0 + 0 = 0,$$

wobei die erste Gleichheit nach Definition von $f + g$ gilt. Dies zeigt $f + g \in U_1$.

Um (3) zu zeigen, seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in U_1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$(\lambda f)(2n) = \lambda(f(2n)) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

wobei die erste Gleichheit nach Definition von λf gilt. Dies zeigt $\alpha f \in U_1$.

Zu (b): Wir behaupten, daß U_2 kein Untervektorraum von V ist. Dies folgt daraus, daß die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = 17$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (die konstante Funktion 17) in U_2 liegt, aber $2f$ nicht, denn

$$|(2f)(3217)| = |2(f(3217))| = |34| = 34 \not\leq 17.$$