Université de Rennes 1 | *Année 2007-2008*
Master M1 | F. Ivorra
M. Schweighofer

Algèbre commutative

Feuille d'exercices 2

Modules, suites exactes

Tous les anneaux considérés dans la suite seront supposés commutatifs et unitaires, et tous les homomorphismes d'anneaux seront supposés unitaires. Sauf précisions supplémentaires, la lettre A désignera un tel anneau.

Exercice 1. — Soit M un A-module. Que signifie pour un élément $m \in M$ que la famille $\{m\}$ est liée ? Est-il vrai que si les familles $\{m\}$ et $\{n\}$ sont liées, alors la famille $\{m+n\}$ est liée ?

Exercice 2. — Soit A et B deux anneaux et $\phi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux.

(a) Montrer que la loi $a \cdot b = \phi(a) \cdot b$ (où $a \in A$ et $b \in B$) munit B d'une structure de A-module. B muni de sa structure d'anneau et de cette structure de A-module est appelé une A-algèbre.
(b) Montrer que si $B \neq 0$ et si A est un corps k alors ϕ est injectif (*i.e.* : une k-algèbre non nulle contient un corps isomorphe à k).
(c) Montrer que tout B-module N est muni naturellement d'une structure de A-module. Quel est l'annulateur $(0 : N)$ de ce module ?

Exercice 3. — Soient M et N deux A-modules.

(a) Soit $u \in \operatorname{End}_A M$. Montrer qu'il existe une unique structure de $A[X]$-module sur M telle que $X \cdot m = u(m)$ (et $1 \cdot m = m$) pour tout $m \in M$. On notera M_u le $A[X]$-module M muni de cette structure.
Montrer que cette application $u \mapsto M_u$ induit une bijection entre les structures de $A[X]$-module sur M et les endomorphismes $u \in \operatorname{End}_A M$.
(b) Soient $u \in \operatorname{End}_A M$ et $v \in \operatorname{End}_A N$. Déterminer tous les homomorphismes de $A[X]$-modules de M_u dans N_v.
(c) Si $M = N$, à quelle condition $M_u \cong M_v$?

Exercice 4. — Soit M un A-module d'annulateur I. On désigne par $M[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans M, c'est à dire

$$M[X] = \{m_0 + m_1 X + \cdots + m_d X^d : m_i \in M\}.$$

(a) Montrer que $M[X]$ est naturellement pourvu d'une structure de $A[X]$-module.
(b) Quel est l'annulateur de $M[X]$?
(c) Soit N un sous-A-module de M, montrer que $(M/N)[X] \cong M[X]/N[X]$.
(d) Montrer que si M est un A-module de type fini alors $M[X]$ est un $A[X]$-module de type fini.
(e) Montrer que si M est un A-module libre alors $M[X]$ est un $A[X]$-module libre.

Exercice 5. — Soient A un anneau, M un A-module et N un sous-A-module de M. Montrer que si N et M/N sont de type fini alors M est de type fini.

Exercice 6. — Soit A un anneau, M un A-module de type fini et $\phi : M \to A^n$ un morphisme surjectif de A-modules. Montrer que

(a) ϕ admet un inverse à droite ψ.
(b) $M \cong \ker \phi \oplus \operatorname{Im} \psi$.
(c) $\ker \phi$ est de type fini.

Exercice 7. — Soit M un A-module. Soit $\phi \in \operatorname{End}_A M$; on définit sa transposée ϕ^T par $\phi^T(\psi) = \psi \circ \phi$; pour tout $\psi \in M^\vee = \operatorname{Hom}_A(M, A)$. Montrer que

(a) l'ensemble des polynômes P de $A[X]$ tels que $P(\phi) = 0$ est un idéal que l'on notera $I(\phi)$;
(b) si M est réflexif, $I(\phi) = I(\phi^T)$.

Exercice 8. — Soit A un anneau, I un idéal de A et M un A-module de type fini. Montrer que

$$\sqrt{\operatorname{Ann}(M/IM)} = \sqrt{\operatorname{Ann}(M) + I}.$$

Exercice 9. — Soit M un A-module et $m \in M$ un élément dont l'annulateur est réduit à (0). Montrer que Am est facteur direct dans M si et seulement s'il existe $\phi \in M^\vee = \operatorname{Hom}(M, A)$ tel que $\phi(m) = 1$. Montrer alors que $M = Am \oplus \ker \phi$.

Exercice 10. — Soit M un A-module.

(a) On suppose que M est monogène. Montrer qu'il existe un idéal I de A tel que $M \cong A/I$.
(b) On suppose que $M \neq 0$ est *simple*, c'est-à-dire que ses seuls sous-modules sont 0 et M. Montrer que M est monogène, engendré par tout élément non nul de M. Montrer que M est isomorphe à $A/\mathfrak{m}$, où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A.
(c) Quels sont les $\mathbb{Z}$-modules simples ?

Exercice 11. — Soient A un anneau et I soit un idéal. On introduit les notations suivantes

$$\mathrm{SE}(M, I) = \{m \in M : Im = 0\}$$

$$\mathrm{SC}(M, I) = \{m \in M : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } I^n m = 0\}$$

Soient A un anneau et M un A-module. On suppose qu'il existe des idéaux $I_1, \ldots, I_n$ deux à deux comaximaux tels que

$$I_1 \cdots I_n \subset (0 : M).$$

Montrer que M est la somme directe des sous-A-modules $\mathrm{SE}(M, I_k)$ et que de plus on a $\mathrm{SE}(M, I_k) = \mathrm{SC}(M, I_k)$.

Exercice 12. — On reprend les notations introduites au début de l'exercice 11. Soient $M_1, \ldots, M_r$ des A-modules et $I_1 = (0 : M_1), \ldots, I_r = (0 : M_r)$ leurs annulateurs. On suppose que les I_α sont deux à deux comaximaux. On pose : $M = \bigoplus_{\alpha=1}^r M_\alpha$, $I = \bigcap_{\alpha=1}^r I_\alpha$, $N_\alpha = \bigoplus_{\beta \neq \alpha} M_\beta$ et $J_\alpha = \bigcap_{\beta \neq \alpha} I_\beta$.
(a) Montrer que I_α et J_α sont comaximaux.
(b) Montrer que

$$J_\alpha = (0 : N_\alpha) \ \text{ et } \ N_\alpha = \mathrm{SE}(M, J_\alpha).$$

(c) Montrer que

$$I_\alpha = (0 : M_\alpha) \ \text{ et } \ M_\alpha = \mathrm{SE}(M, I_\alpha).$$

(d) Montrer que

$$N_\alpha = I_\alpha M \ \text{ et } \ M_\alpha = J_\alpha M.$$

Exercice 13. — Rédémontrer le théorème chinois en utilisant le résultat de l'exercice 11. Retrouver également à partir du résultat de l'exercice 11 un résultat classique d'algèbre linéaire.

Exercice 14. — Soient $M_1, \ldots, M_n$ des A-modules et $\phi_i : M_i \to M_{i+1}$ des morphismes de A-modules. On dit que

$$M_0 \xrightarrow{\phi_0} M_1 \xrightarrow{\phi_1} \ldots \xrightarrow{\phi_{n-1}} M_n$$

est un complexe (resp. une suite exacte) si pour tout i, $\mathrm{Im}(\phi_i) \subset \ker(\phi_{i+1})$ (resp. $\mathrm{Im}(\phi_i) = \ker(\phi_{i+1})$).

(a) Soit

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$$

une suite exacte. Montrer que i est injectif et que p est surjectif.
(b) Soit

$$M_0 \xrightarrow{\phi_0} M_1 \xrightarrow{\phi_1} \ldots \xrightarrow{\phi_{n-1}} M_n$$

un complexe. Montrer que ce complexe est une suite exacte si et seulement si pour tout i les suites

$$0 \to \ker \phi_i \to M_i \xrightarrow{\phi_i} \ker \phi_{i+1} \to 0$$

sont exactes.
(c) On suppose que A est un corps k et que les M_i sont des k-espaces vectoriels de dimension finie. Soit

$$0 \to M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2 \xrightarrow{\phi_2} \ldots \xrightarrow{\phi_{n-1}} M_n \to 0$$

une suite exacte. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim M_i = 0.$$

Exercice 15. — Soit A un anneau intègre et M un A-module. On dit que $m \in M$ est de torsion si $(0 : m) \neq 0$. On note M_{tors} l'ensemble des éléments de torsion de M. Si $M_{\mathrm{tors}} = 0$ on dit que M est sans torsion. Montrer que
(a) l'ensemble des éléments de torsion de M est un sous-module de M ;
(b) M/M_{tors} est sans torsion ;
(c) si $\phi : M \to N$ est un morphisme de A-modules alors $\phi(M_{\mathrm{tors}}) \subset N_{\mathrm{tors}}$;
(d) une suite exacte $0 \to M' \to M \to M''$ induit une suite exacte $0 \to M'_{\mathrm{tors}} \to M_{\mathrm{tors}} \to M''_{\mathrm{tors}}$.

Exercice 16. — Soit $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Montrer que les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :
(a) il existe $r \in \mathrm{Hom}_A(M, M')$ tel que $r \circ i = \mathrm{id}_{M'}$;
(b) il existe $s \in \mathrm{Hom}_A(M'', M)$ tel que $\pi \circ s = \mathrm{id}_{M''}$;
(c) il existe $s \in \mathrm{Hom}_A(M'', M)$ tel que $M = i(M') \oplus s(M'')$;
(d) le complexe

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{i \circ -} \mathrm{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{\pi \circ -} \mathrm{Hom}_A(N, M'') \to 0$$

est une suite exacte pour tout A-module N ;
(e) le complexe

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{- \circ \pi} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{- \circ i} \mathrm{Hom}_A(M', N) \to 0$$

est une suite exacte pour tout A-module N.

On dit qu'une suite exacte qui vérifie ces propriétés est scindée.

Exercice 17. — Soient A un anneau, M un A-module, N un A-module de type fini et $\phi : M \to N$ un morphisme de A-modules. Soit $\mathscr{R}$ le radical de Jacobson de A (intersection de tous les idéaux maximaux).

(a) Montrer que ϕ induit un homomorphisme $\psi : M/(\mathscr{R}M) \to N/(\mathscr{R}N)$.
(b) Remarquer que si I est un idéal de A et si $N' \subset M'$ sont deux A-modules alors $I(M'/N') = (IM' + N')/N'$.
(c) On suppose que ψ est surjectif. Calculer $\mathrm{Im}(\phi) + \mathscr{R}N$ et en déduire que ϕ est surjectif.

Exercice 18. — Soit A un anneau et I un idéal de type fini de A tel que $I = I^2$. Montrer qu'il existe $e \in A$ tel que $e^2 = e$ et $I = (e)$.

Indication. — Utiliser le lemme de Nakayama pour trouver $a \in I$ tel que $(1 + a)I = 0$.

Exercice 19. — Soit A un anneau intègre et K son corps des fractions. On suppose $K \neq A$. Montrer que K n'est pas libre comme A-module.

Exercice 20. — Donner des exemples :

(a) de modules non-libres ;
(b) d'une famille libre à n éléments dans A^n qui ne soit pas une base ;
(c) d'une partie génératrice minimale qui ne soit pas une base ;
(d) de sous-module n'ayant pas de supplémentaire ;
(e) de module libre ayant un sous-module qui ne l'est pas.

Exercice 21. — Montrer qu'un idéal non nul I d'un anneau A est un sous-module libre de A si et seulement si I est principal et engendré par un élément non diviseur de zéro de A.

Exercice 22. — (a) Soit M un A-module libre. Montrer que toutes les bases de M ont le même cardinal.
(b) Trouver un A-module libre $M \neq 0$ tel que $M \cong M \oplus M$.

Exercice 23. — Soient k un corps, $P \in k[X]$ et $A = k[X]/(P)$.

(a) Quelle est la dimension de A comme k-espace vectoriel ? Donnez-en une base.
(b) On pose $M = A^\vee = \mathrm{Hom}_k(A, k)$; donner une base de M.
(c) Pour $f \in A$ et $u \in M$ on définit $f \cdot u \in M$ par $(f \cdot u)(g) = u(f \cdot g)$. Montrer que cette loi munit M d'une structure de A-module libre de rang 1. Donnez-en une base.

Exercice 24. — Soit A un anneau et T une matrice $n \times m$ à coefficients dans A. Cette matrice représente un morphisme de modules $\phi : A^m \to A^n$. Posons $M = \mathrm{coker}(\phi) = A^n/\mathrm{Im}(\phi)$. Montrer que

(a) $(0 : M) = (\mathrm{Im}(\phi) : A^n)$;
(b) si $m \geq n$ alors les mineurs maximaux de T (c'est à dire les déterminants des sous matrices $n \times n$ de T) appartiennent à $(0 : M)$.

Exercice 25. — Soit A un anneau $\phi : A^n \to A^n$ un morphisme de matrice M_ϕ dans la base canonique de A^n. Posons $M = \mathrm{coker}(\phi) = A^n/\mathrm{Im}(\phi)$ et soit $\phi^* : A^n \to A^n$ dont la matrice M_{ϕ^*} est la matrice transposée des cofacteurs de M_ϕ. Enfin pour $k \in \{1, \dots, n\}$ soit J_k l'idéal engendré par les mineurs $k \times k$ de M_ϕ (c'est-à-dire les déterminants des sous-matrices $k \times k$ de M_ϕ). Remarquer que $J_n = (\det(M_\phi))$ et que J_{n-1} est engendré par les coefficients de M_{ϕ^*}.

(a) Soit $a \in (0 : M)$ et $\mu_a : A^n \to A^n$, $x \mapsto ax$; montrer qu'il existe un morphisme $\psi : A^n \to A^n$ tel que $\mu_a = \phi \circ \psi$, et que $\det(M_\phi)M_\psi = aM_{\phi^*}$.
(b) Montrer que $(0 : M) \subset (J_n : J_{n-1})$.

On suppose désormais que $\det(M_\phi)$ n'est pas diviseur de zéro.

(c) Montrer que ϕ^* est injectif.
(d) Soit $a \in (J_n : J_{n-1})$; montrer qu'il existe $\theta : A^n \to A^n$ tel que $a\phi^* = \det(M_\phi)\theta$. Montrer alors que $\phi \circ \theta = \mu_a$.
(e) Montrer que $(0 : M) = (J_n : J_{n-1})$.

Exercice 26. — Soit P un A-module. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

(a) Pour tout morphisme surjectif de A-modules $\psi : M \to N$ et pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}_A(P, M)$, il existe $\rho \in \mathrm{Hom}_A(P, N)$ tel que $\phi = \psi \circ \rho$.
(b) Toute suite exacte $0 \to M' \to M \to P \to 0$ est scindée.
(c) Il existe un A-module M tel que $M \oplus P$ est libre.

Un A-module P vérifiant ces propriétés est appelé un module projectif. Montrer qu'un A-module libre est projectif.