

---

Einführung in die Algebra, Übungsblatt 13, Lösungsvorschlag

---

**Aufgabe 3.** Sei  $K$  vollkommen und  $L|K$  eine algebraische Körpererweiterung derart, dass jedes Polynom aus  $K[X] \setminus K$  in  $L$  eine Nullstelle hat. Zeige, dass  $L$  algebraisch abgeschlossen ist.

**Hinweis:** Verwende den Satz vom primitiven Element, um die Aussage auf Aufgabe 2 von Blatt 11 zurückzuführen.

**Lösungsvorschlag.** Sei  $f \in K[X] \setminus K$ . Dem Hinweis folgend, reicht es zu zeigen, dass  $f$  über  $L$  zerfällt. Sei  $F$  ein Zerfällungskörper von  $f$  über  $K$ . Da  $K$  vollkommen ist, ist  $F|K$  separabel. Außerdem ist  $F|K$  selbstverständlich endlich nach 4.3.6(a). Nach dem Satz vom primitiven Element existiert daher ein  $a \in F$  mit  $F = K(a)$ . Es zerfällt also  $f$  über  $K(a)$ . Damit zerfällt  $f$  natürlich auch über jedem zu  $K(a)$  über  $K$  isomorphen Oberkörper von  $K$ . Es reicht daher zu zeigen, dass es einen zu  $K(a)$  über  $K$  isomorphen Zwischenkörper von  $L|K$  gibt. Bezeichne  $g \in K[X]$  das Minimalpolynom von  $a$  über  $K$ . Nach Voraussetzung hat  $g$  eine Nullstelle  $b$  in  $L$ . Nach 4.2.15 sind  $K(a)$  und  $K(b)$   $K$ -isomorph, weshalb  $f$  auch über  $K(b)$  zerfällt.