
Übungsblatt 8 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1.

Sei $\varphi: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ ein K -Morphismus, $\varphi^*: K[Y_1, \dots, Y_m] \rightarrow K[X_1, \dots, X_n]$ der zugehörige K -Algebrenhomomorphismus der Koordinatenringe und $I \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal. Dann ist $V((\varphi^*)^{-1}(I))$ der Zariskiabschluss von $\varphi(V(I))$, also

$$V((\varphi^*)^{-1}(I)) = \overline{\varphi(V(I))}.$$

Aufgabe 2.

Sei K ein Körper, $F := \{X^2 - Y, X^3 - Z\} \subseteq K[X, Y, Z]$ und $I := (F)$. Führe per Hand den Buchberger-Algorithmus aus, um F zu einer Gröbnerbasis von I zu erweitern bezüglich der Monomordnung (a) \leq_{lex} , (b) $\leq_{\text{lex}}^{\text{deg}}$ und (c) $\leq_{\text{revlex}}^{\text{deg}}$.

Aufgabe 3.

Auf einer Karte von Deutschland sollen die 16 Bundesländer so eingefärbt werden, dass je zwei benachbarte Länder unterschiedliche Farben haben.

- (a) Ist dies mit nur drei Farben möglich?
- (b) Zeige, dass es mit vier Farben (blau, rot, gelb und grün) möglich ist, wobei jede Farbe für genau vier Länder verwendet wird und Bayern blau, Baden-Württemberg gelb und Niedersachsen rot eingefärbt wird.
- (c) Was für Farben kommen bei einer Färbung wie in (b) für Berlin in Frage?
- (d) Färbe mit Buntstiften¹ eine Deutschlandkarte wie in (b) beschrieben ein.

Hinweis: Ordne jedem Bundesland eine Variable zu und interpretiere die Farben als dritte bzw. vierte Einheitswurzeln in einem geeigneten Körper wie zum Beispiel \mathbb{C} . Finde geeignete polynomiale Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, welche die oben genannten Bedingungen ausdrücken und berechne eine Gröbnerbasis, um die Lösbarkeit des Systems zu überprüfen. Benutze dazu SINGULAR und stöbere hierzu im Manual [<http://www.singular.uni-kl.de/Manual/3-1-3/>] unter anderem die Abschnitte 2.3, 3.7 und A.2.1 durch. Falls die Rechenzeiten länger als ein paar Sekunden sind, denke daran, vielleicht über einem geeigneten *endlichen* Grundkörper zu rechnen. Beachte, dass Rechenzeiten je nach gewähltem Grundkörper zwischen Millisekunden und Tagen schwanken können!

Abgabe bis Montag, den 12. Dezember 2011, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.

¹oder Wachsmalkreiden