

---

Übungsblatt 6 zur Zahlentheorie

---

**Aufgabe 1.** Für alle Ringe  $R$ , alle  $R$ -Moduln  $M$ , alle  $m, m, r \in \mathbb{N}_0$ ,  $A \in R^{m \times n}$  und  $X \in M^{n \times r}$  setzen wir

$$AX := \left( \sum_{j=1}^n A_{ij} X_{jk} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq r}}.$$

Sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul. Zeige für alle  $m, n, r, s \in \mathbb{N}_0$ :

- (a)  $\forall A, B \in R^{m \times n} : \forall X \in M^{n \times r} : (A + B)X = AX + BX$
- (b)  $\forall A \in R^{m \times n} : \forall X, Y \in M^{n \times r} : A(X + Y) = AX + AY$
- (c)  $\forall A \in R^{m \times n} : \forall B \in R^{n \times r} : \forall X \in R^{r \times s} : A(BX) = (AB)X$
- (d)  $R^{n \times n}$  wird mit der wie oben (im Spezialfall  $M = R$  und  $m = n = r$ ) erklärten Multiplikation ein Ring mit  $1 = I_n$ .
- (e)  $M^{n \times r}$  wird mit der wie oben (im Spezialfall  $m = n$ ) erklärten Skalarmultiplikation ein  $R^{n \times n}$ -Modul.

**Aufgabe 2.** Sei  $R$  ein Ring. Zeige, dass  $R$  genau dann kommutativ ist, wenn für alle  $R$ -Moduln  $M$  und  $N$  die Menge

$$\text{Hom}(M, N) = \{f \mid f: M \rightarrow N\}$$

einen Untermodul des  $R$ -Moduls  $N^M$  aller Abbildungen von  $M$  nach  $N$  bildet.

**Aufgabe 3.** Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} X - 1 & X^2 - 1 & 0 \\ X^3 - X^2 + X - 1 & X^4 + X^2 - 2 & X^2 - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}[X]^{2 \times 3}.$$

- (a) Berechne die Smithsche Normalform  $S \in \mathbb{Q}[X]^{2 \times 3}$  von  $A$  und finde  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{Q}[X])$  derart, dass  $Q \in \text{GL}_3(\mathbb{Q}[X])$  existiert mit  $S = PAQ$ .
- (b) Gebe für den Modul  $\mathbb{Q}[X]$ -Modul  $M := \mathbb{Q}[X]^2 / \text{im } A$  explizit Isomorphismen wie im ersten und zweiten Teil des Struktursatzes für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen zusammen mit dazugehörigen Isomorphismen an.
- (c) Bestimme die Länge von  $M$ .

- (d) Bestimme möglichst explizit eine Kompositionsreihe von  $M$ .
- (e) Bestimme bis auf Isomorphie und Reihenfolge die Faktoren einer Kompositionsreihe von  $M$  wie im Satz von Jordan-Hölder.
- (f) Schreibe  $M$  möglichst explizit als direkte Summe unzerlegbarer Untermoduln wie im Satz von Krull-Remak-Schmidt.
- (g) Bestimme die Dimension von  $\mathbb{Q}[X]^2 / \text{im}(A)$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum.

**Aufgabe 4.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring.

- (a) Seien  $A, B \in R^{m \times n}$ ,  $P \in \text{GL}_m(R)$  und  $Q \in \text{GL}_n(R)$  mit  $B = PAQ$ . Zeige, dass die Abbildung

$$R^m / \text{im } A \rightarrow R^m / \text{im } B, \bar{x} \mapsto \overline{Px} \quad (x \in R^m)$$

wohldefiniert und ein Modulisomorphismus ist.

- (b) Sei  $R$  ein Hauptidealring und seien  $A \in R^{m \times n}$  mit Elementarteilern  $c_1(A) \mid \dots \mid c_\ell(A)$  ( $\ell := \min(m, n)$ ),

$$P = \begin{pmatrix} * & & & \\ \hline b_{11} & \dots & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & \dots & b_{km} \end{pmatrix} \in \text{GL}_m(R),$$

$S \in R^{m \times n}$  in Smithscher Normalform und  $Q \in \text{GL}_n(R)$  mit

$$S = PAQ.$$

Dabei seien  $j, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $j + k = m$ ,  $j \leq \ell$  und  $c_i(A) = 1$  für  $i \in \{1, \dots, j\}$ . Zeige, dass

$$R^m / \text{im } A \rightarrow \prod_{i=j+1}^{\ell} R / c_i(A) \times \prod_{i=\ell+1}^m R / 0R$$

$$\bar{x} \mapsto (\overline{b_{11}x_1 + \dots + b_{1m}x_m}, \dots, \overline{b_{k1}x_1 + \dots + b_{km}x_m}) \quad (x \in R^m)$$

ein wohldefinierter  $R$ -Modulisomorphismus ist.

**Abgabe** bis Mittwoch, den 29. Mai 2019, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.