Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 7 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (4P) (Einfachheit und algebraisch abgeschlossene Körper)

Sei K ein Körper. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) K ist algebraisch abgeschlossen.

(b) Jeder einfache $K[X]$-Modul ist als K-Vektorraum eindimensional.

Aufgabe 2. (6P) (Eine Anwendung von Cayley-Hamilton)

Seien R ein kommutativer Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul und $f, g \in \operatorname{End}(M)$ mit $fg = gf$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) $\exists k \in \mathbb{N} : \operatorname{im}(f^k) \subseteq \operatorname{im}(g)$

(b) $\exists n \in \mathbb{N} : \exists h \in \operatorname{End}(M) : f^n = gh$

Aufgabe 3. (6P) („Nichtkommutative Körper“) Einen Ring R nennt man *Schiefkörper*, wenn $R^\times = R \setminus \{0\}$. Sei R ein Ring, in dem $0 \neq 1$ gilt. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) Jeder R-Modul ist frei.

(b) Jeder zyklische R-Modul ist frei.

(c) R ist ein einfacher R-Modul.

(d) Für alle $a \in R \setminus \{0\}$ gibt es ein $b \in R$ mit $ab = 1$.

(e) Für alle $a \in R \setminus \{0\}$ gibt es ein $b \in R$ mit $ba = 1$.

(f) R ist ein Schiefkörper.

Hinweis: Für (f) $\Longrightarrow$ (a) kann man 1.2.5 und 1.3.9 aus der Vorlesung benutzen.

Abgabe bis Dienstag, den 2. Juni um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.