Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2014/2015

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 5 zur Einführung in die Algebra

Betrachte den *Schiefkörper der hamiltonschen Quaternionen* $\mathbb{H} := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(Q_8)$ aus Aufgabe 3 von Blatt 4.

Aufgabe 1 (9+2 Punkte).

(a) Betrachte die Abbildungen

$$\begin{aligned} &f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{H},\ a \mapsto a1 \\ &g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H},\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto xi + yj + zk \qquad \text{und} \\ &h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{H},\ \begin{pmatrix} r \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto r1 + xi + yj + zk. \end{aligned}$$

Zeige, dass f eine Ringeinbettung, g eine Vektorraumeinbettung und h ein Vektorraumisomorphismus ist. Im folgenden identifizieren wir die Definitionsbereiche dieser Abbildungen oft mit ihren Bildern.

(b) Statte $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$ und dem *Kreuzprodukt*[1] $(v, w) \mapsto v \times w$ aus. Zeige $vw = v \times w - \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{H}$.

(c) Zu jeder Quaternion $a = r + v \in \mathbb{H}$ ($r \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^3$) bezeichne $a^* := r - v$ die dazu *konjugierte* Quaternion. Zeige $(ab)^* = b^*a^*$ für alle $a, b \in \mathbb{H}$.

(d) Statte $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ mit der euklidischen Norm $a \mapsto \|a\|$ aus und zeige, dass

$$\mathbb{H}^\times \to \mathbb{R}_{>0},\ a \mapsto \|a\|$$

ein Gruppenepimorphismus ist.

(e) Betrachte den Kern $S^3 := \{\, x \in \mathbb{H} \mid \|a\| = 1 \,\}$ des Epimorphismus aus (d) und zeige mit Korollar 1.4.8, dass

$$\mathbb{R}_{>0} \times S^3 \to \mathbb{H}^\times,\ (r, a) \mapsto ra$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

(f) Zeige $\mathrm{Z}(\mathbb{H}^\times) = \mathbb{R}^\times$.

(g) Zeige $a^{-1} = \frac{a^*}{\|a\|^2}$ für alle $a \in \mathbb{H}^\times$.

---

[1] siehe etwa `http://de.wikipedia.org/wiki/Kreuzprodukt`

Aufgabe 2 (9+2 Punkte). Es bezeichne $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ die Gruppe der $\mathbb{R}$-linearen Ringautomorphismen von $\mathbb{H}$. Zeige:

(a) $\mathbb{R}^3 = \{a \in \mathbb{H} \mid a^2 \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$

(b) Jeder $\mathbb{R}$-lineare Ringendomorphismus von $\mathbb{H}$ liegt in $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$, bildet $\mathbb{R}^3$ auf $\mathbb{R}^3$ ab und erhält die Norm auf $\mathbb{R}^3$.

(c) $\Phi\colon \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \to \mathrm{SO}_3,\ \varphi \mapsto \varphi|_{\mathbb{R}^3}$ ist ein Isomorphismus, wobei wir einen Vektorraumendomorphismus des $\mathbb{R}^3$ mit seiner Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis identifizieren.

(d) $\iota\colon \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^\times),\ \varphi \mapsto \varphi|_{\mathbb{H}^\times}$ ist eine Einbettung.

(e) $\mathrm{Inn}(\mathbb{H}^\times) \subseteq \iota(\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}))$.

(f) Wir haben einen Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} \mathrm{Inn}(\mathbb{H}^\times) &\to \mathrm{Inn}(\mathbb{H}^\times/\mathbb{R}^\times) \\ c_a &\mapsto c_{\overline{a}} \end{aligned}$$

und für $a, h \in \mathbb{H}^\times$ ist $c_{\overline{a}}(\overline{h}) = \overline{aha^*}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte (0 Punkte).

(a) Seien $r \in \mathbb{R}$, $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ und $a := r + v$. Zeige, dass $c_a \in \mathrm{Inn}(\mathbb{H}^\times)$ mittels $\Phi \circ \iota^{-1}$ als Rotation im $\mathbb{R}^3$ an der Drehachse $\mathbb{R}v$ um den Winkel $2\arg(r + \mathring{\imath}\,\|v\|)$ gegen den Uhrzeigersinn aufgefasst werden kann. Dabei sei die Uhr im Nullpunkt zentriert, senkrecht zu v stehend und das Ziffernblatt sei dem Vektor v zugewandt.

Für $c = |c|e^{\mathring{\imath}\alpha} \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in [0, 2\pi)$ sei dabei $\arg(c) := \alpha$ das *Argument* von c.

Hinweis: Argumentiere, warum man ohne Einschränkung $\|v\| = 1$ und dann mit Aufgabe 2(c) sogar $v = i$ annehmen kann. Berechne $c_a(i)$, $c_a(j)$ und $c_a(k)$ und vergleiche dies mit der Multiplikation in der komplexen Zahlenebene. Beachte dabei dass $xj + yk = (x + yi)j$ ist.

(b) Benutze (a) und Aufgabe 2(c), um $\mathrm{Inn}(\mathbb{H}^\times) = \iota(\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}))$ zu zeigen. Dies ist ein geometrischer Beweis des *Satzes von Skolem-Noether* für den Spezialfall von Quaternionen.[2]

(c) Überlege oder recherchiere, warum (a) und (b) sowie Aufgabe 2(f) zum Beispiel in der 3D-Programmierung, von Nutzen sein kann.

Abgabe bis Montag, den 24. November, um 9:55 Uhr in die Zettelkästen neben F411.

[2] Am Donnerstag, den 20. November, wird Prof. Wulf-Dieter Geyer (Universität Erlangen) um 17:00 Uhr im Hörsaal R513 über „Emmy Noether – einige Stationen ihres Lebens und Wirkens“ vortragen. Alle Studenten sind hierzu eingeladen.