

Übungsblatt 11 zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2006

Aufgabe 1: Sei $E := \ell^2(\mathbb{N})$ der Hilbertsche Folgenraum. Sei eine lineare Abbildung $A : E \rightarrow E$ definiert durch

(a) $Ax := (x_0, 0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, \dots)$,

(b) $Ax := (x_0, x_2, x_4, x_6, \dots)$.

Zeigen Sie $A \in \mathcal{L}(E, E)$. Bestimmen Sie jeweils $\|A\|$, A^* , AA^* , A^*A , $\|A^*\|$, Kern und Bild von A und von A^* .

Aufgabe 2: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $E := C([a, b], \mathbb{R})$ der \mathbb{R} -Vektorraum aller stetigen Abbildungen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, daß E vermöge

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b fg := \int_a^b f(x)g(x)dx \quad \text{für alle } f, g \in E$$

zu einem Prähilbertraum wird.

(b) Sei $a = 0$, $b = 1$ und $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise? Gegen welche Funktion konvergiert sie in E ?

(c) Sei $a = -1$ und $b = 1$. Welche der folgenden Linearformen sind stetig?

$$\varphi_1 : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(0) \quad \text{und} \quad \varphi_2 : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f$$

(d) Zeigen Sie, daß E bezüglich der durch das gegebene Skalarprodukt induzierten Norm kein Banachraum ist. Nehmen Sie hierzu ohne Einschränkung $a = -1$ und $b = 1$ an. Betrachten Sie die durch

$$f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} (x+1)^n - 1, & x \leq 0 \\ x^n, & x \geq 0. \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

gegebene Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E . Nehmen Sie an, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergierte in E gegen f . Zeigen Sie dann, daß $f|_{[-1,0]} = -1$ und $f|_{[0,1]} = 0$ gälte im Widerspruch zur Stetigkeit von f .

Zweite Klausur am Dienstag, den 25. Juli, von 10 bis 12 Uhr in den in den Räumen R511 und R513. Anmeldung ist unbedingt erforderlich und erfolgt spätestens am 10./11. Juli in den Übungsgruppen.

Abgabe bis Freitag, den 14. Juli, vor Beginn der Vorlesung.