
Übungsblatt 13 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Sei K ein Körper.

(a) Betrachte $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{3 \times 3}$. Bestimme $a, b, c \in K$ mit $A^6 = aA^2 + bA + cI_3$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times n}$. Zeige durch Induktion nach k : Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ existieren $c_0, \dots, c_{n-1} \in K$ so, dass $A^k = \sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i$. (Tipp: Satz von Caley-Hamilton)

Aufgabe 2:

(a) Berechne die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \subseteq \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeige: Ist z ein komplexer Eigenwert von A , so auch z^* .

(c) Bleibt die Aussage aus (b) für beliebige nicht notwendig reelle $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ richtig? Begründe Deine Antwort.

Aufgabe 3: Betrachte den Punkt

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Achsendrehung, und zwar um einen Winkel von 120 Grad im Uhrzeigersinn um die Gerade, die durch den Nullpunkt und den Punkt v verläuft, wobei der Mittelpunkt der Uhr derart im Punkt v befestigt sei, dass ihre Vorderseite zum Nullpunkt zeigt. Bestimme das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume von f .

Aufgabe 4: Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times n}$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix. Zeige, dass dann auch die Inverse A^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Sei R ein kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}_0$, $A, B \in R^{n \times n}$. Zeige $\text{com}(AB) = (\text{com } A)(\text{com } B)$ für den Fall, dass A und B invertierbar sind. Spekuliere, ob es auch im allgemeinen Fall gilt, in dem A und B nicht notwendig invertierbar sind.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 12. Februar 2018, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihrer/s TutorIn/s in der 4. Etage des F-Gebäudes.