Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2018

Sabine Burgdorf
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 7 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1: Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $f \in \operatorname{End}(V)$ selbstadjungiert [$\to$ 11.3.1]. Seien v und w Eigenvektoren von f zu verschiedenen Eigenwerten. Zeige $v \perp w$ [$\to$ 11.2.1].

Aufgabe 2: Betrachte $q_1, q_2 \in Q(\mathbb{R}^3)$ definiert durch

$$\begin{aligned} q_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 \qquad \text{und} \\ q_2(x) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3^2 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimme jeweils die Sylvester-Signatur von q_1 und q_2.

(b) Finde ein Skalarprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ auf $\mathbb{R}^3$, für welches $q_1(x) = \langle x, x\rangle$ für $x \in \mathbb{R}^3$ gilt.

(c) Bestimme ausgehend von der Standardbasis $\underline{e}$ des $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine ONB $\underline{w}$ des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Skalarproduktes aus (b) [$\to$ 11.2.15].

(d) Berechne die Darstellungsmatrix $A := M(q_2, \underline{w})$ von q_2 bezüglich $\underline{w}$.

(e) Berechne die Eigenwerte von A und zeige, dass sie paarweise verschieden sind.

(f) Berechne eine Basis $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von A besteht.

(g) Begründe, warum u_1, u_2 und u_3 bezüglich des Standardskalarprodukts auf dem $\mathbb{R}^3$ paarweise senkrecht aufeinander stehen.

(h) Begründe mittels 11.2.24, dass $\underline{v} := (\operatorname{vec}_{\underline{w}}(u_1), \operatorname{vec}_{\underline{w}}(u_2), \operatorname{vec}_{\underline{w}}(u_3))$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, deren Vektoren Eigenvektoren von $f := \operatorname{vec}_{\underline{w}} \circ f_A \circ \operatorname{coord}_{\underline{w}} \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ sind und bezüglich des Skalarproduktes aus (b) paarweise orthogonal sind.

(i) Begründe, warum $M(f, \underline{v})$ eine Diagonalmatrix ist.

(j) Berechne $M(q_1, \underline{v})$ und $M(q_2, \underline{v})$.

Aufgabe 3: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv semidefinit.

(a) Zeige mittels 11.3.10, dass es eine positiv semidefinite Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt mit $A = B^2$.

Im folgenden seien $B \in S\mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig mit $A = B^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A und $U := \ker(A - \lambda I_n)$ der zugehörige Eigenraum.

(b) Zeige $f_B(U) \subseteq U$ [$\rightarrow$ 6.3.2(e)].

(c) Zeige, dass $f_B|_U$ keine andere Eigenwerte als $\sqrt{\lambda}$ und $-\sqrt{\lambda}$ haben kann.

(d) Zeige, dass $f_B|_U$ ein selbstadjungierter Endomorphismus von U ist.

Ab jetzt sei B zusätzlich positiv semidefinit.

(e) Zeige $f_B|_U = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}_U$.

(f) Begründe, warum B aus (a) eindeutig ist.

Abgabe bis Freitag, den 8. Juni 2018, um 9:55 Uhr in das Fach Ihres Tutors neben dem Raum F411.