
Übungsblatt 12 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. In Aufgabe 5 auf Blatt 11 haben wir ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[Y_1, Y_2]$ gefunden derart, dass $V(f)$ der Abschluss von

$$C := \left\{ 3 \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(17\varphi) \\ \sin(17\varphi) \end{pmatrix} \mid \varphi \in [0, 2\pi) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

bezüglich der \mathbb{Q} -Zariskitopologie auf $\mathbb{A}^2 = \mathbb{C}^2$ ist. In dieser Aufgabe arbeiten wir weiter darauf hin,

$$C = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid f(y) = 0\}$$

zu zeigen. Erst auf dem nächsten Übungsblatt werden wir das unter Verwendung von zusätzlicher Theorie endgültig bewerkstelligen. Für jedes Polynom p mit komplexen Koeffizienten schreiben wir $\operatorname{Re}(p)$ und $\operatorname{Im}(p)$ für das Polynom dessen Koeffizienten die Realteile beziehungsweise Imaginärteile der entsprechenden Koeffizienten von p sind.

(a) Wir betrachten für $g := X_1^2 + X_2^2 - 1$ wieder die affine \mathbb{Q} -Varietät

$$V := V(g) \subseteq \mathbb{C}^2 = \mathbb{A}^2$$

und den reellen Einheitskreis $S := V \cap \mathbb{R}^2$. Begründe, falls noch nicht geschehen, warum man einen Morphismus $\varphi: V \rightarrow \mathbb{A}^2$ mit $\varphi(S) = C$ findet, indem man $\varphi(x) = (f_1(x), f_2(x))$ für alle $x \in V$ fordert, wobei

$$\begin{aligned} f_1 &:= 3X_1 + \operatorname{Re}((X_1 + iX_2)^{17}) \in \mathbb{Q}[X_1, X_2] & \text{und} \\ f_2 &:= 3X_2 + \operatorname{Im}((X_1 + iX_2)^{17}) \in \mathbb{Q}[X_1, X_2]. \end{aligned}$$

(b) Schreibe

$$\hat{p} := p(X_1 + iY_1, X_2 + iY_2) \in \mathbb{Q}[i][X_1, Y_1, X_2, Y_2] \subseteq \mathbb{C}[X_1, Y_1, X_2, Y_2]$$

für jedes $p \in \mathbb{Q}[X_1, X_2]$. Berechne mit Singular das Eliminationsideal $J \cap \mathbb{Q}[Y_2]$ von

$$J := (\operatorname{Im}(\hat{f}_1), \operatorname{Im}(\hat{f}_2), \operatorname{Re}(\hat{g}), \operatorname{Im}(\hat{g})) \subseteq \mathbb{Q}[X_1, Y_1, X_2, Y_2]$$

und zeige, dass es ein Polynom der Form $a_1 Y_2 + a_3 Y_2^3 + a_5 Y_2^5 + \dots$ mit $a_1, a_2, a_2, \dots \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ und $a_1 \neq 0$ enthält.

(c) Folgere aus (b), dass für alle $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in V(J) \cap \mathbb{R}^4$ sogar gilt $y_2 = 0$.

- (d) Zeige mit Singular $f_1(X_1, X_2) = f_2(X_2, X_1)$ und folgere daraus mit (c), dass für alle $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in V(J) \cap \mathbb{R}^4$ sogar $y_1 = y_2 = 0$ gilt.
- (e) Zeige $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^2$.
- (f) Folgere $\varphi^{-1}(V(f) \cap \mathbb{R}^2) = S$.

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 2$ und \underline{X} ein Block von paarweise verschiedenen Unbestimmten X_{ij} ($i, j \in \{1, \dots, n\}$), aus denen wir die Matrix

$$X := (X_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in \mathbb{Q}[\underline{X}]^{n \times n}$$

bilden. Betrachte die Ideale I, J und K von $\mathbb{Q}[\underline{X}]$, welche von

- den $\frac{n(n+1)}{2}$ Einträgen auf und unterhalb (oder oberhalb) der Diagonalen der symmetrischen Matrix $X^T X - I_n \in \mathbb{Q}[\underline{X}]^{n \times n}$ beziehungsweise
- den $\frac{n(n+1)}{2}$ Einträgen auf und unterhalb (oder oberhalb) der Diagonalen der symmetrischen Matrix $XX^T - I_n \in \mathbb{Q}[\underline{X}]^{n \times n}$ beziehungsweise
- dem Polynom $\text{tr}(X^T X - I_n) = \text{tr}(XX^T - I_n) \in \mathbb{Q}[\underline{X}]$

zusammen mit dem Polynom $\det(X) - 1 = \det(X^T) - 1 \in \mathbb{Q}[\underline{X}]$ erzeugt werden. Betrachte $V(I), V(J)$ und $V(K)$ als Teilmengen von $\mathbb{C}^{n \times n}$.

- (a) Zeige $V(I) \cap \mathbb{R}^{n \times n} = \text{SO}_n = V(J) \cap \mathbb{R}^{n \times n}$.
- (b) Zeige $V(K) \cap \mathbb{R}^{n \times n} = \text{SO}_n$.

Hinweis: Erinnere Dich an oder informiere Dich über die folgende Tatsache, die Du verwenden darfst: Die bekannte Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel endlich vieler nichtnegativer reeller Zahlen ist genau dann scharf, wenn diese Zahlen alle übereinstimmen. Wende dies auf die nichtnegativen Eigenwerte der positiv semidefiniten Matrix $A^T A$ an für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (c) Zeige $V(I) = V(J)$.
- (d) Zeige $V(I) \neq V(K)$.
- (e) In Aufgabe 1(b) auf Blatt 9 haben wir eine Variante von Satz 2.7.7 angesprochen. In Aufgabe 1 auf Blatt 11 haben wir eine Verschärfung desselben Satzes angesprochen. Formuliere nun die entsprechende „verschärfte Variante“ und nehme kurz dazu Stellung, warum sie gilt.
- (f) Folgere aus (e) und aus Aufgabe 1(b) auf Blatt 9, dass SO_3 \mathbb{Q} -Zariski-dicht in $V(I)$ liegt.
- (g) Zeige, dass $I^{n \times n}$ im Ring $\mathbb{Q}[\underline{X}]^{n \times n}$ ein Ideal ist.

(h) Zeige, dass $I = J$ gilt.

Hinweis: Betrachte die transponierten Komatrizen von X und X^T aus der linearen Algebra sowie das Ideal aus (g). Falls Du nicht imstande bist, eine theoretische Lösung zu finden, dann rechne die Gleichheit für kleine n mit Singular nach. Dafür gibt es Teilpunkte je nach Anzahl der betrachteten Fälle.

Abgabe bis Freitag, den 31. Januar 2020, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411. Die Singular-Codes müssen zusätzlich per Email bis Freitag, den 31. Januar 2020, 23:59 Uhr an alexander.taveira-blomenhofer@uni.kn geschickt werden.