Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Dr. Sven Wagner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 25
28.06.2010

Lineare Algebra II

Aufgabe 25.1:

Finden Sie zu den folgenden Matrizen $M \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ invertierbare Matrizen $P \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ und $Q \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ derart, dass sich PMQ in Smithscher Normalform befindet.

(a) $M := \begin{pmatrix} 15 & -18 & 0 \\ 27 & 6 & -36 \end{pmatrix}$

(b) $M := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 25.2:

Finden Sie zu den folgenden Matrizen $M \in \mathbb{Q}[X]^{m\times n}$ invertierbare Matrizen $P \in \mathbb{Q}[X]^{m\times m}$ und $Q \in \mathbb{Q}[X]^{n\times n}$ derart, dass sich PMQ in Smithscher Normalform befindet.

(a) $M := \begin{pmatrix} X^2+1 & 1 \\ X^3 & X^4+1 \end{pmatrix}$

(b) $M := \begin{pmatrix} -X & X^2-X-1 & X & X+2 \\ X+1 & -X^2+1 & -X-1 & -X-1 \\ X & -2X^2-X & X^2 & 2X^2+3X \\ 2X+3 & -X^2+X+3 & -X^2-3X-3 & -2X^2-6X-3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 25.3:

Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $M \in \mathbb{Z}^{m\times n}$. Zu $p \in \mathbb{P}$ sei $M_{\mathbb{F}_p} \in (\mathbb{F}_p)^{m\times n}$ die Matrix, die man aus M durch Restklassenbildung der Einträge modulo (p) erhält. Wir bezeichnen außerdem mit $M_{\mathbb{Q}}$ die Matrix M, aufgefasst als Element in $\mathbb{Q}^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{rank}(M_{\mathbb{Q}}) = \max\{\operatorname{rank}(M_{\mathbb{F}_p}) \mid p \in \mathbb{P}\}$ gilt. Geben Sie außerdem für $p \in \mathbb{P}$ ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für $\operatorname{rank}(M_{\mathbb{F}_p}) = \operatorname{rank}(M_{\mathbb{Q}})$ an.

Abgabe bis Montag, den 5. Juli, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.