Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2013/2014

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 5 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Stelle von folgenden Abbildungen fest, ob es sich um Homo-, Mono-, Epi- oder Isomorphismen (bzw. nichts davon) handelt und ermittle ggf. $\ker(f)$. Beweise Deine Antworten.
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$
(b) $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $x \mapsto 2^x$
(c) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(a, b) \mapsto a + b$
(d) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Q}$, $(a, q) \mapsto (a, 0, q)$

Aufgabe 2: Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $n\mathbb{Z} := \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$.
(a) Finde einen Monomorphismus $f : \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/169\mathbb{Z}$.
(b) Ist $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/169\mathbb{Z}$? Beweise Deine Antwort.

Aufgabe 3: Es sei G eine abelsche Gruppe, $\emptyset \neq E \subseteq G$. Definiere eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von G durch $A_0 := E$, $A_{n+1} := A_n \cup \{a + b \mid a, b \in A_n\} \cup \{-a \mid a \in A_n\}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Zeige: $\langle E\rangle_G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_n$.

Aufgabe 4: Für $a, b \in \mathbb{Z}$ bezeichne $\mathrm{ggT}(a, b)$ den größten gemeinsamen Teiler von a und b, das heißt die größte ganze Zahl z, die sowohl Teiler von a als auch von b ist (hierbei setzen wir $\mathrm{ggT}(0, 0) := 0$). Betrachte die Struktur $T := (\mathbb{N}_0, \mathrm{ggT})$.
(a) Zeige: T erfüllt alle Axiome für abelsche Gruppen bis auf die Existenz von Inversen.
(b) Finde eine fünfelementige Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ so, dass (A, ggT) alle Axiome abelscher Gruppen außer der Existenz von Inversen erfüllt und ein $n \in A$ existiert mit $n \neq 0$ und $\mathrm{ggT}(a, n) = \mathrm{ggT}(n, a) = a$ für alle $a \in A$.

Zusatzaufgabe für Interessierte:
(a) Es seien $(G, +_G)$ und $(H, +_H)$ abelsche Gruppen, ferner $\sigma : G \to H$ und $\tau : H \to G$ Homomorphismen. Folgt dann, dass G und H isomorph sind? Beweise Deine Antwort. (2 Punkte)
(b) Es seien $(G, +_G)$ und $(H, +_H)$ abelsche Gruppen, ferner $\sigma : G \to H$ und $\tau : H \to G$ Monomorphismen. Folgt dann, dass G und H isomorph sind? Beweise Deine Antwort. (8 Punkte)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Dienstag, den 26. November 2013, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihres Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.