

Übungsblatt 7 zur Modelltheorie
Sommersemester 2007

Aufgabe 1: Seien $\Phi \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Aus}(L)$ und $\psi \in \text{Fml}(L)$. Zeige

$$\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi \iff \Phi \models \varphi \rightarrow \psi.$$

Aufgabe 2: Seien $\Phi \subseteq \text{Aus}(L)$, $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Fml}(L)$ und c_1, \dots, c_n L -Konstantenzeichen, die in $\Phi \cup \{\varphi\}$ nicht vorkommen. Zeige

$$\Phi \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n) \iff \Phi \models \forall x_1 \dots \forall x_n \left(\left(\bigwedge_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ c_i = c_j}} x_i \doteq x_j \right) \rightarrow \varphi \right).$$

Aufgabe 3: Sei $\Phi \subseteq \text{Aus}(L)$, $\varphi(x_1, \dots, x_n), \psi \in \text{Fml}(L)$ und c_1, \dots, c_n paarweise verschiedene Konstantenzeichen in L , die in $\Phi \cup \{\varphi, \psi\}$ nicht vorkommen. Zeige

$$\Phi \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n) \rightarrow \psi \iff \Phi \models (\exists x_1 \dots \exists x_n \varphi) \rightarrow \psi.$$

Aufgabe 4: Eine L_{\leq} -Struktur \mathcal{A} heißt wohlgeordnete Menge, falls $\leq^{\mathcal{A}}$ eine lineare Ordnung auf A ist, für die es keine echt absteigende Folge

$$a_1 >^{\mathcal{A}} a_2 >^{\mathcal{A}} a_3 >^{\mathcal{A}} a_4 >^{\mathcal{A}} \dots$$

von Elementen $a_1, a_2, \dots \in A$ gibt. Zeige, daß die Klasse der wohlgeordneten Mengen nicht axiomatisierbar ist.

Abgabe bis Montag, den 11. Juni 2007, um 14 Uhr.