Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Übungsblatt 4
09.11.2009

Lineare Algebra I

Aufgabe 4.1:

Sei G eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie folgendermaßen, dass die Zuordnungen

$$\equiv \longmapsto \overline{0} \quad \text{und} \quad H \longmapsto \equiv_H$$

eine Bijektion zwischen der Menge der Kongruenzrelationen auf G und der Menge der Untergruppen von G vermitteln:

(a) Ist $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf G, so ist $\overline{0}$ eine Untergruppe von G.

(b) Ist H eine Untergruppe von G, so ist $\equiv_H$ eine Kongruenzrelation auf G.

(c) Ist $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf G, so stimmt $\equiv$ mit $\equiv_{\overline{0}}$ überein.

(d) Ist H eine Untergruppe von G, so ist $H = \overline{0}^H$.

Aufgabe 4.2:

Seien G und H abelsche Gruppen und $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie folgende Behauptungen:

(a) Die durch
$$a \equiv_f b :\Longleftrightarrow f(a) = f(b) \qquad (a, b \in G)$$
auf G definierte Relation $\equiv_f$ ist eine Kongruenzrelation auf G.

(b) Die Menge $\ker f := \{a \in G \mid f(a) = 0\}$ ist eine Untergruppe von G.

(c) Die von $\ker f$ gegebene Kongruenzrelation $\equiv_{\ker f}$ stimmt mit $\equiv_f$ überein.

(d) Es gilt $\overline{0}^f = \ker f$.

(e) Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{0\}$ ist.

Aufgabe 4.3: (Homomorphiesatz für abelsche Gruppen)

Seien G und H abelsche Gruppen, sei $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, und sei I eine Untergruppe von G mit $I \subseteq \ker f$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es es genau eine Abbildung

$$\overline{f}\colon G/I \longrightarrow H$$

mit $\overline{f}\left(\overline{a}^I\right) = f(a)$ für alle $a \in G$ gibt. Zeigen Sie:

(a) $\overline{f}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(b) Es ist $\operatorname{im} f = \operatorname{im} \overline{f}$.

(c) Die Abbildung $\overline{f}$ ist genau dann injektiv, wenn $I = \ker f$ ist.

(d) Die Abbildung $\overline{f}$ ist genau dann surjektiv, wenn f surjektiv ist.

Was passiert wenn f surjektiv ist und man $I = \ker f$ wählt?

Bitte wenden.

Aufgabe 4.4:

(a) Sei A eine Menge, und sei B eine Teilmenge von A. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(B)$ eine Untergruppe von $(\mathcal{P}(A), \triangle)$ ist und $\mathcal{P}(A)/\mathcal{P}(B) \cong \mathcal{P}(A \setminus B)$ gilt. Verwenden Sie dafür Aufgabe 3.4 (e), den Isomorphiesatz und illustrieren Sie graphisch die in der Vorlesung beschriebenen zugehörigen drei Phasen am Beispiel $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2\}$.

(b) Sei $\langle 6 \rangle$ die von der Zahl 6 erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie alle Untergruppen H der abelschen Gruppe $G := \mathbb{Z}/\langle 6 \rangle$ und zu jeder dieser Untergruppen die Quotientengruppe G/H.

(c) Wir betrachten die abelsche Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(i) Durch

$$(a, b) \equiv (c, d) :\iff a + d = b + c \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{Z})$$

wird eine Kongruenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert. Bestimmen Sie außerdem die Kongruenzklasse von $(0, 0)$.

(ii) In jeder Kongruenzklasse liegt ein Element aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, und somit sind die Mengen $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\equiv$ und $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\equiv$ gleich.

(iii) Die Quotientengruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$.

(d) Zeigen Sie, dass durch

$$x \sim y :\iff \text{es existieren } n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n = y^m$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert wird, die keine Kongruenzrelation auf der multiplikativen abelschen Gruppe $\mathbb{R}^\times = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.

(e) Ändern Sie den folgenden Reim so ab, dass er als Teil einer Beschreibung von etwas Nichttrivialem verstanden werden kann, aber immernoch ein Reim ist. (Verändern Sie dabei so wenig wie möglich.)

Du mußt versteh'n!
Aus Eins mach Zehn,
Und Zwei laß geh'n,
Und Drei mach gleich,
So bist Du reich.
Verlier die Vier!
Aus Fünf und Sechs,
So sagt die Hex',
Mach Sieben und Acht,
So ist's vollbracht:
Und Neun ist Eins,
Und Zehn ist keins.
Das ist das Hexen-Einmaleins!

Abgabe bis Montag, den 16. November, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.