Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Sabine Burgdorf
Markus Schweighofer

Übungsblatt 9 zur Einführung in die Algebra

Abgabe bis Montag, den 8. Januar 2018, 11.44 Uhr in die Briefkästen auf F4.

Aufgabe 30

(a) Sei G eine endliche Gruppe. Man nennt eine Untergruppe von G eine *Sylowgruppe* von G, wenn es ein $p \in \mathbb{P}$ gibt derart, dass sie eine p-Sylowgruppe von G ist. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (a) Jede Sylowgruppe von G ist ein Normalteiler von G.
   (b) G ist isomorph zu einem direkten Produkt von Gruppen von Primzahlpotenzordnung.

(b) Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung 665 zu $C_5 \times C_7 \times C_{19}$ isomorph ist.

Aufgabe 31

Sei $p \in \mathbb{P}$ und G eine endliche Gruppe. Zeige:

(a) Ist $\#G = p^2$, so ist G abelsch.
(b) Ist $\#G = 2p$ und $p \neq 2$, so ist $G \cong C_{2p}$ oder $G \cong D_p$.
(c) Ist $\#G = 4$, so ist $G \cong C_4$ oder $G \cong V$.

Aufgabe 32

Sei G eine endliche Gruppe. Bestimme G (bis auf Isomorphie), falls

(a) $\#G = 241217$,
(b) $\#G = 010118$,
(c) G nicht abelsch und $\#G = 12055$

ist. Wie lassen sich obige Ergebnisse auf Gruppen der Ordnung pq für Primzahlen $p \neq q$ verallgemeinern? (Antwort max. 1/2 Seite)
Hinweis: Unterscheide die Fälle $p \mid q-1$ und $p \nmid q-1$ für $p < q$.

Aufgabe 33

Bestimme bis auf Isomorphie alle Gruppen bis Ordnung 8.

Zusatzaufgaben

Eine Gruppe G heißt *einfach*, wenn sie genau zwei Normalteiler besitzt (also wenn G nicht einelementig ist und nur die trivialen Normalteiler $\{1\}$ und G besitzt). Ziel ist es zu zeigen, dass A_5 die eine einfache nichtabelsche Gruppe kleinstmöglicher Ordnung ist.

Aufgabe I

Zeige, dass A_5 einfach ist.

Aufgabe J

Sei G eine Gruppe.

(a) Sei $\#G = p^n$ für eine Primzahl p und $n \geq 2$. Zeige, dass G nicht einfach ist.

(b) Sei $\#G = pm$ für eine Primzahl p und $m \geq 2$. Zeige, dass G nicht einfach ist, wenn für kein $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 2$ gilt

$$d \mid pm \text{ und } d \equiv_{(p)} 1.$$

(c) Zeige, dass Gruppen der Ordnung pq^2 für Primzahlen $p \neq q$ niemals einfach sind.

Aufgabe K

Zeige, dass keine nichtabelsche Gruppen einer Ordnung < 60 einfach ist.

Hinweis: Mit den vorherigen Aufgaben sollten die Ordnungen $p, 2p, p^n, pq^2$ und pq für Primzahlen p, q mit $p \neq q$ und $n \in \mathbb{N}$ sowie $\#G \in \{30, 40, 42, 54\}$ klar sein. Damit bleiben nur noch die Ordnungen 24, 36, 48 und 56 zu betrachten.

Wir wünschen allen Studierenden frohe Weihnachtstage und einen guten Start in das Jahr 2018!