

Übungsblatt 6 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1.

Sei R ein kommutativer Ring und M und N R -Moduln. Zeige:

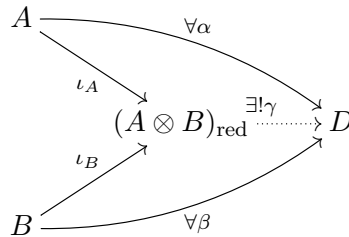
- Ist M erzeugt von $X \subseteq M$ und N von $Y \subseteq N$, so ist $M \otimes_R N$ von $\{x \otimes y \mid x \in X, y \in Y\}$ erzeugt.
- Ist X Basis von M und Y Basis von N , so ist $\{x \otimes y \mid x \in X, y \in Y\}$ Basis von $M \otimes_R N$.
- Sind A und B affine K -Algebren, so ist auch $A \otimes_K B$ affin.

Aufgabe 2.

Sei A ein kommutativer Ring. A heißt *reduziert*, falls $\text{Nil}(A) = (0)$.

Setze $A_{\text{red}} := A/\text{Nil}(A)$.

- Zeige dass A_{red} reduziert ist.
- Seien A und B reduzierte affine K -Algebren. Zeige, dass $((A \otimes_K B)_{\text{red}}, \iota_A, \iota_B)$ bei kanonischer Wahl von ι_A und ι_B als reduzierte affine K -Algebra die durch folgendes Diagramm dargestellte universelle Eigenschaft erfüllt:



In Worten: Für alle reduzierten affinen K -Algebren D und Algebrenhomomorphismen α und β wie im Diagramm, existiert genau ein Algebrenhomomorphismus γ , für welchen $\alpha = \gamma \circ \iota_A$ und $\beta = \gamma \circ \iota_B$ gilt.

- Zeige, dass für alle affinen K -Varietäten gilt:

$$K[V \times W] \cong (K[V] \otimes_K K[W])_{\text{red}}$$

Aufgabe 3.

Sei $\varphi : V \rightarrow W$ ein Morphismus affiner K -Varietäten und $\varphi^* : K[W] \rightarrow K[V]$ der dazu duale Homomorphismus. Zeige oder widerlege durch Gegenbeispiel:

- a) φ injektiv $\Rightarrow \varphi^*$ surjektiv
- b) φ surjektiv $\Rightarrow \varphi^*$ injektiv
- c) φ^* injektiv $\Rightarrow \varphi$ surjektiv
- d) φ^* surjektiv $\Rightarrow \varphi$ injektiv

Abgabe bis Montag, den 28. November 2011, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.