

---

Übungsblatt 4 zur Polynomialen Optimierung

---

**Aufgabe 1 (9 Punkte).** Die Dualität der linearen Optimierung ist in der Literatur ganz anders beschrieben als in unserer Vorlesung. Nehme hierzu eine Literaturquelle Deiner Wahl (Buch, Internet, Skript, Vorlesungsmitschrift, ...), in der das zu einem LP duale LP beschrieben wird.

- (a) Nenne Deine Quelle und beschreibe, wie dort ein LP und sein Dual beschrieben wird.
- (b) Vergleiche dies mit 2.3.11 aus der Vorlesung.
- (c) Argumentiere, warum dies nur andere Darstellungen derselben Sache sind.

**Aufgabe 2 (15 Punkte).** Betrachte die Kegel

$$T_k := \left\{ \sum_{i+j \leq k} a_{ij} X^i (1-X)^j \mid a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\} \subseteq \mathbb{R}[X]_k \quad (k \in \mathbb{N}) \text{ und } T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k \subseteq \mathbb{R}[X].$$

- (a) Zeige mit dem Fundamentalsatz der Algebra, dass jedes Polynom in  $\mathbb{R}[X]$  ein Produkt von Polynomen vom Grad  $\leq 2$  ist.
- (b) Zeige, dass jedes  $f \in \mathbb{R}[X]_1$  mit  $f \geq 0$  auf  $[0, 1]$  in  $T_1$  liegt.
- (c) Zeige, dass kein  $f \in \mathbb{R}[X]_2$  mit einer Nullstelle im offenen Intervall  $(0, 1)$  in  $T$  liegt.
- (d) Zeige, dass jedes  $f \in \mathbb{R}[X]_2$  mit  $f \geq 0$  auf  $[0, 1]$  und einer Nullstelle in  $[0, 1]$  aber nicht in  $(0, 1)$  in  $T_2$  liegt.
- (e) Bestimme ein Polynom  $h \in \mathbb{Z}[K, L, A, B, C]_4$  derart, dass für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  gilt

$$aX^2 + bX + c = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(\ell-2)!}{k!(\ell-k)!} h(k, \ell, a, b, c) X^k (1-X)^{\ell-k}.$$

- (f) Zeige, dass jedes  $f \in \mathbb{R}[X]_2$  mit  $f > 0$  auf  $\mathbb{R}$  in  $T$  liegt, indem Du die Diskriminanten der Polynome  $f = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]_2$  und  $h(K, \ell, a, b, c) \in \mathbb{Z}[K]_2$  betrachtest für  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und große  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ .
- (g) Zeige, dass jedes  $f \in \mathbb{R}[X]$  mit  $f > 0$  auf  $(0, 1)$  in  $T$  liegt.
- (h) Sei  $f \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$  mit  $f \geq 0$  auf  $(0, 1)$  und einer Nullstelle in  $(0, 1)$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  sei  $k(\varepsilon) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid f + \varepsilon \in T_k\}$ . Zeige  $\lim_{k \rightarrow \infty} k(\varepsilon) = \infty$ .

**Abgabe** bis Donnerstag, den 7. Juni 2012, um 11:44 Uhr (vor der Vorlesung) in die Zettelkästen neben F411.