

Übungsblatt 1 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ *multiplikativ*, das heißt $1 \in S$ und $st \in S$ für alle $s, t \in S$. Sei weiter M ein R -Modul. Wir nennen ein Element $a \in R$ einen *Nichtnullteiler* für M , wenn $ax \neq 0$ für alle $x \in M \setminus \{0\}$, andernfalls nennen wir a einen *Nullteiler* für M .

(a) Zeige, dass auf $M \times S$ durch

$$(x, s) \sim (y, t) : \iff \exists u \in S : utx = usy \quad (x, y \in M, s, t \in S)$$

eine Äquivalenzrelation \sim definiert wird.

(b) Zeige, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} + : ((M \times S)/\sim) \times ((M \times S)/\sim) &\rightarrow (M \times S)/\sim, (\widetilde{(x, s)}, \widetilde{(y, t)}) \rightarrow \widetilde{(tx + sy, st)} \quad \text{und} \\ \cdot : ((R \times S)/\sim) \times ((M \times S)/\sim) &\rightarrow (M \times S)/\sim, (\widetilde{(a, s)}, \widetilde{(x, t)}) \rightarrow \widetilde{(ax, st)} \end{aligned}$$

($a \in R, x, y \in M, s, t \in S$) wohldefiniert sind.

(c) Zeige, dass vermöge $+$ die Menge $(M \times S)/\sim$ zu einer abelschen Gruppe wird.

(d) Zeige, dass vermöge $+$ und \cdot im Falle $M = R$ die Menge $(R \times S)/\sim$ zu einem kommutativen Ring wird.

(e) Zeige, dass $(M \times S)/\sim$ durch $+$ und \cdot zu einem $((R \times S)/\sim)$ -Modul wird.

(f) Zeige, dass $\iota : M \rightarrow ((M \times S)/\sim), x \mapsto \widetilde{(x, 1)}$ ein Gruppenhomomorphismus ist mit $\ker \iota = \{x \in M \mid \exists s \in S : sx = 0\}$.

(g) Zeige, dass ι injektiv ist genau dann, wenn S nur aus Nichtnullteilern für M besteht.

(h) Zeige, dass $\iota_0 : R \rightarrow (R \times S)/\sim, x \mapsto \widetilde{(x, 1)}$ ein Ringhomomorphismus ist mit $\iota_0(s) \in ((R \times S)/\sim)^\times$ für alle $s \in S$.

(i) Zeige, dass $\widetilde{(x, s)} = \frac{\iota(x)}{\iota_0(s)}$ für alle $x \in M$ und $s \in S$ (wobei $\frac{\iota(x)}{\iota_0(s)}$ für $\iota_0(s)^{-1}\iota(x)$ steht).

Zur Vereinfachung der Notation schreibt man oft

$$\begin{aligned} \frac{x}{s} &\text{ statt } \frac{\iota(x)}{\iota_0(s)} = \widetilde{(x, s)} \quad (x \in M, s \in S) \quad \text{und dann auch} \\ S^{-1}M &\text{ statt } \left\{ \frac{x}{s} \mid x \in M, s \in S \right\} = (M \times S)/\sim. \end{aligned}$$

Wir nennen $S^{-1}R$ und $S^{-1}M$ die *Lokalisierungen* von R und M nach S .

Aufgabe 2. Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ multiplikativ.

- (a) Seien M und N zwei R -Moduln und f ein R -Modulhomomorphismus. Zeige, dass es dann genau einen $S^{-1}R$ -Modulhomomorphismus $S^{-1}f: S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N$ gibt derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow x \mapsto \frac{x}{1} & & \downarrow y \mapsto \frac{y}{1} \\ S^{-1}M & \xrightarrow{S^{-1}f} & S^{-1}N \end{array}$$

kommutiert. Wir nennen $S^{-1}f$ die *Lokalisierung* von f nach S .

- (b) Sei M ein R -Modul. Zeige $S^{-1}\text{id}_M = \text{id}_{S^{-1}M}$.
- (c) Sei $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ eine Sequenz von R -Moduln. Zeige
- $$S^{-1}(g \circ f) = (S^{-1}g) \circ (S^{-1}f).$$
- (d) Überlege und argumentiere, inwiefern und warum Lokalisieren nach S (von R -Moduln und R -Modulhomomorphismen) kommutative Diagramme in kommutative Diagramme überführt.
- (e) Begründe, warum Lokalisieren nach S einer halbexakten Sequenz von R -Moduln wieder eine halbexakte Sequenz von R -Moduln liefert.
- (f) Begründe, warum Lokalisieren nach S einer exakten Sequenz von R -Moduln wieder eine exakte Sequenz von R -Moduln liefert.
- (g) Sei N ein Untermodul des R -Moduls M . Zeige, dass man $S^{-1}N$ in kanonischer Weise als Untermodul des $(S^{-1}R)$ -Moduls $S^{-1}M$ auffassen kann und dass eine kanonische Isomorphie $S^{-1}(M/N) \cong (S^{-1}M)/(S^{-1}N)$ von $S^{-1}R$ -Moduln besteht.
- (h) Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln. Zeige $S^{-1} \bigoplus_{i \in I} M_i = \bigoplus_{i \in I} S^{-1}M_i$.
- (i) Sei M ein endlich erzeugter R -Modul. Zeige, dass $S^{-1}M$ ein endlich erzeugter $S^{-1}R$ -Modul ist.
- (j) Sei M ein R -Modul. Zeige, dass jeder Untermodul des $(S^{-1}R)$ -Moduls $S^{-1}M$ von der Form $S^{-1}N$ für einen Untermodul N von M ist.
- (k) Sei M ein noetherscher R -Modul. Zeige, dass $S^{-1}M$ ein noetherscher $S^{-1}R$ -Modul ist.

Abgabe wegen des Feiertags ausnahmsweise bis Samstag, den 2. Mai, um 11:44 Uhr in die digitalen Briefkästen.