Übungsblatt 4 zur Algebra

Wintersemester 2006/2007

Aufgabe 1: Zeigen Sie, daß die Diedergruppe D_n $(n \geq 3)$ auflösbar ist.

Aufgabe 2: Die endliche Gruppe G wirke auf der endlichen Menge X (das heißt, es liege eine Gruppenoperation $G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto gx$ vor). Für jedes $g \in G$ bezeichne $F(g)$ die Anzahl der *Fixpunkte* von g (also die Anzahl der $x \in X$ mit $gx = x$). Man zeige, daß der Mittelwert der $F(g)$ mit der Anzahl s der Bahnen übereinstimmt:

$$s = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} F(g).$$

Hinweis: Zählen Sie die Paare $(g, x) \in G \times X$ mit $gx = x$ auf zwei verschiedene Weisen. Schauen Sie noch einmal den Beweis der Bahnengleichung an.

Aufgabe 3: Sei G eine endliche Gruppe, H eine Untergruppe von G und G die Vereinigung aller zu H konjugierten Untergruppen:

$$G = \bigcup_{a \in G} aHa^{-1}.$$

Zeigen Sie $G = H$.

Hinweis: Wenden Sie die vorherige Aufgabe an auf die Gruppenwirkung von G durch Konjugation auf der Menge der zu H in G konjugierten Untergruppen.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung $2^n 3$ einen Normalteiler vom Index 2 oder 3 besitzt.

Abgabe bis Freitag, den 17. November, bis 12 Uhr.