

Übungsblatt 4 zur Reellen Algebra (B IV)

Sommersemester 2005

Aufgabe 1: Sei K ein Körper, Γ eine angeordnete abelsche Gruppe und die Menge $\Gamma \cup \{\infty\}$ linear geordnet durch $\gamma < \infty$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Eine Abbildung $v : K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ heißt *Bewertung* des Körpers K , wenn folgende Axiome gelten:

- (a) $v(0) = \infty$,
- (b) $v(ab) = v(a) + v(b)$ für alle $a, b \in K^\times$, und
- (c) $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ für alle $a, b \in K$.

Ist zusätzlich $v(K^\times) = \Gamma$ (d.h., $v : K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$), so heißt Γ die *Wertegruppe* von v . Sei $v : K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ eine Bewertung von K . Zeigen Sie:

- (1) Sind $a, b \in K$ mit $v(a) \neq v(b)$, so gilt

$$v(a + b) = \min\{v(a), v(b)\}.$$
- (2) Es ist $\mathcal{O}_v := \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$ ein Bewertungsring von K mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_v := \{a \in K \mid v(a) > 0\}$.

Aufgabe 2: Sei \mathcal{O} ein Bewertungsring des Körpers K , und bezeichne \mathfrak{m} sein eindeutig bestimmtes maximales Ideal. Zeigen Sie, daß $\Gamma_{\mathcal{O}} := \Gamma := K^\times / \mathcal{O}^\times$ vermöge

$$a\mathcal{O}^\times \leq b\mathcal{O}^\times : \iff ba^{-1} \in \mathcal{O} \quad (a, b \in K^\times)$$

zu einer angeordneten abelschen Gruppe wird. Zeigen Sie, daß

$$v_{\mathcal{O}} := v : K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\} : a \mapsto \begin{cases} \infty & \text{falls } a = 0 \\ a\mathcal{O}^\times & \text{falls } a \neq 0 \end{cases}$$

eine Bewertung von K ist mit

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \{a \in K \mid v(a) \geq 0\} & \text{und} \\ \mathfrak{m} &= \{a \in K \mid v(a) > 0\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Sei $v : K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ eine Bewertung mit zugehörigem Bewertungsring $\mathcal{O} := \mathcal{O}_v$. Zeigen Sie, daß durch

$$K^\times / \mathcal{O}^\times \rightarrow \Gamma : a\mathcal{O}^\times \mapsto v(a)$$

ein Isomorphismus der Wertegruppen von $v_{\mathcal{O}}$ und v definiert wird.

Abgabe bis Donnerstag, den 12. Mai, vor der Vorlesung.