Feuille d'exercices n^{o}4.
Equations différentielles.

Mise en route.

1. Montrer que les fonctions définies par $\dfrac{2\ln(x)+C}{x}$ (où C est une constante réelle quelconque) sont des solutions de l'équation différentielle

$$x^2\, y'(x) + x\, y(x) = 2.$$

Résolution d'équations d'ordre 1.

2. Résoudre les équations d'ordre 1 suivantes :
   (a) $y'(x) = -y(x)\, \sin(x)$
   (b) $y'(x)\, \tan(x) = y(x)$
   (c) $y'(x) = y(x) + e^{3x}$
   (d) $y'(x) = y(x) - 1 - e^x$
   (e) $y'(x) = 2\, x\, y(x) + x^3$

Résolution d'équations d'ordre 2.

3. Résoudre les équations d'ordre 2 suivantes :
   (a) $y''(x) - 5\, y'(x) + 6\, y(x) = 0$
   (b) $y''(x) - 9\, y(x) = 0$
   (c) $y''(x) + y(x) = 0$
   (d) $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$
   (e) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x^2$
   (chercher une solution particulière $y_p(x)$ du type polynôme)

Application.

4. Il est démontré expérimentalement que si la réaction chimique

$$N_2O_5 \to 2NO_2 + \frac{1}{2}O_2$$

se produit à 45 degrés, le taux de réaction du pentoxyde d'azote est proportionnel à sa concentration selon la formule

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = -0,0005\, [N_2O_5]$$

Exprimer la concentration $[N_20_5]$ après T secondes sachant que la concentration initiale est C.

Compléments.

5. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $y''(x) - y'(x) + y(x) = x^2 + 6$
   (chercher une solution particulière $y_p(x)$ du type polynôme)
   (b) $y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = (1 + x)\, e^{-2x}$
   (chercher une solution particulière $y_p(x) = u_p(x)\, e^{-2x}$, écrire l'équation vérifiée par $u_p(x)$ et chercher $u_p(x)$ sous forme d'un polynôme)
   (c) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x + e^{-x}$
   (une solution particulière $y_p(x)$ est $y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x)$ où $y_{p,1}(x)$ est solution particulière de $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x$ et $y_{p,2}(x)$ solution particulière de $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{-x}$)

6. Une membrane de cellule a une capacité C et une résistance R. L'équation qui connecte la charge q au potentiel transmembrane E est
$$E = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$
Si $q = Q$ quand $t = 0$, montrer que pour toute valeur de t,
$$q = EC - (EC - Q)e^{-t/(RC)}$$

7. On tente de modéliser la manière dont une rumeur se répand en considérant que la vitesse de propagation est proportionnelle au produit de la fraction y de ceux qui sont au courant de la rumeur par la fraction de ceux qui, au contraire, ne sont pas au courant.
   (a) Ecrire une équation différentielle vérifiée par y.
   (b) En déduire une équation différentielle vérifiée par $z = \dfrac{1}{y}$.
   (c) Résoudre l'équation vérifiée par z et en déduire y.
   (d) Une petite ville compte 1000 habitants. A 8 heures du matin, 80 personnes ont entendu parler de la nouvelle du jour. A midi, la moitié de la ville est au courant. Quand est-ce que 90% de la population saura ?