Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 6 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Zeige: Der Quotientenring $A := \mathbb{F}_3[X]/(X^2-1)$ ist isomorph zum kommutativen Ring $\mathbb{F}_3^2 = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$.

Aufgabe 2: Es sei $c \in \mathbb{C}$ und I das von $(X-c)^2 = X^2 - 2cX + c^2$ in $\mathbb{C}[X]$ erzeugte (Haupt-)Ideal.

(a) Zeige für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion nach k: Für alle $k \in \{1, ..., n\}$ ist

$$X^n - 1 \equiv_I kc^{k-1}X^{n-k+1} - (k-1)c^k X^{n-k} - 1.$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : X^n - 1 \notin I$

(c) Zeige unter Verwendung von (b) und unter Voraussetzung der Gültigkeit des Fundamentalsatzes der Algebra, dass $C_n := \{c \in \mathbb{C} \mid c^n = 1\}$ genau n Elemente hat.

Aufgabe 3: Es sei $C_n \subseteq \mathbb{C}$ wie in Aufgabe 2 definiert. Zeige:

(a) Ist $x \in C_n$, so ist auch $x^i \in C_n$, für alle $i \in \mathbb{N}$.

(b) $\forall m, n \in \mathbb{N} : (C_m \subseteq C_n \iff n \in (m)_{\mathbb{Z}})$

Aufgabe 4: Es seien $n, a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl mit $\prod_{i=1}^n a_i \in (p)_{\mathbb{Z}}$. Zeige, dass es ein $i \in \{1, 2, ..., n\}$ gibt mit $a_i \in (p)_{\mathbb{Z}}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Für $n \in \mathbb{N}$ sei C_n wieder wie in Aufgabe 2. Wir betrachten die von $\bigcup\{C_{2^i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ erzeugte Untergruppe G der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^\times$ von $\mathbb{C}$.

(a) Gib unendlich viele verschiedene echte Untergruppen von G an.

(b) Zeige: Ist $x \in C_{2^{n+1}} \setminus C_{2^n}$, so ist $\{x^i \mid i \in \mathbb{N}\} = C_{2^{n+1}}$.

(c) Zeige: G ist eine unendliche abelsche Gruppe, deren sämtliche echte Untergruppen endlich sind.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 11. Dezember 2017, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihrer/s TutorIn/s in der 4. Etage des F-Gebäudes.