Übungsblatt 4 zur Modelltheorie

Sommersemester 2007

Aufgabe 1: Die Sprache L_{OF} der angeordneten Körper („OF“ steht für „ordered fields“) bestehe aus den Konstantenzeichen 0 und 1, dem einstelligen Funktionszeichen $-$, den zweistelligen Funktionszeichen $+$ und $\cdot$ und dem zweistelligen Relationszeichen $\leq$. Man erlaubt sich auch in der Sprache L_{OF} einige Bequemlichkeiten, die man sonst in der Mathematik benutzt, soweit dies bei gutwilliger Interpretation des Lesers zu keinen Problemen führt. Zum Beispiel notiert man $+$ und $\cdot$ infix unter Beachtung der „Punkt vor Strich“-Regel. Man schreibt oft $t_1 < t_2$ statt $t_1 \leq t_2 \wedge t_1 \dot{\neq} t_2$, $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ statt $t_1 \leq t_2 \wedge t_2 \leq t_3$, 2 statt $1+1$, t^2 statt $t \cdot t$, $t_1 t_2 t_3$ statt $(t_1 \cdot t_2) \cdot t_3$ und so weiter. Gib ein Axiomensystem für die Klasse der angeordneten Körper in der Sprache L_{OF} an.

Aufgabe 2: Sei $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Man fasse angeordnete Körper als L_{OF}-Strukturen auf. Es bezeichne $\mathbb{R}$ den angeordneten Körper der reellen Zahlen. Sei $\mathcal{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ die *Ultrapotenz* von $\mathbb{R}$ (das heißt das Ultraprodukt $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}/\mathcal{U}$) nach einem freien Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\mathbb{N}$.

(a) Zeige, daß $\mathcal{R}$ ein angeordneter Körper ist.

(b) Gib eine Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ an, sodaß für $a := [(a_i)_{i \in \mathbb{N}}] \in R$, jeden variablenfreien L_{OF}-Term t und die L_{OF}-Formel $\varphi(x) := t < x$ gilt

$$\mathcal{R} \models \varphi[a].$$

Aufgabe 3: Die Sprache L_{R} der Ringe bestehe aus den Konstantenzeichen 0 und 1, dem einstelligen Funktionszeichen $-$ und den zweistelligen Funktionszeichen $+$ und $\cdot$. Gib ein Axiomensystem für die Klasse der Ringe in der Sprache L_{R} an.

Aufgabe 4: Man fasse Ringe als L_{R}-Strukturen auf. Es bezeichne $\mathbb{Z}$ den Ring der ganzen Zahlen. Sei $\mathcal{Z} := \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ die *Ultrapotenz* von $\mathbb{R}$ nach einem freien Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\mathbb{N}$. Gib eine Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ an, so daß $a := [(a_i)_{i \in \mathbb{N}}] \in Z$ im Ring $\mathcal{Z}$ ein Element ungleich null ist, daß von unendlich vielen Primelementen geteilt wird.

Aufgabe 5: Sei L eine Sprache, $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen und $\complement\mathcal{K} := \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}\ L\text{-Struktur}, \mathcal{A} \notin \mathcal{K}\}$ das Komplement von $\mathcal{K}$. Zeige:

(a) $\mathcal{K}$ ist endlich axiomatisierbar genau dann, wenn $\mathcal{K}$ und $\complement\mathcal{K}$ beide axiomatisierbar sind.

(b) Ist $\mathcal{K}$ endlich axiomatisierbar, $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$ und $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$, so gibt es ein endliches $\Delta \subseteq \Sigma$ mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Delta)$.

Abgabe bis Montag, den 21. Mai 2007, um 14 Uhr.