

**Feuille d'exercices n°4.  
Equations différentielles.**

**Mise en route.**

1. Montrer que les fonctions définies par  $\frac{2\ln(x) + C}{x}$  (où  $C$  est une constante réelle quelconque) sont des solutions de l'équation différentielle

$$x^2 y'(x) + x y(x) = 2.$$

**Résolution d'équations d'ordre 1.**

2. Résoudre les équations d'ordre 1 suivantes :

(a)  $y'(x) = -y(x) \sin(x)$

(b)  $y'(x) \tan(x) = y(x)$

(c)  $y'(x) = y(x) + e^{3x}$

(d)  $y'(x) = y(x) - 1 - e^x$

(e)  $y'(x) = 2x y(x) + x^3$

**Résolution d'équations d'ordre 2.**

3. Résoudre les équations d'ordre 2 suivantes :

(a)  $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$

(b)  $y''(x) - 9y(x) = 0$

(c)  $y''(x) + y(x) = 0$

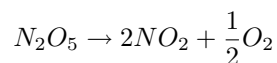
(d)  $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$

(e)  $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x^2$

(chercher une solution particulière  $y_p(x)$  du type polynôme)

**Application.**

4. Il est démontré expérimentalement que si la réaction chimique



se produit à 45 degrés, le taux de réaction du pentoxyde d'azote est proportionnel à sa concentration selon la formule

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = -0,0005 [N_2O_5]$$

Exprimer la concentration  $[N_2O_5]$  après  $T$  secondes sachant que la concentration initiale est  $C$ .

## Compléments.

5. Résoudre les équations suivantes :

(a)  $y''(x) - y'(x) + y(x) = x^2 + 6$

(chercher une solution particulière  $y_p(x)$  du type polynôme)

(b)  $y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = (1+x)e^{-2x}$

(chercher une solution particulière  $y_p(x) = u_p(x)e^{-2x}$ , écrire l'équation vérifiée par  $u_p(x)$  et chercher  $u_p(x)$  sous forme d'un polynôme)

(c)  $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x + e^{-x}$

(une solution particulière  $y_p(x)$  est  $y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x)$  où  $y_{p,1}(x)$  est solution particulière de  $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x$  et  $y_{p,2}(x)$  solution particulière de  $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{-x}$ )

6. Une membrane de cellule a une capacité  $C$  et une résistance  $R$ . L'équation qui connecte la charge  $q$  au potentiel transmembrane  $E$  est

$$E = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

Si  $q = Q$  quand  $t = 0$ , montrer que pour toute valeur de  $t$ ,

$$q = EC - (EC - Q)e^{-t/(RC)}$$

7. On tente de modéliser la manière dont une rumeur se répand en considérant que la vitesse de propagation est proportionnelle au produit de la fraction  $y$  de ceux qui sont au courant de la rumeur par la fraction de ceux qui, au contraire, ne sont pas au courant.

(a) Ecrire une équation différentielle vérifiée par  $y$ .

(b) En déduire une équation différentielle vérifiée par  $z = \frac{1}{y}$ .

(c) Résoudre l'équation vérifiée par  $z$  et en déduire  $y$ .

(d) Une petite ville compte 1000 habitants. A 8 heures du matin, 80 personnes ont entendu parler de la nouvelle du jour. A midi, la moitié de la ville est au courant. Quand est-ce que 90% de la population saura ?