Universität Konstanz | Fachbereich Mathematik und Statistik
Klausur zur Algebra | 10. Februar 2007

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 | **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R611, rechts hinten)

Bevor die Klausur eröffnet wird (mit der Bearbeitung begonnen wird):

Lassen Sie die Klausur vor sich liegen. Sie dürfen die Aufgaben erst lesen, wenn das Signal dazu gegeben wird. Legen Sie Ihren Studenten- oder Personalausweis neben sich. Prüfen Sie, ob Sie auf Ihrem Platz sitzen, also ob auf diesem Deckblatt Ihr Name steht. Wenn Ihr Name falsch geschrieben ist oder die Matrikelnummer nicht stimmt, korrigieren Sie dies bitte sofort auf dieser Seite des Deckblattes. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind

- ein von Hand beschriebenes Blatt (Benutzung der Rückseite erlaubt) im Format DIN A4 (210mm x 297mm) oder kleiner,
- konventionelles Schreibzeug,
- nicht beschriebenes Schmierpapier und
- eine Uhr (ohne eingebaute Kommunikationsgeräte).

Legen Sie außer diesen Sachen und Ihrem Ausweis nichts auf den Tisch (außer Taschentücher etc.). Wenn Sie Fragen haben, zögern Sie nicht, diese an das Aufsichtspersonal zu stellen.

Nachdem die Klausur eröffnet wird:

Prüfen Sie sofort, ob Sie alle **8 Aufgaben** erhalten haben. Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Ihr Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen. Schmierblätter können nur auf Antrag in Härtefällen abgegeben und berücksichtigt werden. Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Es darf dabei auf mathematische Ergebnisse, die bis jetzt in der Vorlesung behandelt wurden, verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Hilbertscher Basissatz“, „Satz von Sylow“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Auch Tatsachen aus der Linearen Algebra und der Analysis dürfen selbstverständlich verwendet werden.
- Ergebnisse aus den Übungen dürfen (wegen der Anlehnung der Klausuraufgaben an Übungsaufgaben) **nicht** verwendet werden (außer wenn man sie noch einmal herleitet).

Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 160 Minuten.
Die maximal zu erreichende Punktzahl ist 72.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R611, rechts hinten) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 1 (10 Punkte): Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

Schreiben Sie neben die Aussagen ein „w“ für „wahr“ oder ein „f“ für „falsch“.

Vorsicht: Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Für jede richtige Antwort wird ein Punkt gutgeschrieben. Dort, wo Sie keine Angaben machen, wird weder ein Punkt abgezogen noch ein Punkt gutgeschrieben.

Eine negative Punktzahl wird als 0 Punkte gewertet.

Sie brauchen die Antwort **nicht** zu begründen.

(a) Jede abelsche Gruppe ist auflösbar.
(b) Jede auflösbare Gruppe ist abelsch.
(c) Jeder noethersche Ring ist ein Hauptidealring.
(d) Jeder Hauptidealring ist noethersch.
(e) Jedes maximale Ideal ist ein Primideal.
(f) Jedes Primideal ist ein maximales Ideal.
(g) Die Galoisgruppe von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ hat genau zwei Elemente.
(h) Jeder Körper hat genau ein Primideal.
(i) Körper haben keine Primideale.
(j) Jedes irreduzible Polynom in $\mathbb{Q}[X]$ ist separabel.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R611, rechts hinten) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 2 (10 Punkte): Es sei eine Gruppenoperation

$$G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto gx$$

der Gruppe G auf der Menge X gegeben. Man nennt bekanntlich zwei Untergruppen H_1 und H_2 von G zueinander konjugiert, wenn es ein $g \in G$ gibt mit $H_1 = gH_2g^{-1}$. Beweisen Sie:

(a) Liegen $x_1, x_2 \in X$ in derselben Bahn (das heißt $Gx_1 = Gx_2$), so sind die zugehörigen Standgruppen

$$H_1 := G_{x_1} := \{g \in G \mid gx_1 = x_1\} \quad \text{und} \quad H_2 := G_{x_2} := \{g \in G \mid gx_2 = x_2\}$$

zueinander konjugiert. (7 Punkte)

(b) Die Umkehrung gilt nicht, das heißt es gibt eine Gruppenoperation $G \times X \to X$ und $x_1, x_2 \in X$ so, daß $H_1 := G_{x_1}$ und $H_2 := G_{x_2}$ zueinander konjugiert sind, aber x_1 und x_2 nicht in derselben Bahn liegen. (3 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 2:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R611, rechts hinten) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 3 (10 Punkte): Untersuchen Sie, ob die folgenden Polynome irreduzibel im Ring $\mathbb{Z}[X]$ sind:

(a) $X^4 + 3X^3 - 27X^2 + 9X + 3$ (2 Punkte)
(b) $2X^4 + 3X^3 - 27X^2 + 9X + 3$ (2 Punkte)
(c) $2X^4 + 6X^3 - 54X^2 + 18X + 6$ (2 Punkte)
(d) $(X + 2)^4 + 3(X + 2)^3 - 27(X + 2)^2 + 9(X + 2) + 3$ (2 Punkte)
(e) $(X + 1)^4 + 3(X + 1)^3 - 27(X + 1)^2 + 9(X + 1) + 3$ (2 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 3:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R611, rechts hinten) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 4 (6 Punkte): Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Seien I und J Ideale und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Zeigen Sie

$$IJ \subseteq \mathfrak{p} \implies (I \subseteq \mathfrak{p} \text{ oder } J \subseteq \mathfrak{p}).$$

Lösung zur Aufgabe 4:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R611, rechts hinten) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 5 (9 Punkte): Bestimmen Sie die Zerfällungskörper und deren Grade über $\mathbb{Q}$ von

(a) $X^2 - 3X + 2$, (2 Punkte)
(b) $X^2 - 2X - 2$ (3 Punkte) und
(c) $X^4 + 2X^2 + 1$. (4 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 5:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R611, rechts hinten) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 6 (10 Punkte): Sei $K = \{0, 1, a, b\}$ ein Körper mit 4 Elementen.

(a) Zeigen Sie $\operatorname{char}(K) = 2$ (das heißt $1 + 1 = 0$ in K). (3 Punkte)

(b) Beweisen Sie, daß für alle $x \in K$ gilt

$$x^2 = 1 \implies x = 1.$$

(3 Punkte)

(c) Geben Sie **ohne Begründung** eine Additions- und Multiplikationstabelle für K nach folgendem Schema an: (4 Punkte)

$+$	0	1	a	b
0				
1				
a				
b				

$\cdot$	0	1	a	b
0				
1				
a				
b				

Lösung zur Aufgabe 6:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R611, rechts hinten) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 7 (7 Punkte): Zeigen Sie, daß der Körper
(a) $K := \mathbb{Q}(i) \subseteq \mathbb{C}$ (3 Punkte)
(b) $K := \mathbb{Q}(X)(\sqrt{-(1+X^2)})$ (X eine Unbestimmte) (4 Punkte)
sich nicht anordnen läßt.

Lösung zur Aufgabe 7:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R611, rechts hinten) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 8 (10 Punkte): Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ (das heißt $2 = 1 + 1 \neq 0$ in K). Die Körpererweiterung $L|K$ vom Grad 2^n habe die Gestalt

$$L = K(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})$$

mit $a_1, \ldots, a_n \in K$ und es sei

$$x := \sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n}.$$

Begründen Sie:

(a) $L|K$ ist eine Galoiserweiterung. (3 Punkte)
(b) Es gibt **kein** $\sigma \in \mathrm{Gal}(L|K(x))$ mit $\sigma \neq \mathrm{id}_L$. (4 Punkte)
(c) $L = K(x)$ (3 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 8:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.