
Übungsblatt 13 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1:

(a) Ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar in $\mathbb{Z}^{3 \times 3}$?

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Zeige: A ist genau dann invertierbar in $\mathbb{Z}^{n \times n}$, wenn für jede Primzahl p

$$A_p := (\overline{a_{ij}^{(p)}})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{F}_p^{n \times n}$$

in $\mathbb{F}_p^{n \times n}$ invertierbar ist.

Aufgabe 2: Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times n}$. Finde jeweils alle Eigenwerte von A in den folgenden Situationen:

(a) A ist invertierbar und die Eigenwerte von A^{-1} sind genau $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in K$.

(b) $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

(c) n ungerade, $K = \mathbb{R}$ und $A^{2m+1} = I_n$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3: Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *längentreu*, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ die Punkte x und y zueinander denselben Abstand haben wie die Punkte $f(x)$ und $f(y)$. Zeige durch eine geometrische Argumentation: Ist f längentreu und $f(0) = 0$, so ist f linear.

Aufgabe 4: (20 Punkte) Der abergläubische Fußballspieler Hans hat gerade einen Elfmeter verschossen und legt nun den (perfekt kugelförmigen) Ball für den nächsten Versuch auf genau denselben Elfmeterpunkt zurück.

(a) Kann Hans vermeiden, dass zwei antipodisch gegenüberliegende Punkte auf dem Leder (also auf der Oberfläche der Kugel) auf derselben Gerade wie zuvor zu liegen kommen? (10 Punkte)

(b) Kann Hans vermeiden, dass ein Punkt auf dem Leder (also ein Punkt auf der Oberfläche der Kugel) an derselben Stelle wie zuvor zu liegen kommt? (10 Punkte)

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei A eine reelle 11×11 -Matrix mit $A^3 = 0$, ferner sei E diejenige reelle 11×11 -Matrix, deren sämtliche Einträge gleich 1 sind. Zeige: $\det(A + E) = 0$.

Bei den Aufgaben 1, 2, 3 und 5 sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Dienstag, den 4. Februar 2014, um 9:55 Uhr in das Postfach Deines Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.