Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Übungsblatt 2
26.10.2009

Lineare Algebra I

Aufgabe 2.1:

Sei A eine beliebige Menge. Betrachten Sie Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{P}(A) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)), \\ B &\longmapsto \mathcal{P}(B). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung f injektiv ist. Gibt es eine Menge A, so dass f surjektiv ist?

Aufgabe 2.2:

Seien A und B beliebige Mengen und $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Beweisen Sie folgende Behauptungen.

(a) Ist f injektiv, so gibt es eine Abbildung $g\colon B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Ist weiter A nicht die leere Menge, so gilt auch die Umkehrung.

(b) f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $g\colon B \to A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gibt.

(c) Ist f bijektiv und gibt es eine Abbildung $g\colon B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$, so ist $g = f^{-1}$.

(d) Ist f bijektiv und gibt es eine Abbildung $g\colon B \to A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$, so ist $g = f^{-1}$.

Aufgabe 2.3:

(a) Seien $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\}$ und $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist ungerade}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{Z} = \{A, B\}$ eine Zerlegung von $\mathbb{Z}$ ist. Wie sieht die zugehörige Äquivalenzrelation $\sim_{\mathcal{Z}}$ aus?

(b) Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(i) Durch

$$a_1 \sim_f a_2 :\iff f(a_1) = f(a_2)$$

wird eine Äquivalenzrelation auf A definiert.

(ii) $\mathcal{Z}_f := \{f^{-1}(\{f(a)\}) \mid a \in A\}$ ist eine Zerlegung von A.

(iii) Es gilt $\sim_{\mathcal{Z}_f} = \sim_f$ und $A/\sim_f = \mathcal{Z}_f$.

Aufgabe 2.4:

(a) Es ist Kindergeburtstag und die Mädchen Anastasia, Anne, Charlotte und Nadja feiern mit den Jungen Johannes, Lukas, Markus S., Markus T., Martin, Matthias, Robin und Sebastian. Für die Kinder wurde ein runder Tisch mit einem runden Kuchen in der Mitte aufgestellt. Die Eltern haben auch schon eine Sitzordnung festgelegt: die Kinder setzen sich so an den Tisch, dass ihre Namen, ausgehend von Anastasia, im Uhrzeigersinn alphabetisch aufsteigen.

(i) Sei R_1 die folgende Relation auf der Menge K der feiernden Kinder:
$(x, y) \in R_1 :\iff x$ sitzt neben y. Nennen Sie alle Elemente in R_1. Ist R_1 reflexiv, symmetrisch, transitiv?

Bitte wenden.

(ii) Wie muß die Sitzordung abgeändert werden, damit, bezüglich der Relation R_2, die genauso definiert wird, wie die Relation aus (i), jeder Junge zu genau einem Mädchen in Relation steht und die Namen der Mädchen und Jungen jeweils im Uhrzeigersinn alphabetisch aufsteigen (wieder bei Anastasia beginnend)?

(iii) Die Kinder haben sich entsprechend der Sitzordnung aus (ii) umgesetzt. Der Kuchen in der Mitte des Tisches wird nun in zwölf gleich große Teile aufgeteilt, die unterschiedlich gefärbt sind. Matthias sitzt vor einem roten Stück Kuchen, dieses bezeichnen wir mit 1. Die anderen Stücke sind, im Gegenuhrzeigersinn durchnummeriert, folgendermaßen gefärbt: Alle Stücke, deren Nummer durch 2 teilbar ist, sind (teilweise) gelb gefärbt. Alle Stücke, deren Nummer durch 3 teilbar ist, sind (teilweise) blau gefärbt. Alle Stücke, deren Nummer durch 5 teilbar ist, sind (teilweise) grün gefärbt. Alle Stücke, deren Nummer durch 7 teilbar ist, sind (teilweise) orange gefärbt. Alle Stücke deren Nummer durch 11 teilbar ist, sind (teilweise) lila gefärbt. Sei R_3 die folgende Relation auf K: $(x, y) \in R_3 :\iff$ das Kuchenstück von x und das Stück von y haben eine gemeinsame Farbe. Nennen Sie alle Kinder, die bzgl. R_3 in Relation zu Anne sind. Ist R_3 reflexiv, symmetrisch, transitiv?

(iv) Betrachten Sie die Relation aus (iii) nur auf der Menge der feiernden Mädchen. Ist sie nun reflexiv, symmetrisch, transitiv?

(v) Auf genau fünf Kuchenstücken befindet sich eine Kerze. Sei R_5 die folgendermaßen definierte Relation auf K: $(x, y) \in R_5 :\iff$ auf dem Kuchenstücken von x und y befindet sich jeweils eine Kerze. Wie müssen die Kerzen verteilt sein, so dass die Vereinigung der Relationen R_3 und R_5 eine Äquivalenzrelation ist, wenn man sie auf die Menge der feiernden Jungen einschränkt?

(vi) Nach dem Kuchenessen spielen die Kinder Verstecken: Ein Kind beginnt, die anderen Kinder zu suchen. Wann immer ein Kind gefunden wurde, muß es alleine nach den restlichen Kindern suchen. Sei R_6 die folgende Relation auf K: $(x, y) \in R_5 :\iff x$ findet y. Ist diese Relation reflexiv, symmetrisch, transitiv? Welche dieser Eigenschaften hat R_6, wenn die gefundenen Kinder mit den bisher suchenden Kindern zusammen weitersuchen (und sich dabei nicht trennen)?

(b) Sind die folgenden Relationen reflexiv, symmetrisch, transitiv?

(i) $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(ii) $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 2)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(iii) $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 2), (2, 4)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(iv) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid$ es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und es gibt gewisse $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in R_3$ mit $x = a_1,\ y = b_n$ und $b_i = a_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}\}$

(v) $R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 0\}$

(vi) $R_6 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 0\}$

(vii) $R_7 = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \mid a + d = b + c\}$

Abgabe bis Montag, den 2. November, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.