Universität Konstanz Christoph Hanselka
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Sommersemester 2012

Übungsblatt 4 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring, $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} R$ und $S \subseteq R$ multiplikativ mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.

(a) Zeige, dass man einen Ringisomorphismus

$$\psi\colon R_{\mathfrak{p}} \to (S^{-1}R)_{S^{-1}\mathfrak{p}}, \ \frac{a}{b} \mapsto \frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{1}} \quad (a \in R, b \in R \setminus \mathfrak{p})$$

hat.

(b) Sei nun weiter M ein R-Modul und man fasse den $(S^{-1}R)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$-Modul $(S^{-1}M)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$ vermöge ψ als $R_{\mathfrak{p}}$-Modul auf. Zeige, dass man dann einen $R_{\mathfrak{p}}$-Modulisomorphismus

$$M_{\mathfrak{p}} \to (S^{-1}M)_{S^{-1}\mathfrak{p}}, \ \frac{x}{b} \mapsto \frac{\frac{x}{1}}{\frac{b}{1}} \quad (x \in M, b \in R \setminus \mathfrak{p})$$

hat.

Hinweis: Man kann die Charakterisierungen der Lokalisierungen 1.2.4 und 1.2.8(a) aus der Vorlesung benutzen.

Aufgabe 2. Sei R ein noetherscher Ring, $S \subseteq R$ multiplikativ und M ein R-Modul. Zeige

$$\operatorname{ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{S^{-1}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{ass}(M), \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

Aufgabe 3. Bestimme die zum $\mathbb{Z}$-Modul

$$\mathbb{Z}/(n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

assoziierten Primideale.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper. Bestimme die zum $K[X,Y]$-Modul

$$K[X,Y]/(X^2, XY)$$

assoziierten Primideale.

Abgabe bis Dienstag, den 12. Juni, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411 .