

---

Übungsblatt 4 zur Zahlentheorie

---

**Aufgabe 1.** Sei  $M$  ein zyklischer halbeinfacher Modul. Zeige:

- (a) Jeder Untermodul von  $M$  ist wieder zyklisch und halbeinfach.
- (b)  $M$  ist eine direkte Summe endlich vieler Untermoduln.

**Aufgabe 2.** Sei  $K$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ . Zeige:

- (a)  $K^n$  ist als  $K^{n \times n}$ -Modul einfach.
- (b)  $K^{n \times n}$  ist als  $K^{n \times n}$ -Modul zyklisch und halbeinfach.
- (c) Jeder Untermodul des  $K^{n \times n}$ -Moduls  $K^{n \times n}$  ist von der Form

$$\{A \in K^{n \times n} \mid U \subseteq \ker A\}$$

für einen Unterraum  $U$  des  $K$ -Vektorraums  $K^n$ .

- (d) Jeder einfache  $K^{n \times n}$ -Modul  $N$  ist zum  $K^{n \times n}$ -Modul  $K^n$  isomorph.

**Aufgabe 3.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Zeige, dass  $R$  als  $R$ -Modul genau dann

- (a) einfach ist, wenn  $R$  ein Körper ist.
- (b) halbeinfach ist, wenn  $R$  isomorph ist zu einem endlichen direkten Produkt von Körpern ist.

**Aufgabe 4.** Betrachte  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{Z}$  beide als  $\mathbb{Z}$ -Modul sowie für fixiertes  $s \in \mathbb{Z}$  mit  $s \geq 2$  den Untermodul

$$M := \left\{ \frac{a}{s^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

von  $\mathbb{Q}$ .

- (a) Ist  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  noethersch?
- (b) Ist  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  artinsch?
- (c) Ist  $M/\mathbb{Z}$  noethersch?
- (d) Ist  $M/\mathbb{Z}$  artinsch?

**Abgabe** bis Mittwoch, den 15. Mai 2019, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.