

---

Übungsblatt 3 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

---

**Aufgabe 1.**

Seien  $\ell_1, \dots, \ell_n \in K[X_1, \dots, X_n]$  linear, das heißt vom Grad  $\leq 1$ . Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

- (a)  $V(\ell_1, \dots, \ell_n) \cap K^n = \emptyset$
- (b)  $V(\ell_1, \dots, \ell_n) = \emptyset$
- (c) Es gibt  $a_1, \dots, a_n \in K$  mit  $1 = a_1\ell_1 + \dots + a_n\ell_n$ .

Finde Gegenbeispiele, die zeigen, dass man auf die Voraussetzung der Linearität der  $\ell_i$  weder in „(a)  $\Rightarrow$  (b)“ noch in „(b)  $\Rightarrow$  (c)“ verzichten kann.

(Hinweis: Benutze *nicht* den Hilbertschen Nullstellensatz, sondern Lineare Algebra.)

**Aufgabe 2.**

Sei  $n \geq 1$ . Zeige, dass es in  $K[X_1, \dots, X_n]$  unendlich viele paarweise nicht assoziierte Primelemente gibt.

Hinweis für die restlichen Aufgaben: Verwende den Hilbertschen Nullstellensatz bzw. das Zariski-Lemma.

**Aufgabe 3.**

Zeige, dass in einer affinen Algebra jedes Radikalideal der Schnitt von maximalen Idealen ist.

**Aufgabe 4.**

Sei  $\mathfrak{m} \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$  ein maximales Ideal. Zeige, dass es  $f_i \in K[X_1, \dots, X_i]$  derart gibt, dass  $\mathfrak{m} = (f_1, \dots, f_n)$  gilt.

(Hinweis: Führe Induktion nach  $n$  durch. Zeige, dass  $\mathfrak{m}' := \mathfrak{m} \cap K[X_1, \dots, X_{n-1}]$  wieder maximal ist. Fasse  $L' := K[X_1, \dots, X_{n-1}]/\mathfrak{m}'$  als Unterkörper von  $L := K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$  auf, und betrachte die Körpererweiterung  $L|L'$ .)

**Abgabe bis Montag, den 7. November 2011, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.**