
Übungsblatt 16 zur Reellen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 55. Sei (K, \leq) ein angeordneter Oberkörper von \mathbb{R} .

(a) Zeige, dass

$$\mathcal{O}_{(K, \leq)} := \{a \in K \mid \exists N \in \mathbb{N} : |a| \leq N\}$$

ein Unterring von K mit einzigem maximalen Ideal

$$\mathfrak{m}_{(K, \leq)} := \left\{ a \in K \mid \forall N \in \mathbb{N} : |a| \leq \frac{1}{N} \right\}$$

und Einheitengruppe

$$\mathcal{O}_{(K, \leq)}^\times = \mathcal{O}_{(K, \leq)} \setminus \mathfrak{m}_{(K, \leq)} = \left\{ a \in K \mid \exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} \leq |a| \leq N \right\}$$

ist.

(b) Zeige, dass es zu jedem $a \in \mathcal{O}_{(K, \leq)}$ genau ein $b \in \mathbb{R}$ gibt mit $a - b \in \mathfrak{m}_{(K, \leq)}$. Wir nennen dieses b den *Standardteil* von a und notieren es mit $\text{st}(a)$.

(c) Zeige, dass $\mathcal{O}_{(K, \leq)} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \mapsto \text{st}(a)$ ein Ringhomomorphismus mit Kern $\mathfrak{m}_{(K, \leq)}$ ist.

(d) Zeige, dass für alle $a, b \in \mathcal{O}_{(K, \leq)}$ mit $\text{st}(a) < \text{st}(b)$ gilt $a < b$.

Aufgabe 56. Sei (K, \leq) ein nichtarchimedisch angeordneter Körper, den wir mit der Intervalltopologie aus Aufgabe 24 ausstatten.

(a) Zeige, dass durch $a \sim b : \iff \exists N \in \mathbb{N} : (|a| \leq N|b| \ \& \ |b| \leq N|a|)$ für $a, b \in K$ eine Äquivalenzrelation auf K definiert wird. Wir nennen deren Äquivalenzklassen die Archimedizitätsklassen von (K, \leq) .

(b) Zeige, dass alle Archimedizitätsklassen von (K, \leq) ausser $\{0\}$ abgeschlossen sind.

Finde einen angeordneten Körper (K, \leq) und eine stetige Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow K$, deren Bild in keinem Intervall $[-a, a]$ mit $a \in K$ enthalten ist.

Aufgabe 57. Sei $f := X^4Y^2 + X^2Y^4 - 3X^2Y^2Z^2 + Z^6 + 1 \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ (vergleiche Beispiel 2.4.15(3) aus der Vorlesung).

(a) Zeige, dass es für jedes $R \in \mathbb{R}$ Quadratsummen $s, t \in \sum \mathbb{R}[X, Y, Z]^2$ gibt mit

$$(*) \quad f = s + t(R^2 - (X^2 + Y^2 + Z^2)).$$

(b) Zeige, dass es kein $D \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass es für jedes $R \in \mathbb{R}$ Quadratsummen $s, t \in \mathbb{R}[X, Y, Z]^2$ vom Grad höchstens D mit $(*)$ gibt.

Abgabe bis Mittwoch, den 9. Mai, um 16:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.