Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2013

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 18 zur Reellen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 62. Sei K ein Unterkörper von $\mathbb{R}$, V ein K-Vektorraum, C ein echter Kegel in V und u eine Einheit für C. Zeige, dass

$$\varrho\colon V \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sup\{\lambda \in K \mid x - \lambda u \in C\}$$

eine wohldefinierte Funktion mit $\varrho(x) + \varrho(y) \leq \varrho(x + y)$ und $\varrho(\lambda x) = \lambda\varrho(x)$ für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K_{\geq 0}$ ist.

Aufgabe 63. Zitiere den Fortsetzungssatz von Hahn-Banach aus der Literatur oder aus der Vorlesung Funktionalanalysis und zeige damit folgenden Satz: Sei C ein echter Kegel im reellen Vektorraum V mit Einheit u. Dann gibt es eine Linearform $L\colon V \to \mathbb{R}$ mit $L(C) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $L(u) = 1$.

Aufgabe 64. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Wir bezeichnen die eindimensionalen affinen Unterräume von $\mathbb{R}^n$ als *Geraden*.

(a) Zeige, dass durch folgende Festlegung eine Topologie auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird: Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei offen genau dann, wenn für jede Gerade G der Schnitt $G \cap A$ offen in G ist bezüglich der Spurtopologie der gewöhnlichen Topologie des $\mathbb{R}^n$ auf G.

(b) Ist bezüglich dieser Topologie die Addition $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (x, y) \mapsto x + y$ stetig?

(c) Ist bezüglich dieser Topologie die Skalarmultiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ stetig?

Aufgabe 65. Entscheide, welche der folgenden Kegel eine Einheit im jeweiligen reellen Vektorraum besitzen:

(a) $\sum \mathbb{R}[X, Y]^2 + \sum \mathbb{R}[X, Y]^2(1 - X^2 - Y^6)$ im Vektorraum $\mathbb{R}[X, Y]$

(b) $\sum \mathbb{R}[X, Y]^2 + \sum \mathbb{R}[X, Y]^2(X^2 + Y^4)$ im Vektorraum $\mathbb{R}[X, Y]$

(c) $\sum \mathbb{R}[X]^2 + \sum_{N\in\mathbb{N}} \sum \mathbb{R}[X]^2(X - N)$ im Vektorraum $\mathbb{R}[X]$

(d) $(\sum \mathbb{R}[X]^2 + \sum \mathbb{R}[X]^2(1 - X^2)) \cap X\mathbb{R}[X]$ im Vektorraum $X\mathbb{R}[X]$

(e) $(\sum \mathbb{R}[X]^2 + \sum \mathbb{R}[X]^2 X(1 - X)) \cap X\mathbb{R}[X]$ im Vektorraum $X\mathbb{R}[X]$

(f) $(\sum \mathbb{R}[X]^2 + \sum \mathbb{R}[X]^2(1 - X^2)) \cap X^2\mathbb{R}[X]$ im Vektorraum $X^2\mathbb{R}[X]$

Abgabe bis Mittwoch, den 29. Mai, um 16:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.