Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2014/2015

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 13 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Sei K ein endlicher Körper der Charakteristik p. Zeige, dass jedes Element von K

(a) genau eine p-te Wurzel besitzt und diese in K liegt,

(b) Summe zweier Quadrate in K ist.

Hinweis: Zähle die Quadrate in K.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper der Charakteristik p und $L|K$ eine endliche Körpererweiterung, deren Grad nicht von p geteilt wird. Zeige, dass $L|K$ separabel ist.

Aufgabe 3. Sei K vollkommen und $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung derart, dass jedes Polynom aus $K[X] \setminus K$ in L eine Nullstelle hat. Zeige, dass L algebraisch abgeschlossen ist.

Hinweis: Verwende den Satz vom primitiven Element, um die Aussage auf Aufgabe 2 von Blatt 11 zurückzuführen.

Abgabe bis Montag, den 9. Februar, um 9:55 Uhr in die Zettelkästen neben F411.

Die Klausur findet am Montag, den 16. März 2015, von 11:00 bis 14:00 Uhr im Raum A701 statt. Die Klausuranmeldung bei Frau Cassola hat rechtzeitig zu erfolgen. Als Hilfsmittel zur Klausur ist ein von eigener Hand beschriebenes DIN A4-Blatt zugelassen.[1]

Wir wünschen viel Spaß mit der Algebra in der vorlesungsfreien Zeit!

[1] Ein Blatt hat zwei Seiten.

Auf studentischen Wunsch folgen drei *freiwillige* Zusatzaufgaben zu Gruppenwirkungen, die nicht in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe Z1. Sei $G = \mathbb{C}^\times$ und $M = \mathbb{C}$.

(a) Zeige, dass

$$\begin{aligned} G \times M &\to M \\ (a, x) &\mapsto \frac{ax}{|a|} \end{aligned}$$

eine Gruppenwirkung von G auf M ist.

(b) Bestimme die Bahnen unter dieser Wirkung.

(c) Gib ein Vertretersystem der Bahnen an.

(d) Bestimme zu $x \in M$ den Stabilisator G_x.

(e) Ist die Wirkung transitiv? Ist sie treu? Ist sie frei?

(f) Was ändert sich, wenn wir G durch $S^1 := \{\, a \in \mathbb{C} \mid |a| = 1 \,\}$ und/oder M durch $\mathbb{C}^\times$ ersetzen?

(g) Seien nun $m, n \in \mathbb{N}_0$. Ersetze G durch die Untergruppe der m-ten Einheitswurzeln und M durch die Vereinigung der Bahnen Gi für $i \in \{0, \dots, n\} \subseteq \mathbb{C}$. Mache Dir in diesem Fall klar, was Bahnengleichung, -satz und -formel bedeuten.

Aufgabe Z2. Die Gruppe G wirke auf der endlichen Menge M. Zusätzlich zu dem in 3.1.18 für jedes $x \in M$ eingeführten *Stabilisator von x*

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

betrachten wir für jedes $g \in G$ die *Menge der Fixpunkte von g*

$$M_g := \{x \in M \mid gx = x\}.$$

(a) Zeige $\sum_{x \in M} \#G_x = \sum_{g \in G} \#M_g$.

(b) Zeige mit (a), der Bahnengleichung 3.1.9 und der Bahnenformel aus 3.1.10 das folgende sogenannte *Lemma von Burnside*, welches auf Frobenius zurückgeht: Die Anzahl der Bahnen ist die durchschnittliche Anzahl der Fixpunkte, das heißt

$$\#(M/G) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \#M_g.$$

Aufgabe Z3. Sei A eine Menge und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass C_n auf A^{C_n} wirkt durch

$$gf = (h \mapsto f(g^{-1}h)) \qquad (g \in C_n, f \in A^{C_n}).$$

Im Folgenden betrachten wir diese Wirkung.

(b) Erkläre, warum es Sinn macht, die Bahnen (getragene) Halsketten der Länge n über A (oder mit n Perlen aus A) zu nennen. Für Hörer der Vorlesung Lineare Algebra I aus dem Wintersemester 2013/2014: Erkläre, inwiefern sich diese Definition von Halsketten nur unwesentlich von der damaligen Übungsaufgabe 4(c) auf Blatt 3 unterscheidet.

(c) Benutze, dass Lemma von Burnside, um zu zeigen, dass die Anzahl der Halsketten der Länge n über einer r-elementigen Menge ($r \in \mathbb{N}_0$) genau

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d | n}} r^d \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

ist, wobei φ die *Eulersche φ-Funktion* bezeichnet, das heißt $\varphi(n)$ bezeichnet die Anzahl der zu n teilerfremden natürlichen Zahlen, die nicht größer als n sind.